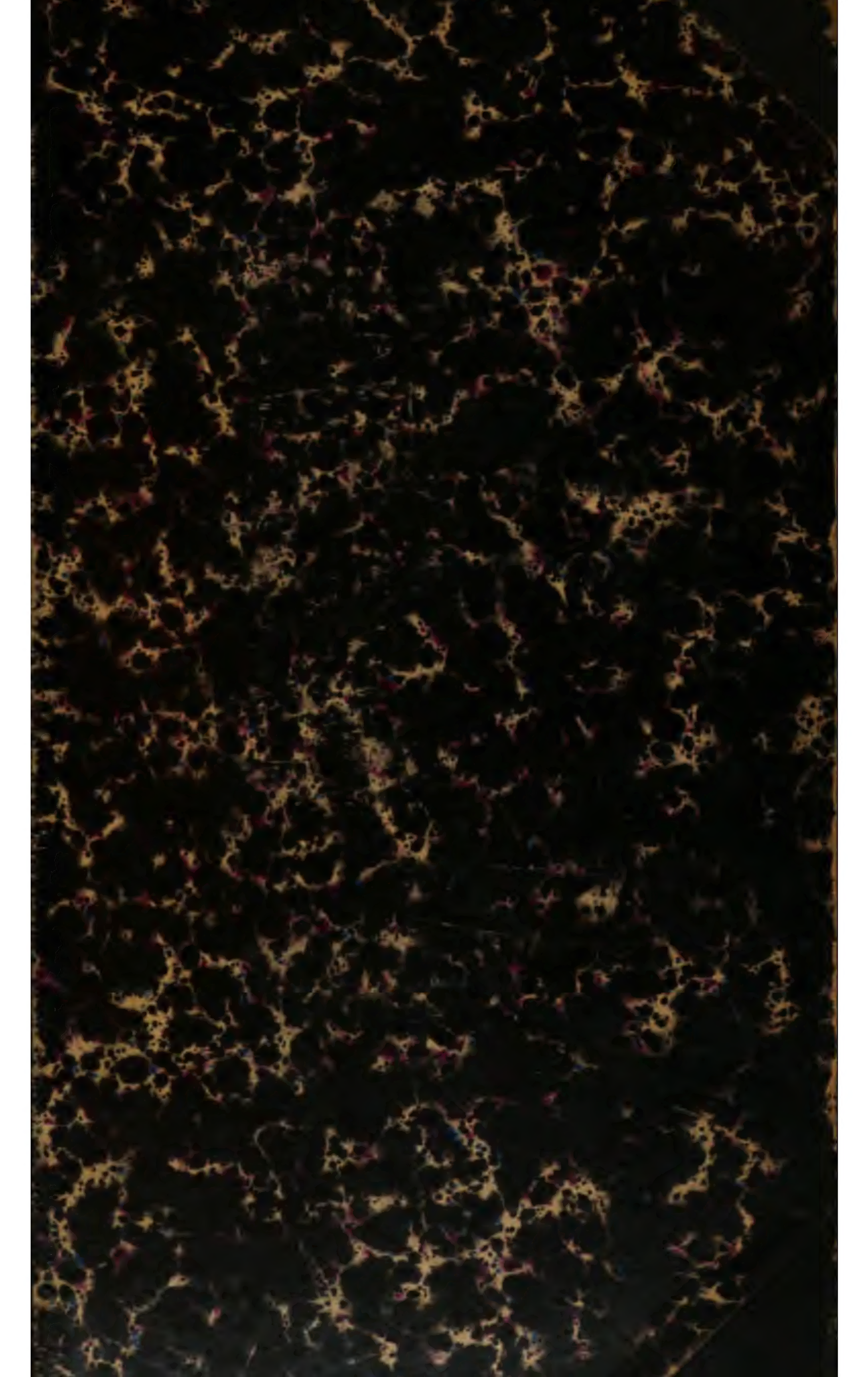










SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

NEUNUNDNEUNZIGSTER BAND.

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

SITZUNGSBERICHTE

DER

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

XCIX. BAND. ABTHEILUNG II. a.

JAHRGANG 1890. — HEFT I BIS X.

(Mit 9 Tafeln und 52 Textfiguren.)

WIEN, 1891.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT.

Seite

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. BAND. I. bis III. HEFT.

Jahrgang 1890. — Jänner bis März.

(Mit 1 Tafel und 1 Textfigur.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1890.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 1. bis 3. Heftes Jänner bis März 1890 des XCIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

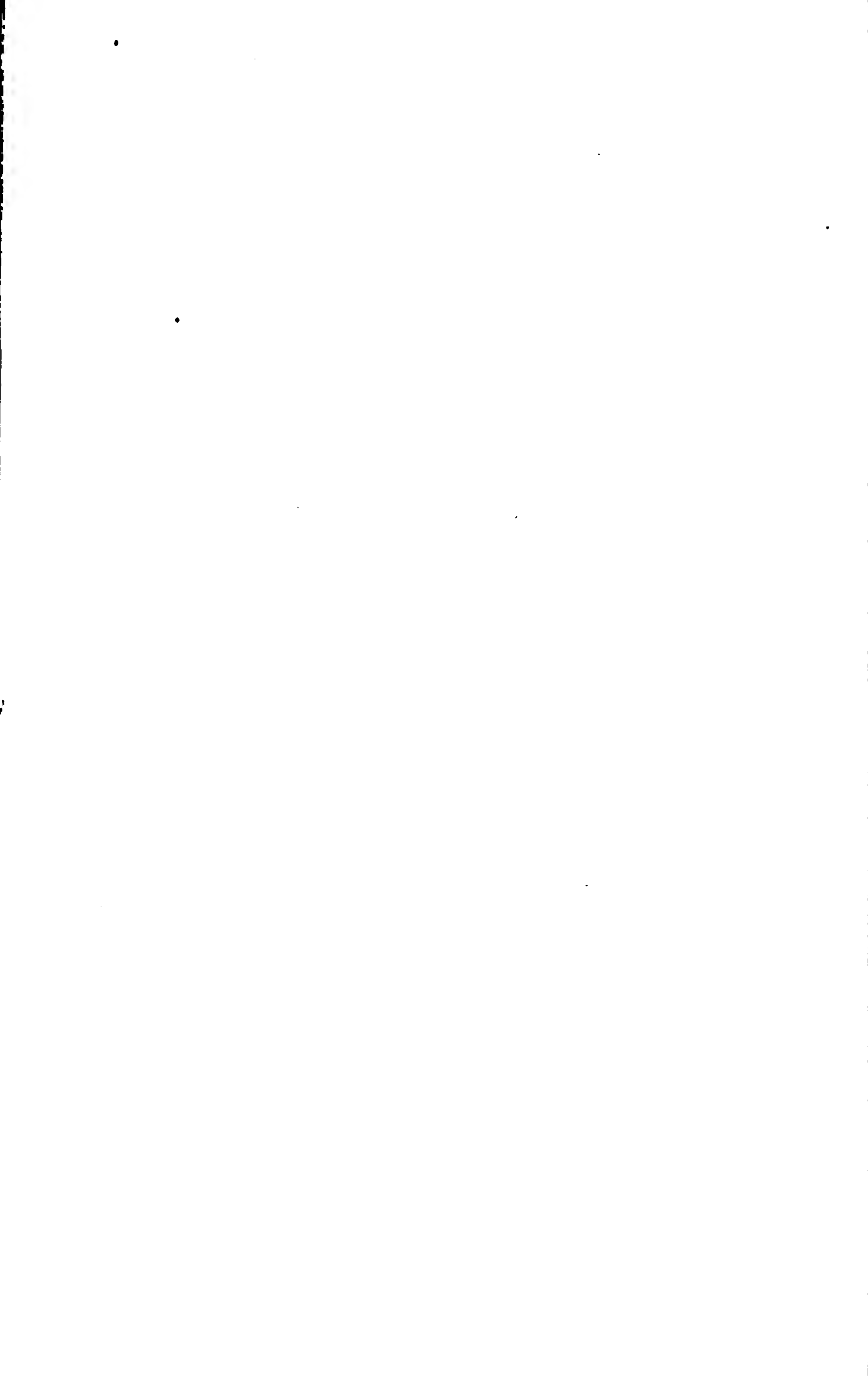
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. I. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



I. SITZUNG VOM 9. JÄNNER 1890.

Der Vorsitzende gedenkt des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie durch das am 27. December v. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes, k. k. Ministers a. D. Dr. Alfred Freiherrn v. Kremer in Wien (Ober-Döbling) erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben Ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt den eben erschienenen 56. Band der Denkschriften vor.

Die Direction des Meteorologischen Observatoriums der königl. Universität in Upsala dankt für die Betheilung mit den Publicationen der österreichischen Polarstation Jan Mayen.

Ferner sind Dankschreiben eingelangt, und zwar von Prof. Dr. A. Grünwald in Prag für die ihm zur Fortsetzung seiner spectrologischen Untersuchungen — und von Dr. Bohuslav Brauner in Prag für die ihm zur Fortsetzung seiner Arbeiten über das Tellur bewilligte Subvention.

Der Secretär legt folgende zwei Arbeiten aus dem Laboratorium für chemische Technologie an der k. k. technischen Hochschule in Brünn vor:

1. „Über eine neue allgemeine Reaction auf Stickstoff in organischen Substanzen", von Prof. Ed. Donath.
2. „Zur chemischen Zusammensetzung von *Molimia coerulea* (Mönch.) vom Königsberg bei Raibl", von G. Hattensaur.

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrer-Bildungsanstalt in Linz übersendet eine vorläufige Mittheilung über neue Gallmilben.

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Prof. J. Stefan überreicht eine Mittheilung: „Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern."

Herr Dr. James Moser überreicht zwei Arbeiten aus dem physikal.-chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien, und zwar:

1. „Elektrische Schwingungen in luftverdünnten Räumen ohne Elektroden."
2. „Über die Leitungsfähigkeit des Vacuums."

Elektrische Schwingungen in luftverdünnten Räumen ohne Elektroden

von

Dr. James Moser.

Aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium
der k. k. Universität in Wien.

Herr Hertz hat den Anschauungen der Herren Heaviside und Poynting, dass die elektrischen Schwingungen in einen Draht von der Oberfläche aus eindringen, und zwar um so tiefer, je langsamer, um so weniger tief, je schneller sie sind, in einer neueren Arbeit[1] experimentellen Ausdruck gegeben.

Er construirte das Modell eines Drahtes, indem er einen Käfig bildete aus 24 Drähten, welche zwischen zwei kreisförmigen Zinkscheiben gespannt, die Oberfläche vorstellten, während in der Mitte eine durch eine Funkenstrecke unterbrochene Kupferstange die Axe des Drahtes repräsentirte. Herr Hertz zeigte, dass, wenn er durch dieses Modell eine elektrische Schwingung leitete, in der Axe keine Funken auftraten.

Obige Anschauung und obiger Versuch veranlasste mich zu folgendem Experimente, bei welchem luftverdünnte Räume ohne jedes Metall, ohne alle Elektroden mir als Leiter dienen, in welchen elektrische Schwingungen stattfinden.

Dass isolirte Vacuumröhren in der Nähe eines arbeitenden Inductoriums leuchten, wird oft beobachtet sein. Nach allen Beschreibungen indessen waren hiebei die Röhren mit Elektroden versehen, welche entweder die Glaswand durchsetzen: Geissler-Röhren, oder mit Elektroden, welche nur aussen aufliegen: Gassiot-Röhren. Nicht aber konnte ich in der Literatur den

[1] Hertz, Wied. Ann. 37. 395. Juliheft 1889.

scheinbar nahe liegenden Versuch finden, eine evacuirte Röhre ohne jede Metall- oder sonstige Elektrode in der Nähe des Entladungsfunkens des Inductoriums zum Leuchten zu bringen. Und doch erleichtert die Eliminirung der Elektroden die Beantwortung mancher physikalischer Fragen.

Bei meinem in Rede stehenden Experimente umgab ich eine etwa 40 *cm* lange, 3 *mm* weite, evacuirte und beiderseitig geschlossene Glasröhre mit einer anderen, welche etwas länger und 10 *mm* weit war. Diese äussere Röhre ist am einen Ende geschlossen, am anderen Ende mit der Geissler-Pumpe verbunden.

Die innere Röhre ist constant evacuirt und leuchtet in der Nähe des Inductoriums in hellblauer Farbe ohne Schichtung. Wird jetzt auch die Mantelröhre evacuirt, wobei die Verdünnung im inneren Rohre, das allseitig abgeschlossen ist, constant bleibt, so zeigt sich Folgendes:

1. Ist der Druck in der äusseren Röhre der gewöhnliche Atmosphärendruck, so leuchtet die innere Röhre in der Nähe des Inductionsfunkens wie immer hellblau.

2. Sinkt der Druck in der Mantelröhre bis auf 1 *mm* Hg, so wird die Luft in ihr leitend und leuchtet mit dunkelrother Farbe. Jetzt offenbart sich die Schirmwirkung — die innere Röhre wird dunkel. Das Phänomen 1. hat sich also umgekehrt.

Die Schlüsse, welche sich hieraus für die Leitfähigkeit des Vacuums ergeben, sollen in einer gleich folgenden Mittheilung gezogen werden.

Über die Leitungsfähigkeit des Vacuums

von

Dr. James Moser.

Aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium
der k. k. Universität in Wien.

In meiner vorangehenden Mittheilung hatte ich Experimente mit einer geschlossenen Vacuumröhre beschrieben, die sich in einem Mantelrohr befand, in welchem die Luftverdünnung variirt wurde.

Das Röhrensystem befand sich in der Nähe eines thätigen Inductoriums, der Quelle elektrischer Oscillationen.

Wenn dann 1. in dem Mantelrohr Atmosphärendruck herrschte, so leuchtete das innere Rohr hellblau, das äussere Rohr war dunkel.

Die Erscheinung kehrte sich aber 2. um, sobald das äussere Rohr genügend evacuirt wurde. Dann war das Innenrohr dunkel, das Mantelrohr leitend und mit rother Farbe leuchtend.

Es liegt die Frage vor: Was geschieht bei noch weiterer Verdünnung der Luft des Mantelrohrs?

Bekanntlich setzt in Geissler-Röhren mit Elektroden die Entladung bei extremer Verdünnung aus. Dieses Ausbleiben ist vielfach discutirt, von der einen Seite der Isolation durch das Vacuum, von der anderen Seite dem Übergangswiderstand an den Elektroden zugeschrieben worden. Zwischen beiden Alternativen zu entscheiden, sind wir jetzt leicht in der Lage, da bei meinen Versuchen Elektroden überhaupt nicht vorhanden sind, von einem Übergangswiderstand nicht die Rede sein kann.

Also es zeigte sich, dass mit abnehmender Dichte,

3. bei noch weiterer Verdünnung die äussere Röhre wieder dunkel wird und die innere leuchtet, so dass für das Auge dieses dritte Stadium dem ersten Stadium gleicht.

Das vollkommenere Vacuum übt also keine Schirmwirkung aus, es hat die Leitfähigkeit für den elektrischen Strom verloren.

II. SITZUNG VOM 16. JÄNNER 1890.

Das Präsidium des Niederösterreichischen Gewerbe-Vereines in Wien ladet die kaiserliche Akademie zur Theilnahme an dem Jubiläum des fünfzigjährigen Bestandes dieses Vereines ein, welches am 28. Februar d. J. stattfinden wird.

Das Präsidium der Physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg in Preussen übermittelt die Einladung zu der am 22. Februar d. J. stattfindenden Feier des hundertjährigen Bestehens dieser Gesellschaft.

Herr Prof. W. F. Loebisch in Innsbruck übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Herrn Dr. Paul Mohr: „Über die Einwirkung von Anilin auf Benzolhexachlorid".

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Stereochemische Studien". I.

Der Vorsitzende Herr Hofrath Prof. J. Stefan überreicht eine zweite Mittheilung: „Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern".

Herr Prof. Dr. Franz Toula überreicht seinen Bericht über die im Auftrage der akademischen Boué-Stiftungs-Commission ausgeführten geologischen Untersuchungen im östlichen Balkan und in den angrenzenden Gebieten.

Über die Ellipse vom kleinsten Umfange durch drei gegebene Punkte

von

Victor v. Dantscher.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. December 1889.)

Erster Abschnitt.

Das Problem, die Ellipse vom kleinsten Umfange zu bestimmen, welche durch drei gegebene Punkte gelegt werden kann, ist meines Wissens noch niemals untersucht worden, bietet aber, wie mir scheint, doch so viel Interesse, dass es sich verlohnt, die Lösung desselben in Angriff zu nehmen.

Zunächst wird es sich darum handeln, eine geeignete analytische Darstellung der zweifachen Mannigfaltigkeit von Ellipsen zu geben, welche durch die drei gegebenen Punkte A, B, C (die ein eigentliches Dreieck bilden sollen) hindurchgehen. Ein Kegelschnitt, welcher durch die Punkte A, B, C hindurchgeht, ist vollkommen bestimmt, wenn ausserdem sein Mittelpunkt M gegeben ist, ausgenommen den besonderen Fall, dass M in einen der drei Halbirungspunkte A', B', C' der Strecken BC, CA, AB fällt.

Wählt man den Punkt C zum Anfangspunkte eines Systems von Parallelcoordinaten, dessen positive x-Axe die Richtung CB und dessen positive y-Axe die Richtung CA hat, so sind $CB = \alpha$ und $CA = \beta$ positive Strecken. Bezeichnet man die Coordinaten des Punktes M mit ξ und η, so ist

$$2\eta(2\eta-\beta)x^2 - 2(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)xy + 2\xi(2\xi-\alpha)y^2$$
$$-2\alpha\eta(2\eta-\beta)x - 2\beta\xi(2\xi-\alpha)y = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung des Kegelschnittes.

Damit derselbe eine Ellipse sei, muss

$$(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)(2\beta\xi+2\alpha\eta-\alpha\beta)>0 \qquad 2)$$

sein, d. h. M ein Punkt des Gebietes $\mathfrak{J}$ sein, welches aus dem Inneren des Dreieckes $A'B'C'$ und seiner Scheitelwinkel besteht.[1]

Der Kegelschnitt zerfällt in ein Linienpaar, wenn

$$\xi\eta(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)(2\beta\xi+2\alpha\eta-\alpha\beta)=0$$

ist, d. h. M auf einer der sechs Geraden AB, BC, CA, $A'B'$, $C'A'$, $A'B'$ liegt.

Fällt aber der Mittelpunkt M in einen der drei Punkte A', B', C', so verschwinden sämmtliche Coëfficienten der Gleichung 1); es gibt dann eben noch einfach unendlich viele Kegelschnitte durch A, B, C, deren Mittelpunkte nach A', B' oder C' fallen.

Dieser Fall möge indess vorerst ausgeschlossen bleiben.

M wird im Folgenden auf das Gebiet $\mathfrak{J}$ beschränkt und die durch A, B, C und M dann bestimmte Ellipse mit $E_{\xi|\eta}$ bezeichnet.

Setzt man:

$$P=-\frac{2\xi\eta(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta)}{(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)(2\beta\xi+2\alpha\eta-\alpha\beta)}$$

$$Q=-\xi(2\xi-\alpha)-\eta(2\eta-\beta)-(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)\cos\omega$$

$$R=Q^2-(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)(2\beta\xi+2\alpha\eta-\alpha\beta)\sin^2\omega\,,$$

$$(\omega=\widehat{xy})$$

so sind die Quadrate $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Halbaxen von $E_{\xi|\eta}$ gegeben durch die Formeln:

$$\mathfrak{A}=P(Q+\sqrt{R}) \qquad \mathfrak{B}=P(Q-\sqrt{R})\,. \qquad 3)$$

Gibt man in denselben der $\sqrt{R}$ denjenigen ihrer beiden Werthe, dessen Vorzeichen mit dem von P übereinstimmt, so ist $\mathfrak{A}>\mathfrak{B}$, sofern R von Null verschieden ist.

Der Umfang von $E_{\xi|\eta}$, der als Function von ξ und η mit $4g(\xi,\eta)$ bezeichnet wird, ist somit dargestellt durch den Ausdruck:

---

[1] Vergl. J. Steiner, Teoremi relativi alle coniche inscritte e circonscritte. Ges. Werke, Bd. II, S. 329.

$$4\mathfrak{g}(\xi, \eta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}\, d\varphi, \qquad 4)$$

wobei der Quadratwurzel ihr positiver Werth ertheilt werden soll.

Das Problem ist damit darauf zurückgeführt, die untere Grenze der Function $\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ im Gebiete $\mathfrak{J}$ zu ermitteln.

Nach einem von H. Weierstrass in den Vorlesungen über Functionentheorie mitgetheilten Satze nimmt eine in einem endlichen Bereiche T reelle und stetige Function $\mathfrak{G}(\xi, \eta)$ ihre untere Grenze mindestens an einer Stelle $\xi_1 | \eta_1$ von T als Functionswerth an.

Eine solche Stelle $\xi_1 | \eta_1$ ist offenbar entweder eine Stelle in der Begrenzung von T oder es ist $\mathfrak{G}(\xi_1, \eta_1)$ ein Minimum.

Um diesen Satz hier anwenden zu können, braucht man nur zu bemerken, dass aus dem unendlichen Gebiete $\mathfrak{J}$ leicht ein endliches Gebiet $\overline{\mathfrak{J}}$ so abgesondert werden kann, dass die Function $\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ ihre untere Grenze sicher nur an einer Stelle von $\overline{\mathfrak{J}}$ erreichen kann.

Die grosse Halbaxe einer Ellipse $E_{\xi|\eta}$ ist nämlich sicher nicht kleiner als die grösste der Strecken MA, MB, MC.

Ist nun z. B. $\mathfrak{M}$, mit den Coordinaten $\xi = \frac{\alpha}{3}$, $\eta = \frac{\beta}{3}$, der Schwerpunkt des Dreieckes ABC und $\mathfrak{r}$ die grosse Halbaxe der Ellipse $E_{\frac{\alpha}{3}|\frac{\beta}{3}}$, so ist $\frac{\pi}{2}\mathfrak{r} \geqq \mathfrak{g}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$.

Schlägt man also aus dem Centrum $\mathfrak{M}$ mit dem Radius $2\mathfrak{r}$ den Kreis $\mathfrak{K}$, so kann man behaupten, dass für jeden Punkt M auf und ausserhalb $\mathfrak{K}$ $\mathfrak{g}(\xi, \eta) > \mathfrak{g}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$ ist. Denn für jeden solchen Punkt M ist $|\sqrt{\mathfrak{A}}| > 2\mathfrak{r}$ und somit

$$\mathfrak{g}(\xi, \eta) > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi}\, d\varphi = |\sqrt{\mathfrak{A}}| > 2\mathfrak{r} > \mathfrak{g}\left(\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}\right).$$

Der Theil von $\mathfrak{J}$ also, welcher im Innern von $\mathfrak{K}$ liegt, ist ein solches Gebiet $\overline{\mathfrak{J}}$.

Schliesst man von der Begrenzung des Gebietes $\overline{\mathfrak{J}}$ die Punkte A', B', C' aus, so kann man auch behaupten, dass die Function

$\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ ihre untere Grenze sicher nicht auf der Begrenzung von $\bar{\mathfrak{J}}$ erreicht, weil bei der Annäherung von M an einen Punkt der Begrenzung, welcher den Geraden $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ angehört, $\mathfrak{A}$ unendlich gross wird, während $\mathfrak{B}$ sich einer leicht anzugebenden positiven Grenze nähert, nämlich dem Quadrate der halben Höhe des Dreieckes durch den Scheitel C, beziehungsweise A, B.

Man wird daher jetzt darauf ausgehen, die Minima von $\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ im Gebiete $\bar{\mathfrak{J}}$ aufzusuchen. Zeigt es sich dabei, dass überhaupt nur **ein** Minimum existirt, so gehört dasselbe selbstverständlich dem Gebiete $\bar{\mathfrak{J}}$ an und ist mit ihm zugleich die untere Grenze von $\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ **gefunden**.

Die Punkte A', B', C' als Lagen von M erfordern eine besondere Untersuchung.

Damit die Function $\mathfrak{g}(\xi, \eta)$ an einer Stelle $\xi|\eta$, an welcher R von 0 verschieden ist, ein Minimum habe, müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$2\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \xi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}} = 0 \qquad 5)$$

$$2\frac{\partial \mathfrak{g}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}} = 0 \qquad 6)$$

und damit offenbar auch die Bedingung:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \xi} = 0. \qquad 7)$$

Setzt man zur Abkürzung vorübergehend:

$$(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)(2\beta\xi+2\alpha\eta-\alpha\beta) = L \qquad 2\xi\eta(\beta\xi+\alpha\eta-\alpha\beta) = N,$$

so ist $P = -\frac{N}{L}$ und ergibt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen 3) nach leichten Reductionen:

$$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \xi} = \frac{P\sin^2\omega}{L\sqrt{R}} \begin{vmatrix} N & Q & 2L \\ \frac{\partial N}{\partial \xi} & \frac{\partial Q}{\partial \xi} & \frac{\partial L}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} & \frac{\partial Q}{\partial \eta} & \frac{\partial L}{\partial \eta} \end{vmatrix}.$$

Indem man in diese Determinante für L, N und Q ihre Ausdrücke in ξ und η einführt und den in $\mathfrak{J}$ von Null verschiedenen Factor 4 L absondert, erhält man aus 7) somit die Bedingung:

$$2\beta\xi^3+2(2\alpha-\beta\cos\omega)\xi^2\eta+2(\alpha\cos\omega-2\beta)\xi\eta^2-2\alpha\eta^3$$
$$-3\alpha\beta\xi^2-2(\alpha^2-\beta^2)\xi\eta+3\alpha\beta\eta^2+\alpha^2\beta\xi-\alpha\beta^2\eta=0, \qquad 8)$$

d. h. also: der Mittelpunkt M der gesuchten Ellipse, deren Umfang ein Minimum sein soll, liegt auf einer bestimmten Curve dritter Ordnung, welche mit $\mathfrak{C}$ bezeichnet werden mag.

Es ist leicht zu constatiren, dass $\mathfrak{C}$ ausser durch die Punkte A, B, C auch durch die Punkte A', B', C' hindurchgeht, in welchen ihre Tangente senkrecht auf BC, CA, AB steht, ferner durch den Schwerpunkt und Höhenschnittpunkt des Dreieckes A, B, C; dass $\mathfrak{C}$ auch durch den Mittelpunkt des Kreises durch A, B, C hindurchgeht, für welchen $R=0$ ist, wird sich sofort ergeben.

Um nämlich die eigentliche geometrische Bedeutung der Bedingung 8) für das vorliegende Problem zu erkennen, ist es nothwendig, auch die Ellipse $\mathfrak{E}_{\xi|\eta}$ zu betrachten, welche aus dem Mittelpunkte M dem Dreiecke ABC eingeschrieben ist.

Die Gleichung derselben ist:

$$\mathfrak{b}_{11}\xi^2+2\mathfrak{b}_{12}\xi\eta+\mathfrak{b}_{22}\eta^2+2\mathfrak{b}_{13}\xi+2\mathfrak{b}_{23}\eta+\mathfrak{b}_{33}=0,$$

wenn gesetzt wird:

$$\mathfrak{b}_{11}=\eta^2 \qquad \mathfrak{b}_{12}=-\xi\eta+\beta\xi+\alpha\eta-\frac{1}{2}\alpha\beta \qquad \mathfrak{b}_{22}=\xi^2$$
$$\mathfrak{b}_{13}=-\eta\left(\beta\xi+\alpha\eta-\frac{1}{2}\alpha\beta\right) \qquad \mathfrak{b}_{23}=-\xi\left(\beta\xi+\alpha\eta-\frac{1}{2}\alpha\beta\right)$$
$$\mathfrak{b}_{33}=\left(\beta\xi+\alpha\eta-\frac{1}{2}\alpha\beta\right)^2. \qquad 9)$$

Dabei ist $\mathfrak{b}_{11}\mathfrak{b}_{22}-\mathfrak{b}_{12}^2=\frac{1}{16}L$; $\mathfrak{E}_{\xi|\eta}$ ist daher zugleich mit $E_{\xi|\eta}$ Ellipse oder Hyperbel. Vergl. Steiner, l. c. p. 330.

Die Tangenten der Winkel, welche die Richtungen der Axen von $\mathfrak{E}_{\xi|\eta}$ mit der x-Axe bilden, sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$t^2-\left[2\cot g\,\omega-\frac{\mathfrak{b}_{11}-\mathfrak{b}_{22}}{\sin\omega(\mathfrak{b}_{11}\cos\omega-\mathfrak{b}_{12})}\right]t-1=0.$$

Die entsprechenden Richtungstangenten für die Axen von $E_{\xi|\eta}$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$t^2 - \left[2\cot g\ \omega - \frac{b_{11}-b_{22}}{\sin\omega(b_{11}\cos\omega - b_{12})}\right] t - 1 = 0,$$

wenn gesetzt wird:

$$b_{11} = 2\eta(2\eta-\beta) \qquad b_{12} = -(2\xi-\alpha)(2\eta-\beta)$$
$$b_{22} = 2\xi(2\xi-\alpha).$$

Ist somit

$$(b_{11}-b_{22})(\mathfrak{b}_{11}\cos\omega - \mathfrak{b}_{12}) - (\mathfrak{b}_{11}-\mathfrak{b}_{22})(b_{11}\cos\omega - b_{12}) = 0,$$

so haben $E_{\xi|\eta}$ und $\mathfrak{E}_{\xi|\eta}$ zusammenfallende Axenrichtung; dies zeigt sich aber in der That für jeden Punkt von $\mathfrak{C}$, wenn man für die Grössen b und $\mathfrak{b}$ ihre Ausdrücke in ξ und η einführt. Die Curve $\mathfrak{C}$ geht daher auch durch den Mittelpunkt des dem Dreiecke ABC umgeschriebenen Kreises, sowie durch die Mittelpunkte der demselben Dreiecke eingeschriebenen Kreise.

Die geometrische Bedeutung der Bedingung 8) lässt sich demnach so aussprechen:

I) Der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse muss so liegen, dass die aus ihm dem Dreiecke ABC umgeschriebene und die eingeschriebene Ellipse zusammenfallende Axenrichtungen haben.

Was nun den weiteren Fortgang der Untersuchung betrifft, so könnte man jetzt daran denken, aus den Gleichungen

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = 2PQ \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{B} = P^2(Q^2-R)$$

und der Gleichung 8) die Grössen ξ und η zu eliminiren; dadurch ergäbe sich eine algebraische Gleichung $G(\mathfrak{A},\mathfrak{B}) = 0$ und man hätte die Aufgabe darauf zurückgeführt, die untere Grenze des Integrals $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi + \mathfrak{B}\sin^2\varphi}\, d\varphi$ zu bestimmen, wenn die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Bedingung $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) = 0$ genügen.

Ich habe indessen diesen Weg rechnend nicht verfolgt, sondern vorerst, gewissermassen zur Orientirung, die leichtere, umgekehrte Aufgabe studirt; ich suchte nämlich auf einer gegebenen Ellipse E die sämmtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ zu bestimmen, für welche E die Ellipse vom kleinsten Umfange ist.

Wenn die vollständige Lösung dieser Aufgabe gelungen ist, so ergibt sich daraus für das ursprüngliche Problem ein neuer Weg; es handelt sich dann offenbar nur darum, eine Ellipse E zu finden, welche ein Dreieck $P'P''P'''$ enthält, das mit dem gegebenen Dreiecke ABC congruent ist.

Kann man nachweisen, dass es eine und nur eine solche Ellipse gibt, so ist dieselbe die gesuchte Ellipse vom kleinsten Umfange, welche durch A, B, C gelegt werden kann.

Ich will daher meine Ergebnisse auch in dieser Aufeinanderfolge zur Darstellung bringen.

Vorerst soll aber noch gezeigt werden, dass der Mittelpunkt M der gesuchten Ellipse niemals in einen der Punkte A', B', C' fallen kann. Es genügt dies für den Punkt C' nachzuweisen.

Wenn nämlich auch für $\xi = \frac{\alpha}{2}$, $\eta = \frac{\beta}{2}$ die Coëfficienten der Gleichung 1) sämmtlich verschwinden, so zeigt sich doch, dass jeder bestimmten Richtung, in welcher der Punkt M sich dem Punkte C' nähert, auch ein bestimmter Kegelschnitt als Grenzlage entspricht, und dass insbesonders bei der Annäherung von M an C' aus dem Innern von $\mathfrak{J}$ der entsprechende Kegelschnitt stets eine Ellipse ist.

Um die sämmtlichen Kegelschnitte durch A, B, C, deren Mittelpunkt M nach C' fällt und zugleich ihre Nachbarn darzustellen, setze man:

$$\xi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\zeta}{2} \qquad \eta = \frac{\beta}{2} + \frac{\lambda\zeta}{2},$$

wobei ζ eine reelle Veränderliche, λ einen reellen Parameter bedeutet.

Aus der Gleichung 1) erhält man dann nach Absonderung des Factors ζ die Gleichung

$$\lambda(\lambda\zeta+\beta)x^2-2\lambda\zeta xy+(\zeta+\alpha)y^2-\alpha\lambda(\lambda\zeta+\beta)x-\beta(\zeta+\alpha)y=0 \ldots 10)$$

für den betrachteten Kegelschnitt.

Damit derselbe für $\zeta=0$ und hinreichend kleine Werthe von ζ eine Ellipse sei, muss ersichtlich $\lambda > 0$ sein, die Annäherung von M an C' also aus dem Inneren von $\mathfrak{J}$ her erfolgen.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} L &= \lambda[(\alpha\lambda+\beta)\zeta+\alpha\beta] \\ P=\frac{(\alpha\lambda+\beta)(\zeta+\alpha)(\lambda\zeta+\beta)}{8L} \qquad Q &= \lambda(\lambda\zeta+\beta)+\zeta+\alpha+2\lambda\zeta\cos\omega \\ R &= Q^2-4L\sin^2\omega, \end{aligned}\right\} \quad 11)$$

so werden die Quadrate $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Halbaxen der Ellipse, welche für positive Werthe von λ durch die Gleichung 10) dargestellt wird, gegeben durch die Ausdrücke

$$\mathfrak{A} = P(Q+\sqrt{R}) \qquad \mathfrak{B} = P(Q-\sqrt{R}), \qquad 12)$$

in welchen der $\sqrt{R}$ — soferne nicht gerade $R = 0$ ist — derjenige ihrer beiden Werthe gegeben werden soll, dessen Vorzeichen mit dem von P übereinstimmt; und der Umfang, der als Function von λ und ζ mit $4\mathfrak{g}(\lambda,\zeta)$ bezeichnet sein mag, durch

$$4\mathfrak{g}(\lambda,\zeta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi+\mathfrak{B}\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

wobei der Quadratwurzel wieder ihr positiver Werth ertheilt werden soll.

Es ist nun zu zeigen, dass $\mathfrak{g}(\lambda_0, 0)$ für keinen positiven Werth λ_0 ein Minimum sein kann.

Damit die Function $\mathfrak{g}(\lambda,\zeta)$ an einer Stelle $(\lambda_0, 0)$, für welche R von Null verschieden ist, ein Minimum haben könne, müssen die Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} 2\left(\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial\lambda}\right)_0 &= \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\lambda}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}} = 0 \\ 2\left(\frac{\partial\mathfrak{g}}{\partial\zeta}\right)_0 &= \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\zeta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}} \\ &\quad + \left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}} = 0, \end{aligned}\right\} \quad 13)$$

in welchen der Zeiger 0, sowie später in den Bezeichnungen P_0, Q_0, R_0 u. s. w. andeutet, dass $\lambda = \lambda_0$, $\zeta = 0$ zu setzen ist. Aus ihnen ergibt sich zur Bestimmung von λ_0 nach leicht erkenntlichen Reductionen die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \lambda}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \zeta}\right)_0 - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \zeta}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \lambda}\right)_0 =$$

$$-\frac{4P_0 \sin^2 \omega}{\sqrt{R_0}} \begin{vmatrix} -P_0 & Q_0 & 2L_0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)_0 & \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_0 & \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right)_0 & \left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)_0 & \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta}\right)_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Berechnet man die Ausdrücke

$$P_0 = \frac{\alpha\lambda_0 + \beta}{8\lambda_0} \qquad Q_0 = \beta\lambda_0 + \alpha \qquad L_0 = \alpha\beta\lambda_0$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \lambda}\right)_0 = -\frac{\beta}{8\lambda_0^2} \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial \lambda}\right)_0 = \beta \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_0 = \alpha\beta$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \zeta}\right)_0 = 0 \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial \zeta}\right)_0 = \lambda_0^2 + 2\lambda_0 \cos \omega + 1 \qquad \left(\frac{\partial L}{\partial \zeta}\right)_0 = \lambda_0(\alpha\lambda_0 + \beta)$$

und führt dieselben in die vorstehende Determinante ein, so erhält man nach Absonderung des von Null verschiedenen Factors λ^2_0 aus Zähler und Nenner die Gleichung:

$$\frac{\alpha\beta P_0 \sin^2 \omega}{\sqrt{R_0}} [(\beta - \alpha \cos \omega)\lambda_0 - (\alpha - \beta \cos \omega)] = 0.$$

Für λ_0 kommt also nur der Werth $\frac{\alpha - \beta \cos \omega}{\beta - \alpha \cos \omega}$ in Betracht, soferne derselbe positiv ist; dies ist der Fall, wenn $\cos \omega < 0$ [1] ist, oder wenn die beiden Ausdrücke $\alpha - \beta \cos \omega$ und $\beta - \alpha \cos \omega$, deren Summe $(\alpha + \beta)(1 - \cos \omega)$ für ein eigentliches Dreieck ABC positiv ist, beide zugleich positiv sind, also der Höhenpunkt im Inneren des Dreieckes ABC liegt.

[1] Der Fall $\cos \omega = 0$ bleibt ausgeschlossen, weil dabei $R_0 = 0$ wird.

Zugleich zeigt sich, da die Gerade $(\alpha-\beta\cos\omega)\left(\xi-\frac{\alpha}{2}\right)-(\beta-\alpha\cos\omega)\left(\eta-\frac{\beta}{2}\right)=0$ auf der Geraden AB senkrecht steht, in Übereinstimmung mit der Eigenschaft der Curve $\mathfrak{C}$ die Seite AB in C' normal zu halbiren, dass die Annäherung des Punktes M an C' in der Richtung senkrecht auf AB geschehen muss, wenn der Umfang der entsprechenden Ellipse ein Minimum sein können soll.

Es wird sich aber gleich herausstellen, dass für diesen Werth von λ_0 die Gleichungen 13) niemals beide zugleich erfüllt sein können.

Es 11) und 12) folgt nämlich:

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}\right)_0 &= \frac{\alpha\beta}{8\lambda_0^2}\left[\lambda_0^2-1+\frac{(\lambda_0^2-1)(\beta\lambda_0+\alpha)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0-\beta)\sin^2\omega}{\sqrt{R_0}}\right]\\
\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\lambda}\right)_0 &= \frac{\alpha\beta}{8\lambda_0^2}\left[\lambda_0^2-1-\frac{(\lambda_0^2-1)(\beta\lambda_0+\alpha)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0-\beta)\sin^2\omega}{\sqrt{R_0}}\right]\\
\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\zeta}\right)_0 &= \frac{\alpha\lambda_0+\beta}{8\lambda_0}\left[\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1+\frac{(\beta\lambda_0+\alpha)(\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0+\beta)\sin^2\omega}{\sqrt{R_0}}\right]\\
\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0 &= \frac{\alpha\lambda_0+\beta}{8\lambda_0}\left[\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1-\frac{(\beta\lambda_0+\alpha)(\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0+\beta)\sin^2\omega}{\sqrt{R_0}}\right].
\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Führt man nun in $R_0=Q_0^2-4L_0\sin^2\omega$ den Werth $\lambda_0=\frac{\alpha-\beta\cos\omega}{\beta-\alpha\cos\omega}$ ein, so ergibt sich

$$R_0 = \frac{(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\omega)^2\cos^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^2} = \frac{\gamma^2\cos^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^2},$$

wobei γ die absolute Länge der Seite *AB* bezeichnen soll. In den Gleichungen 14) ist daher zu setzen:

$$\frac{1}{\sqrt{R_0}} = \varepsilon\,\frac{\beta-\alpha\cos\omega}{\gamma\cos\omega},$$

wobei ε das Vorzeichen ± 1 von $\cos\omega$ bedeutet.

Berechnet man ferner die Ausdrücke

$$\lambda_0^2-1 = \frac{(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^2}$$

$$(\lambda_0^2-1)(\beta\lambda_0+\alpha)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0-\beta)\sin^2\omega = \frac{\gamma^2(\alpha^2-\beta^2)\cos\omega\sin^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^3}$$

$$\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1 = \frac{\gamma^2\sin^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^2}$$

$$\alpha\lambda_0+\beta = \frac{\gamma^2}{\beta-\alpha\cos\omega}$$

$$(\beta\lambda_0+\alpha)(\lambda_0^2+2\lambda_0\cos\omega+1)-2\lambda_0(\alpha\lambda_0+\beta)\sin^2\omega = \frac{\gamma^4\cos\omega\sin^2\omega}{(\beta-\alpha\cos\omega)^3},$$

so ergibt sich aus 14):

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}\right)_0 = \frac{1+\varepsilon}{8}\,\frac{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\omega}{(\alpha-\beta\cos\omega)^2}$$

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\lambda}\right)_0 = \frac{1-\varepsilon}{8}\,\frac{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\omega}{(\alpha-\beta\cos\omega)^2}$$

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\zeta}\right)_0 = \frac{1+\varepsilon}{8}\,\frac{\gamma^4\sin^2\omega}{(\alpha-\beta\cos\omega)(\beta-\alpha\cos\omega)^2}$$

$$\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0 = \frac{1-\varepsilon}{8}\,\frac{\gamma^4\sin^2\omega}{(\alpha-\beta\cos\omega)(\beta-\alpha\cos\omega)^2}\,.$$

Die Gleichungen 13) können somit in der That nicht beide zugleich erfüllt sein; ist $\alpha^2-\beta^2 \lessgtr 0$, so ist für $\varepsilon = +1$ $\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\lambda}\right)_0 = 0$ und $\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0 = 0$, während $\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0$ von Null verschieden sind, und umgekehrt für $\varepsilon = -1$. Im Falle $\alpha^2-\beta^2 = 0$ ist $\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\lambda}\right)_0 = 0$ und $\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\lambda}\right)_0 = 0$ für beide Werthe von ε, dagegen ist von den beiden Ableitungen $\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\zeta}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\zeta}\right)_0$ sicher eine von Null verschieden.

Der bisher ausgeschlossene Fall $R_0 = 0$, in welchem keine Entwicklung der Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und damit auch der Function $\mathfrak{g}(\lambda,\zeta)$ nach ganzen positiven Potenzen von $\lambda-\lambda_0$ und ζ möglich ist, tritt nur ein für $\cos\omega = 0$, $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\beta}$. Für $\zeta = 0$ ist nämlich $R = (\beta\lambda+\alpha)^2-4\alpha\beta\lambda\sin^2\omega$; damit die Gleichung $R = 0$ oder $\beta^2\lambda^2+2\alpha\beta\cos 2\omega\,\lambda+\alpha^2 = 0$ reelle Wurzeln habe, muss $\cos^2 2\omega-1 = 4\cos^2\omega(\cos^2\omega-1) \geqq 0$, also $\cos\omega = 0$ sein; dann aber folgt aus $R = (\beta\lambda-\alpha)^2 = 0$ $\lambda_0 = \frac{\alpha}{\beta}$, wie geometrisch von vorneherein evident ist.

Um nun auch für diesen Ausnahmefall zu zeigen, dass der Umfang des Kreises durch A, B, C kein Minimum ist, kann man die Umgebung der Stelle $\xi = \frac{\alpha}{2}$, $\eta = \frac{\beta}{2}$ in der Art darstellen, dass man $\lambda = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{l\mathfrak{z}}{\beta}$, $\zeta = \mathfrak{z}$ und somit

$$\xi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\mathfrak{z}}{2} \qquad \eta = \frac{\beta}{2} + \frac{(\alpha + l\mathfrak{z})\mathfrak{z}}{2\beta}$$

setzt, unter l eine reelle Zahl verstehend.

Während sich aber früher, wenn λ festgehalten wurde und ζ sich dem Werthe Null näherte, der Punkt M auf der Geraden $\eta - \frac{\beta}{2} = \lambda\left(\xi - \frac{\alpha}{2}\right)$ dem Punkte C' sich näherte, erfolgt jetzt, wenn $\mathfrak{z}$ sich dem Werthe Null nähert, die Annäherung auf einer Parabel, welche die Strecke AB in C' normal halbirt, deren Axe parallel zur y-Axe liegt und deren Scheitel in den Punkt $\xi = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{4l}$, $\eta = \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha^2}{8l\beta}$ fällt, wie man erkennt, wenn man aus den obigen Gleichungen für ξ und η die Veränderliche $\mathfrak{z}$ eliminirt.

Die Function $\mathfrak{g}(\lambda, \zeta)$ geht jetzt über in eine Function $\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z})$ von $\mathfrak{z}$ allein. Wäre der Kreis durch A, B, C ein Minimum, so müsste offenbar $\bar{\mathfrak{g}}(0)$ für beliebige Werthe von l ein Minimum sein; das ist aber eben nicht der Fall.

Es ist nämlich:

$$L = \frac{(l\mathfrak{z} + \alpha)[l\alpha\mathfrak{z}^2 + (\alpha^2 + \beta^2)\mathfrak{z} + \alpha\beta^2]}{\beta^2}$$

$$P = \frac{(\mathfrak{z} + \alpha)(l\alpha\mathfrak{z} + \alpha^2 + \beta^2)(l\mathfrak{z}^2 + \alpha\mathfrak{z} + \beta^2)}{8\beta^2 L}$$

$$Q = \frac{(l\mathfrak{z} + \alpha)(l\mathfrak{z}^2 + \alpha\mathfrak{z} + \beta^2) + \beta^2(\mathfrak{z} + \alpha)}{\beta^2}$$

und, wenn $\sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 + l\beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} = \mu$ gesetzt wird,

$$R = \frac{\mathfrak{z}^2}{\beta^4}[\mu^2 + 4l\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + l\beta^2)\mathfrak{z} + 2l^2(3\alpha^2 + \beta^2 + l\beta^2)\mathfrak{z}^2 + 4l^3\alpha\mathfrak{z}^3 + l^4\mathfrak{z}^4].$$

Die $\sqrt{R}$ und damit auch die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und die Function $\bar{\mathfrak{g}}(\mathfrak{z})$ können daher nach ganzen positiven Potenzen von $\mathfrak{z}$ entwickelt werden. Gibt man der Quadratwurzel μ das Vorzeichen von $\mathfrak{z}$, so ist, da P für kleine Werthe von $\mathfrak{z}$ positiv ist, die Entwicklung von der Form:

$$\sqrt{R} = \frac{\mu}{\beta^2}\mathfrak{z} + \frac{2l\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + l\beta^2)}{\beta^2\mu}\mathfrak{z}^2 + \ldots$$

Die nothwendige Bedingung dafür, dass $\mathfrak{g}(0)$ ein Minimum sei, ist, da $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{4}$ und damit auch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}}$$

wird,

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 + \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = 0.$$

Berechnet man aber die dem Werthe $\mathfrak{z} = 0$ entsprechenden Ausdrücke:

$$P_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2}{8\alpha} \qquad Q_0 = 2\alpha \qquad R_0 = 0$$

$$\left(\frac{dP}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = -\frac{l\beta^2}{8\alpha^2} \qquad \left(\frac{dQ}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = \frac{\alpha^2+\beta^2+l\beta^2}{\beta^2} \qquad \left(\frac{d\sqrt{R}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = \frac{\mu}{\beta^2},$$

so ergibt sich:

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = \frac{1}{8\alpha\beta^2}\left[(\alpha^2+\beta^2)^2 + l\beta^2(\alpha^2-\beta^2) + \mu(\alpha^2+\beta^2)\right]$$

$$\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = \frac{1}{8\alpha\beta^2}\left[(\alpha^2+\beta^2)^2 + l\beta^2(\alpha^2-\beta^2) - \mu(\alpha^2+\beta^2)\right].$$

Also ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 + \left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\mathfrak{z}}\right)_0 = \frac{1}{4\alpha\beta^2}\left[(\alpha^2+\beta^2)^2 + l\beta^2(\alpha^2-\beta^2)\right]$$

für beliebige Werthe von l sicher nicht gleich Null.

Damit ist vollständig der für das Folgende nothwendige Hilfssatz bewiesen:

Der Umfang einer Ellipse durch A, B, C, deren Mittelpunkt in einen der drei Halbirungspunkte A', B', C' der Seiten BC, CA, AB eines eigentlichen Dreieckes ABC fällt, ist niemals ein Minimum. II)

Endlich sei noch einer anderen Art die zweifache Mannigfaltigkeit der Ellipsen darzustellen, welche durch drei gegebene Punkte A, B, C hindurchgehen, Erwähnung gethan.

Ein Kegelschnitt durch A, B, C ist nämlich vollkommen bestimmt, wenn von den drei Polen A, B, Γ der Sehnen BC, CA, AB einer, z. B. Γ, gegeben ist. Sind $\xi_3 | \eta_3$ in dem der Gleichung 1) zu Grunde gelegten Coordinatensysteme die Coordinaten des Punktes Γ, so ist die Gleichung des durch A, B, C und Γ bestimmten Kegelschnittes die folgende:

$$\beta\eta_3 x^2 + \alpha\beta xy + \alpha\xi_3 y^2 - \alpha\beta\eta_3 x - \alpha\beta\xi_3 y = 0;$$

damit derselbe eine Ellipse sei, muss

$$4\xi_3\eta_3 - \alpha\beta > 0$$

sein, d. h. also: Γ muss im Inneren der Hyperbel $\mathfrak{H}_3$ liegen, deren Mittelpunkt der Punkt C, deren Asymptoten die Geraden CA und CB sind, und welche die Gerade AB im Punkte C' berührt.

Nach dem Pascal'schen Satze hängen die Pole A, B, Γ in der Art zusammen, dass die drei Schnittpunkte

$$(AB, \mathrm{AB}),\ (BC, \mathrm{B\Gamma}),\ (CA, \Gamma\mathrm{A})$$

auf einer Geraden liegen.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{H}_1$ die Hyperbel aus dem Mittelpunkte A, deren Asymptoten die Geraden AB und AC sind, und welche die Gerade BC im Punkte A' berührt, und mit $\mathfrak{H}_2$ die Hyperbel aus dem Mittelpunkte B, deren Asymptoten die Geraden BC und CA sind, und welche die Gerade CA im Punkte B' berührt, so beschreiben die Pole A, B, Γ zufolge dieses Zusammenhanges zugleich die Hyperbeln $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$, beziehungsweise deren Inneres oder Äusseres.

Die vorstehende Gleichung der durch A, B, C und Γ (im Inneren von $\mathfrak{H}_3$) bestimmten Ellipse ist in den Veränderlichen ξ_3, η_3 linear. Man wäre daher vielleicht geneigt, diese Form der Darstellung der früheren, bei welcher die Coëfficienten in den Veränderlichen ξ, η quadratisch sind, vorzuziehen, zumal sie im Endlichen nirgends versagt; allein, so weit meine Erfahrungen reichen, würde man daran nicht gut thun. Fürs Erste ist ebenfalls eine Specialuntersuchung erforderlich, wie oben für die Punkte A', B', C', nur bezieht sie sich dann auf die unendlich fernen Punkte A, B, Γ, und zweitens gestaltet sich die Untersuchung des zweiten Differentials des Umfanges der Ellipse nach der ersten

Methode einfacher, weshalb ich sie auch im Folgenden beibehalten werde.

Zweiter Abschnitt.

Bestimmung der sämmtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ auf einer gegebenen Ellipse E, für welche E die Ellipse vom kleinsten Umfange ist.

Sind a und $b \leqq a$ die Halbaxen, so ist bei bekannter Anordnung des Coordinatensystems

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \qquad 1)$$

die Gleichung der gegebenen Ellipse E.

P', P'', P''' mit den Coordinaten $x'|y'$, $x''|y''$, $x'''|y'''$ sind drei von einander verschiedene Punkte auf E.

Zur Darstellung der zweifachen Mannigfaltigkeit von Ellipsen, welche durch sie hindurchgehen, werden die Coordinaten ξ, η des Mittelpunktes M einer solchen Ellipse benützt, welche dann als $E_{\xi|\eta}$ bezeichnet wird. Sind Π', Π'', Π''' die Halbirungspunkte der Strecken $P''P'''$, $P'''P'$, $P'P''$, so ist M auf das Innere des Dreieckes $\Pi'\Pi''\Pi'''$ und seiner Scheitelwinkel zu beschränken.

Die Gleichung der Ellipse $E_{\xi|\eta}$ ist:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ x'^2 & x'y' & y'^2 & x' & y' & 1 \\ x''^2 & x''y'' & y''^2 & x'' & y'' & 1 \\ x'''^2 & x'''y''' & y'''^2 & x''' & y''' & 1 \\ 2\xi & \eta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 2\eta & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad 2)$$

Zur Abkürzung wird dieselbe nach Absonderung allfälliger Proportionalitätsfactoren der Coëfficienten in der Form

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

geschrieben.

Die Quadrate $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A}$ der Halbaxen von $E_{\xi|\eta}$ werden unter der Bezeichnung

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \; (a_{ik} = a_{ki}), \quad A_{ik} = A_{ki} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}}$$

gegeben durch die Formeln:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\frac{A}{2A_{33}^2}\left[a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}\right] \\ \mathfrak{B} &= -\frac{A}{2A_{33}^2}\left[a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

in welchen der Quadratwurzel derjenige ihrer beiden Werthe zu ertheilen ist, dessen Vorzeichen mit dem von $-A$ übereinstimmt, wenn sie nicht gerade gleich Null ist.

Der Umfang von $E_{\xi|\eta}$ wird dargestellt durch die Function

$$4\mathfrak{f}(\xi,\eta) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi+\mathfrak{B}\sin^2\varphi}\, d\varphi, \tag{4}$$

wobei die Quadratwurzel ihren positiven Werth erhalten soll.

Nun ist die Frage zu beantworten:

Wie müssen die Punkte P', P'', P''' auf E gewählt werden, damit $\mathfrak{f}(0,0)$ die untere Grenze der Function $\mathfrak{f}(\xi,\eta)$ für das angegebene Gebiet von M werde, welches, wie im I. Abschnitte gezeigt wurde, als ein endliches vorausgesetzt werden kann?

Zunächst wird man nach Früherem sich fragen:

Wie müssen die Punkte P', P'', P''' auf E gewählt werden, damit $\mathfrak{f}(0,0)$ ein Minimum sei?

Wenn $a^2-b^2>0$ ist, so können die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und damit auch die Function $\mathfrak{f}(\xi,\eta)$ in der Umgebung der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$ nach ganzen positiven Potenzen von ξ und η entwickelt werden. Die nothwendigen Bedingungen des Minimums werden daher gegeben durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}2\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \xi}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \xi}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}} = 0 \\ 2\left(\frac{\partial \mathfrak{f}}{\partial \eta}\right)_0 &= \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}} + \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0 \cos^2\varphi + \mathfrak{B}_0 \sin^2\varphi}} = 0,\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

in welchen der Zeiger 0 andeutet, dass $\xi = 0$, $\eta = 0$ zu setzen ist.

Bemerkt man, dass $\mathfrak{A}_0 = a^2$, $\mathfrak{B}_0 = b^2$ ist, setzt $\frac{a^2 - b^2}{a^2} = \varkappa$ und benützt die üblichen Bezeichnungen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa \sin^2\varphi}} = K \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varkappa \sin^2\varphi}\, d\varphi = \mathrm{E},$$

und setzt nach bekannten Reductionsformeln:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa \sin^2\varphi}} = \frac{-(1-\varkappa)K + \mathrm{E}}{a\varkappa} \qquad (a = |\sqrt{a^2}|)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa \sin^2\varphi}} = \frac{K - \mathrm{E}}{a\varkappa},$$

so nehmen die Gleichungen 5) nach Multiplication mit $a\varkappa$ die Formen an:

$$\left.\begin{aligned}[-(1-\varkappa)\,K+\mathrm{E}]\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0+[K-\mathrm{E}]\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0&=0\\ [-(1-\varkappa)\,K+\mathrm{E}]\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0+[K-\mathrm{E}]\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)&=0.\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Für die Interpretation derselben ist es vortheilhaft, anstatt der Coordinaten der Punkte P'' und P''' die Coordinaten $u'|v'$ der Geraden $P''P'''$ einzuführen, welche nach dem Satze II) endliche Werthe haben müssen.

Aus $u'x+v'y+1=0$, der Gleichung dieser Geraden und aus der Gleichung 1) der Ellipse E, welche mit $E_{0|0}$ identisch ist, ergeben sich, wenn $a^2u'^2+b^2v'^2-1=e'$ gesetzt wird, für die Coordinaten der Punkte P'' und P''' die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}x''&=\frac{a}{e'+1}[-au'+b'v'\sqrt{e'}]\\ y''&=\frac{b}{e'+1}[-bv'-au'\sqrt{e'}]\\ x'''&=\frac{a}{e'+1}[-au'-bv'\sqrt{e'}]\\ y'''&=\frac{b}{e'+1}[-bv'+au'\sqrt{e'}].\end{aligned}\right\} \quad 7)$$

Schreibt man die Entwicklungen der Grössen a_{ik} nach Potenzen von ξ und η in der Form an:

$$a_{ik}=a_{ik}^{(00)}+a_{ik}^{(10)}\xi+a_{ik}^{(01)}\eta+\frac{1}{2}a_{ik}^{(20)}\xi^2+a_{ik}^{(11)}\xi\eta+\frac{1}{2}a_{ik}^{(02)}\eta^2,$$

wobei also $\left(\frac{\partial a_{ik}^{\mu+\nu}}{\partial\xi^\mu\partial\eta^\nu}\right)_0=a_{ik}^{(\mu\nu)}$ gesetzt ist, so ergeben sich aus 7) und 1) nach Absonderung des Proportionalitätsfactors

$$\frac{2ab\sqrt{e'}}{(e'+1)^2}(u'x'+v'y'+1)$$

für die Grössen $a_{ik}^{(\mu\nu)}$ die in den folgenden Tabellen zusammengestellten Ausdrücke:

Tabelle 1.

	(00)	(10)	(01)
$a_{11}^{(\;)}$	$b^2(u'x'+vy'-1)$	$b^2u'(u'x'-v'y'-1)$	$2a^2u'^2y'+b^2v'(u'x'+v'y'-3)$
$a_{12}^{(\;)}$	0	$b^2v'(u'x'-v'y'+1)$	$a^2u'(-u'x'+v'y'+1)$
$a_{22}^{(\;)}$	$a^2(u'x'+v'y'-1)$	$2b^2v'^2x'+a^2u'(u'x'+v'y'-3)$	$-a^2v'(u'x'-v'y'+1)$
$a_{13}^{(\;)}$	0	$-b^2(u'x'+v'y'-1)$	0
$a_{23}^{(\;)}$	0	0	$-a^2(u'x'+v'y'-1)$
$a_{33}^{(\;)}$	$-a^2b^2(u'x'+v'y'-1)$	$-2b^2x'-a^2b^2u'(u'x'+v'y'-3)$	$-2a^2y'-a^2b^2v'(u'x'+v'y'-3)$

Tabelle 2.

	(20)	(11)	(02)
$a_{11}^{(\;)}$	0	0	$-4(a^2u'^2+b^2v'^2)$
$a_{12}^{(\;)}$	0	$2(a^2u'^2+b^2v'^2)$	0
$a_{22}^{(\;)}$	$-4(a^2u'^2+b^2v'^2)$	0	0
$a_{13}^{(\;)}$	$2b^2u'(-u'x'+v'y'+1)$	$-2(b^2u'v'x'+a^2u'^2y'-b^2v')$	$2a^2u'(u'x'-v'y'-1)$
$a_{23}^{(\;)}$	$2b^2v'(-u'x'+v'y'-1)$	$-2(b^2v'^2x'+a^2u'v'y'-a^2u')$	$2a^2v'(u'x'-v'y'+1)$
$a_{33}^{(\;)}$	$-4b^2(u'x'-v'y'-a^2u'^2)$	$-4(b^2v'x'+a^2u'y'-a^2b^2u'v')$	$4a^2(u'x'-v'y'+b^2v'^2)$

Nun sind die ersten partiellen Abtheilungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an der Stelle $\xi = 0$, $\eta = 0$ zu berechnen.

Wendet man die Bezeichnungen an:

$$\left(\frac{\partial^{\mu+\nu} A}{\partial\xi^\mu \partial\eta^\nu}\right)_0 = A^{(\mu\nu)}, \qquad \left(\frac{\partial^{\mu+\nu} A_{ik}}{\partial\xi^\mu \partial\eta^\nu}\right)_0 = A_{ik}^{(\mu\nu)},$$

und bemerkt, dass nach der für die Gleichungen 3) getroffenen Bestimmung über das Vorzeichen der Quadratwurzel

$$\sqrt{(a_{11}^{(00)}-a_{22}^{(00)})^2} = -a_{11}^{(00)}+a_{22}^{(00)}$$

zu setzen ist, da

$$-A^{(00)} = a^4 b^4 (u'x'+v'y'-1)^3$$

und

$$-a_{11}^{(00)}+{}_{12}^{(00)} = (a^2-b^2)(u'x'+v'y'-1)$$

ist, so ergibt sich aus den Gleichungen 3) zunächst:

$$\left.\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 &= \frac{A_{33}^{(00)}A^{(10)}-2A_{33}^{(10)}A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^3}\,a_{22}^{(00)} + \frac{A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^2}\,a_{22}^{(10)} \\
-\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 &= \frac{A_{33}^{(00)}A^{(10)}-2A_{33}^{(10)}A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^3}\,a_{11}^{(00)} + \frac{A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^2}\,a_{11}^{(10)} \\
-\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 &= \frac{A_{33}^{(00)}A^{(01)}-2A_{33}^{(01)}A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^3}\,a_{22}^{(00)} + \frac{A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^2}\,a_{22}^{(01)} \\
-\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 &= \frac{A_{33}^{(00)}A^{(01)}-2A_{33}^{(01)}A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^3}\,a_{11}^{(00)} + \frac{A^{(00)}}{(A_{33}^{(00)})^2}\,a_{11}^{(01)}.
\end{aligned}\right\} \quad 8)$$

Wegen $a_{12}^{(00)} = a_{13}^{(00)} = a_{23}^{(00)} = 0$ ist auch $A_{13}^{(00)} = A_{23}^{(00)} = 0$ und weiter:

$$\begin{aligned}
A_{33}^{(00)} &= a_{11}^{(00)}a_{22}^{(00)} & A_{33}^{(10)} &= a_{11}^{(10)}a_{22}^{(00)}+a_{11}^{(00)}a_{22}^{(10)} & A_{33}^{(01)} &= a_{11}^{(01)}a_{22}^{(00)}+a_{11}^{(00)}a_{22}^{(01)} \\
A^{(00)} &= a_{33}^{(00)}A_{33}^{(00)} & A^{(10)} &= a_{33}^{(10)}A_{33}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(10)} & A^{(01)} &= a_{33}^{(01)}A_{33}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(01)}
\end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned}
A_{33}^{(00)}A^{(10)}-2A_{33}^{(10)}A^{(00)} &= A_{33}^{(00)}(a_{33}^{(10)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{10)}) \\
A_{33}^{(00)}A^{(01)}-2A_{33}^{(01)}A^{(00)} &= A_{33}^{(00)}(a_{33}^{(01)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(01)}).
\end{aligned}$$

Damit gehen die Gleichungen 8) in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned}
-\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 &= (a_{33}^{(10)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(10)})a_{22}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(00)}a_{22}^{(10)}\\
-\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 &= (a_{33}^{(10)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(10)})a_{11}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(00)}a_{11}^{(10)}\\
-\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 &= (a_{33}^{(01)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(01)})a_{22}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(00)}a_{22}^{(01)}\\
-\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 &= (a_{33}^{(01)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(01)})a_{11}^{(00)}+a_{33}^{(00)}A_{33}^{(00)}a_{11}^{(01)}.
\end{aligned}\right\}\quad 9)$$

Berechnet man daher noch die Ausdrücke:

$$A_{33}^{(00)} = a^2b^2g'^2 \qquad A_{33}^{(10)} = 2b^2g'[(e'+1)x'-2a^2u']$$
$$A_{33}^{(01)} = 2a^2g'[(e'+1)y'-2b^2v'],$$

wobei zur Abkürzung der nach dem Satze II) von Null verschiedene Factor $u'x'+v'y'-1$ mit g' bezeichnet ist, so erhält man aus 9) die gesuchten Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 &= 2a^4b^4g'^3(x'+a^2u'v'y'-a^2u')\\
\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 &= 2a^2b^6g'^3(1-b^2v'^2)x'\\
\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 &= 2a^6b^2g'^3(1-a^2u'^2)y'\\
\left(A_{33}^2\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 &= 2a^4b^4g'^3(b^2u'v'x'+y'-b^2v')
\end{aligned}\right\}\quad 10)$$

Führt man nun diese in die Gleichungen 6) ein, sondert den Factor $\frac{2a^2b^4g'^3}{(A_{33}^{(00)})^2}$, beziehungsweise $\frac{2a^4b^2g'^3}{(A_{33}^{(00)})^2}$, ab und bezeichnet für den Augenblick:

$$-(1-\varkappa)K+\mathrm{E} = J \qquad K-\mathrm{E} = J',$$

so nehmen die Bedingungsgleichungen dafür, dass $\mathfrak{f}(0,0)$ ein Minimum sein kann, nach x' und y' geordnet, die Formen an:

$$\left.\begin{aligned}
[a^2J+b^2(1-b^2v'^2)J']x'+a^4u'v'Jy' &= a^4u'J\\
b^4u'v'J'x'+[a^2(1-a^2u'^2)J+b^2J']y' &= b^4v'J'
\end{aligned}\right\}\quad 11)$$

Die Determinante derselben zerfällt in das Product der Factoren a^2J+b^2J' und $a^2(1-a^2u'^2)J+b^2(1-b^2v'^2)J'$; der letztere derselben, welcher für den Augenblick mit H bezeichnet sein mag, ist ebenso wie der erstere von Null verschieden. Für $H=0$ würden nämlich die Gleichungen 11) übergehen in die folgenden:

$$a^4u'Jg'=0, \qquad b^4v'J'g'=0, \tag{11'}$$

welche aber unmöglich beide zugleich erfüllt sein können. Führt man nämlich für K und E die bekannten Entwicklungen in der Umgebung der Stelle $\varkappa=0$ ein:

$$K=\frac{\pi}{2}\sum_{\lambda=0}^{\infty}c_\lambda^2\varkappa^\lambda \quad \mathrm{E}=\frac{\pi}{2}\left[1-\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{c_\lambda^2}{2\lambda-1}\varkappa^\lambda\right] \quad \left(c_\lambda=\frac{1.3.5...2\lambda-1}{2.4.6...2\lambda}\right), \tag{12}$$
$$0\leqq|\varkappa|<1$$

so ergibt sich:

$$J=\pi\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{c_\lambda^2}{4(\lambda+1)}\varkappa^{\lambda+1} \qquad J'=\pi\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(\lambda+1)c_{\lambda+1}^2}{2\lambda+1}\varkappa^{\lambda+1}. \tag{13}$$

Nach der Voraussetzung $a^2-b^2>0$ ist der Werth $\varkappa=0$ ausgeschlossen, folglich sind J und J' für $0<\varkappa<1$ beide von Null verschieden und positiv.

Die Coordinaten $u'|v'$ der Geraden $P''P'''$ können nicht beide gleich Null sein, g' ist, wie bereits erwähnt wurde, von Null verschieden: also können die Gleichungen 11') nicht beide erfüllt sein und ist somit H in der That von Null verschieden.

Löst man nun die Gleichungen 11) nach x' und y' auf und sondert im Zähler und Nenner der Auflösungsformeln den Factor H ab, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$x'=\frac{a^4u'J}{a^2J+b^2J'} \qquad y'=\frac{b^4v'J'}{a^2J+b^2J'},$$

welche, in die Gleichung 1) eingeführt, für u' und v' die Bedingung:

$$\frac{a^6J^2}{(a^2J+b^2J')^2}u'^2+\frac{b^6J'^2}{(a^2J+b^2J')^2}v'^2=1 \tag{14}$$

liefern.

Dieselbe drückt aber bekanntlich aus, dass die Gerade $P''P'''$ Tangente an die Ellipse $\mathfrak{E}$ mit den Halbaxen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \frac{a^2 J}{a^2 J + b^2 J'} = \frac{-(1-\varkappa)K + \mathrm{E}}{\varkappa \mathrm{E}}\, a \\ \mathfrak{b} &= \frac{b^2 J'}{a^2 J + b^2 J'} = \frac{(1-\varkappa)(K - \mathrm{E})}{\varkappa \mathrm{E}}\, b\end{aligned}\right\} \qquad 15)$$

sein muss, deren Gleichung in Punktcoordinaten somit

$$\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y^2}{\mathfrak{b}^2} - 1 = 0 \qquad 16)$$

ist.

Man beachte dabei die Relation:

$$\frac{\mathfrak{a}}{a} + \frac{\mathfrak{b}}{b} = 1,[1] \qquad 17)$$

welche aussagt, dass die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ die Coordinaten eines Punktes der geraden Strecke sein müssen, welche die Scheitel $a|0$ und $0|b$ der Ellipse E verbindet.

Ebenso wie die Gerade $P''P'''$ müssen aber offenbar auch die Geraden $P'''P'$ und $P'P''$ Tangenten an die Ellipse $\mathfrak{E}$ sein, da die Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ von x' und y' unabhängig sind; man hat somit als erstes Resultat der Untersuchung (unter der Voraussetzung, dass $a^2 - b^2 > 0$ ist) den Satz:

---

[1] Die bekannte Invariantenbedingung dafür, dass der Ellipse E Dreiecke eingeschrieben werden können, welche zugleich einer anderen Ellipse $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind, ist für die hier auftretenden Gleichungsformen von E und $\mathfrak{E}$:

$$\left(\frac{1}{a^2\mathfrak{b}^2} + \frac{1}{\mathfrak{a}^2 b^2} + \frac{1}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2}\right) - \frac{4}{\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2}\left(\frac{1}{a^2\mathfrak{b}^2} + \frac{1}{\mathfrak{a}^2 b^2} + \frac{1}{a^2 b^2}\right) = 0$$

oder:

$$\left(\frac{1}{a\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{a}b} + \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)\left(-\frac{1}{a\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{a}b} + \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)\left(\frac{1}{a\mathfrak{b}} - \frac{1}{\mathfrak{a}b} + \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right)\left(\frac{1}{a\mathfrak{b}} + \frac{1}{\mathfrak{a}b} - \frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}\right) = 0.$$

Siehe Salmon-Fiedler, Anal. Geom. d. Kegelschnitte, Leipzig 1887, S. 642.

Der letzte Factor links verschwindet in der That zufolge der Relation 17).

Die sämmtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ auf E, für welche der Umfang von E ein Minimum sein kann, sind diejenigen, welche zugleich der Ellipse $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind.

Um behaupten zu können, dass für ein solches Dreieck $P'P''P'''$ der Umfang von E wirklich ein Minimum sei, muss man zeigen, dass in der Entwicklung:

$$\mathfrak{f}(\xi,\eta) = \mathfrak{f}(0,0) + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0 \xi^2 + 2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 \xi\eta + \left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\eta^2}\right)_0 \eta^2\right] + \dots \qquad 18)$$

die Glieder zweiter Ordnung eine positive quadratische Form in ξ und η bilden, d. h. dass

$$\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\eta^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0^2 > 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0 > 0$$

ist.

Aus 4) ergibt sich unter der Bezeichnung

$$\Phi = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi:$$

$$\left.\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0 = {} & \left(\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\xi^2}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} \\
& - \left(\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 \left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} + \left(\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\xi^2}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}}
\end{aligned}\right\} \qquad 19)$$

$$\left.\begin{aligned}
2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_0 = {} & \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} \\
& - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} \\
2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial\eta^2}\right)_0 = {} & \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial\eta^2}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} \\
& - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 \left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial\eta^2}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi}
\end{aligned}\right\} \quad 19)$$

Für die in diesen Formeln auftretenden elliptischen Integrale, soweit sie nicht schon früher durch die Integrale K und E ausgedrückt sind, erhält man nach bekannten Reductionsformeln die Darstellungen:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} &= \frac{1}{a^3}\,\frac{-2(1-\varkappa)K + (2-\varkappa)E}{\varkappa^2} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} &= \frac{1}{a^3}\,\frac{(2-\varkappa)K - 2E}{\varkappa^2} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} &= \frac{1}{a^3}\,\frac{-2(1-\varkappa)K + (2-\varkappa)E}{\varkappa^2(1-\varkappa)}
\end{aligned}\right\} \quad 20)$$

Zur Berechnung der zweiten partiellen Ableitungen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$ seien zunächst die Formeln notirt, welche sich aus 3) durch Ausführung der zweimaligen Differentiationen und Einführung der Werthe $\xi=0$, $\eta=0$ ergeben:

$$\left.\begin{aligned}
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\xi^2}\right)_0 &= L_{11}a_{22}^{(00)}+2M_1a_{22}^{(10)}+N\left[a_{22}^{(20)}+\frac{2(a_{12}^{(10)})^2}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]\\
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 &= L_{12}a_{22}^{(00)}+M_2a_{22}^{(10)}+M_1a_{22}^{(01)}+N\left[a_{22}^{(11)}+\frac{2a_{12}^{(10)}a_{12}^{(01)}}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]\\
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\eta^2}\right)_0 &= L_{22}a_{22}^{(00)}+2M_2a_{22}^{(01)}+N\left[a_{22}^{(02)}+\frac{2(a_{12}^{(01)})^2}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]\\
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\xi^2}\right)_0 &= L_{11}a_{11}^{(00)}+2M_1a_{11}^{(10)}+N\left[a_{11}^{(20)}-\frac{2(a_{12}^{(10)})^2}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]\\
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 &= L_{12}a_{11}^{(00)}+M_2a_{11}^{(10)}+M_1a_{11}^{(01)}+N\left[a_{11}^{(11)}-2\frac{a_{12}^{(01)}a_{12}^{(10)}}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]\\
-\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\eta^2}\right)_0 &= L_{22}a_{11}^{(00)}+2M_2a_{11}^{(01)}+N\left[a_{11}^{(02)}-\frac{2(a_{12}^{(01)})^2}{a_{22}^{(00)}-a_{11}^{(00)}}\right]
\end{aligned}\right\}\quad 21)$$

worin zu setzen ist:

$$\left.\begin{aligned}
L_{11} &= A_{33}^{(00)}[A_{33}^{(00)}A^{(20)}-4A_{33}^{(10)}A^{(10)}-2A_{33}^{(20)}A^{(00)}+6(A_{33}^{(10)})^2a_{33}^{(00)}]\\
L_{12} &= A_{33}^{(00)}[A_{33}^{(00)}A^{(11)}-2A_{33}^{(10)}A^{(01)}-2A_{33}^{(01)}A^{(10)}-2A_{33}^{(11)}A^{(00)}\\
&\qquad +6A_{33}^{(10)}A_{33}^{(01)}a_{33}^{(00)}]\\
L_{22} &= A_{33}^{(00)}[A_{33}^{(00)}A^{(02)}-4A_{33}^{(01)}A^{(01)}-2A_{33}^{(02)}A^{(00)}+6(A_{33}^{(01)})^2a_{33}^{(00)}]\\
M_1 &= (A_{33}^{(00)})^2[a_{33}^{(10)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(10)}]\\
M_2 &= (A_{33}^{(00)})^2[a_{33}^{(01)}A_{33}^{(00)}-a_{33}^{(00)}A_{33}^{(01)}]\\
N &= (A_{33}^{(00)})^3a_{33}^{(00)}.
\end{aligned}\right\}\quad 22)$$

Die Grössen $a_{ik}^{(\mu\nu)}$, $A_{ik}^{(\mu\nu)}$ und $A^{(\mu\nu)}$ sind nun durch a, b, $\mathfrak{a}$, x', y' auszudrücken.

Um zu einem Punkte P' auf E die zugehörigen Punkte P'', P''' zu finden, hat man aus P' die beiden Tangenten an $\mathfrak{C}$ zu legen; die zweiten Schnittpunkte derselben mit E sind dann die gesuchten Punkte P'', P'''. Danach ergeben sich für die Coordinaten $u'|v'$ der Geraden $P''P'''$ die Ausdrücke:

$$u' = \frac{\mathfrak{a}^2 b^2 - a^2 \mathfrak{b}^2 - a^2 b^2}{\mathfrak{a}^2 b^2 + a^2 \mathfrak{b}^2 - a^2 b^2} \frac{x'}{a^2} \qquad v' = \frac{-\mathfrak{a}^2 b^2 + a^2 \mathfrak{b}^2 - a^2 b^2}{\mathfrak{a}^2 b^2 + a^2 \mathfrak{b}^2 - a^2 b^2} \frac{y'}{b^2},$$

welche sich aber wegen der Relation $\frac{\mathfrak{a}}{a} + \frac{\mathfrak{b}}{b} = 1$ auf

$$u' = \frac{x'}{a\mathfrak{a}} \qquad v' = \frac{y'}{b\mathfrak{b}} \tag{23}$$

reduciren.

Damit erhält man, beiläufig bemerkt, aus den Gleichungen 7) für die Coordinaten von P'' und P''' die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}} + \frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & y'' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}} - \frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \\ x''' &= \frac{a}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{x'}{\mathfrak{a}} - \frac{y'}{\mathfrak{b}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] & y''' &= \frac{b}{\mathfrak{e}'+1}\left[-\frac{y'}{\mathfrak{b}} + \frac{x'}{\mathfrak{a}}\sqrt{\mathfrak{e}'}\right] \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

in welchen $\mathfrak{e}' = \frac{x'^2}{\mathfrak{a}^2} + \frac{y'^2}{\mathfrak{b}^2} - 1$ gesetzt ist.

Diese Gleichungen bleiben ebenso wie die Gleichungen 7) bestehen, wenn man die Accente $'\ ''\ '''$ cyklisch permutirt.

Für die Grössen $a_{ik}^{(\mu\nu)}$ erhält man aus den Tabellen 1 und 2 unter Berücksichtigung von 17) und 23), nach Absonderung des Proportionalitätsfactors $\frac{1}{ab^2\mathfrak{a}^2(a-\mathfrak{a})^2}$, die in den nachstehenden Tabellen zusammengestellten Ausdrücke. Zur Abkürzung ist dabei gesetzt:

$$g = (a-2\mathfrak{a})x'^2 + a\mathfrak{a}^2 \qquad h = x'^2 - \mathfrak{a}(2a-\mathfrak{a}) \qquad j = x'^2 - \mathfrak{a}^2 \tag{25}$$

Tabelle 3.

	(00)	(10)	(01)
$a_{11}^{(\ )}$	$b^4\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g$	$b^4(a-\mathfrak{a})x'h$	$a^2b^2(2a-3\mathfrak{a})y'j$
$a_{12}^{(\ )}$	0	$a^2b^2\mathfrak{a}y'j$	$-a^2b^2(a-\mathfrak{a})x'h$
$a_{22}^{(\ )}$	$a^2b^2\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g$	$a^2b^2(a-3\mathfrak{a})x'h$	$-a^4\mathfrak{a}y'j$
$a_{13}^{(\ )}$	0	$-b^4\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g$	0
$a_{23}^{(\ )}$	0	0	$-a^2b^2\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g$
$a_{33}^{(\ )}$	$-a^2b^4\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g$	$-ab^4(a-\mathfrak{a})(a-2\mathfrak{a})x'h$	$-a^3b^2\mathfrak{a}(a-2\mathfrak{a})y'j$

Tabelle 4.

	(20)	(11)	(02)
$a_{11}^{(\ )}$	0	0	$-4a^2b^2g$
$a_{12}^{(\ )}$	0	$2a^2b^2g$	0
$a_{22}^{(\ )}$	$-4a^2b^2g$	0	0
$a_{13}^{(\ )}$	$-2b^4(a-\mathfrak{a})x'h$	$-2a^2b^2(a-\mathfrak{a})y'j$	$2a^2b^2(a-\mathfrak{a})x'h$
$a_{23}^{(\ )}$	$-2a^2b^2\mathfrak{a}y'j$	$2a^2b^2\mathfrak{a}x'h$	$2a^4\mathfrak{a}y'j$
$a_{33}^{(\ )}$	$4ab^4(a-\mathfrak{a})g$	0	$4a^3b^2\mathfrak{a}g$

Hieraus ergibt sich dann:

$$\left.\begin{array}{lll} A_{13}^{(00)}=0 & A_{23}^{(00)}=0 & A_{33}^{(00)}=a^2b^6\mathfrak{a}^2(a-\mathfrak{a})^2g^2 \\ A_{13}^{(10)}=a^2b^6\mathfrak{a}^2(a-\mathfrak{a})^2g^2 & A_{23}^{(10)}=0 & A_{33}^{(10)}=2a^2b^6\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})(a-2\mathfrak{a})x'gh \\ A_{13}^{(01)}=0 & A_{23}^{(01)}=a^2b^6\mathfrak{a}^2(a-\mathfrak{a})^2g^2 & A_{33}^{(01)}=2a^4b^4\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})(a-2\mathfrak{a})y'gj \end{array}\right\} \quad 26)$$

$$\left.\begin{array}{l} A_{33}^{(20)}=2a^2b^6[-2\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g^2+(a-\mathfrak{a})(a-3\mathfrak{a})x'^2h^2+\mathfrak{a}^2(x'^2-a^2)j^2] \\ A_{33}^{(11)}=2a^4b^4(a-2\mathfrak{a})^2x'y'hj \\ A_{33}^{(02)}=2a^4b^4[-2\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})g^2-(a-\mathfrak{a})^2x'^2h^2+\mathfrak{a}(2a-3\mathfrak{a})(x'^2-a^2)j^2] \end{array}\right\} \quad 27)$$

$$A^{(00)} = -a^4 b^{10} \mathfrak{a}^2 (a-\mathfrak{a})^3 g^3 \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} A^{(10)} &= -a^3 b^{10} \mathfrak{a}^2 (a-\mathfrak{a})^2 (a-2\mathfrak{a})(3a-\mathfrak{a}) x' g^2 h \\ A^{(01)} &= -a^5 b^8 \mathfrak{a}^2 (a-\mathfrak{a})^2 (a-2\mathfrak{a})(2a+\mathfrak{a}) y' g^2 j \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned} A^{(20)} &= 2a^2 b^{10} \mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})[\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})(4a^2-3a\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2) g^2 - a(a-\mathfrak{a})^2(3a-8\mathfrak{a}) x'^2 h^2 - a^2 \mathfrak{a}^2 (x'^2-a^2) j^2] \\ A^{(11)} &= -4a^6 b^8 \mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})(a-2\mathfrak{a})^2 x' y' g h j \\ A^{(02)} &= 2a^4 b^8 \mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})[\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})(2a^2+a\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^2) g^2 + a^2(a-\mathfrak{a})^2 x'^2 h^2 - a\mathfrak{a}^2(5a-8\mathfrak{a})(x'^2-a^2) j^2] \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Damit können nun berechnet werden die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} L_{11} &= 2a^6 b^{22} \mathfrak{a}^5 (a-\mathfrak{a})^5 [-\mathfrak{a}^2(a-\mathfrak{a})(3a-\mathfrak{a}) g^2 + a(-a^3+2a^2\mathfrak{a}+3a\mathfrak{a}^2-8\mathfrak{a}^3) x'^2 h^2 + a^2 \mathfrak{a}^2 (x'^2-a^2) j^2] g^5 \\ L_{12} &= -4a^{10} b^{20} \mathfrak{a}^5 (a-\mathfrak{a})^5 (a-2\mathfrak{a})^2 x' y' g^5 h j \\ L_{22} &= 2a^8 b^{20} \mathfrak{a}^5 (a-\mathfrak{a})^5 [-\mathfrak{a}(a-\mathfrak{a})^2(2a+\mathfrak{a}) g^2 - a^2(a-\mathfrak{a})^2 x'^2 h^2 + a(4a^3-16a^2\mathfrak{a}+21a\mathfrak{a}^2-8\mathfrak{a}^3)(x'^2-a^2) j^2] g^5 \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= a^7 b^{22} \mathfrak{a}^6 (a-\mathfrak{a})^6 (a-2\mathfrak{a})(a+\mathfrak{a}) x' g^6 h \\ M_2 &= a^9 b^{20} a^6 (a-\mathfrak{a})^6 (a-2\mathfrak{a})(2a-\mathfrak{a}) y' g^6 j \\ N &= -a^8 b^{22} \mathfrak{a}^2 (a-\mathfrak{a})^7 g^7 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Indem man die so gewonnenen Ausdrücke in die Formeln 21) einführt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\xi^2}\right)_0 &= \frac{2a^8b^{24}\mathfrak{a}^7(a-\mathfrak{a})^6}{a^2-b^2}\left[-(a^2-b^2)(\mathfrak{a}-a)^2(2a-\mathfrak{a})g^2+2a(a^2-b^2)(a-\mathfrak{a})^2x'^2h^2-a^4\mathfrak{a}(x'^2-a^2)j^2\right]g^6\\
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 &= \frac{2a^{11}b^{22}\mathfrak{a}^6(a-\mathfrak{a})^7}{a^2-b^2}\left[a^2(a+\mathfrak{a})(a-2\mathfrak{a})-b^2(a^2-2\mathfrak{a}^2)\right]x'y'g^6hj\\
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial\eta^2}\right)_0 &= \frac{2a^{10}b^{22}\mathfrak{a}^6(a-\mathfrak{a})^8}{a^2-b^2}\left[(a^2-b^2)\mathfrak{a}(2a+\mathfrak{a})g^2+a^4x'^2h^2-2a(a^2-b^2)(2a-3\mathfrak{a})(x'^2-a^2)j^2\right]g^6
\end{aligned}\right\} \quad 33)$$

$$\left.\begin{aligned}
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\xi^2}\right)_0 &= \frac{2a^6b^{26}\mathfrak{a}^8(a-\mathfrak{a})^6}{a^2-b^2}\left[(a^2-b^2)(a-\mathfrak{a})(3a-\mathfrak{a})g^2-2a(a^2-b^2)(a-3\mathfrak{a})x'^2h^2+a^2b^2(x'^2-a^2)j^2\right]g^6\\
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 &= \frac{2a^9b^{24}\mathfrak{a}^7(a-\mathfrak{a})^6}{a^2-b^2}\left[-a^2(a^2-4a\mathfrak{a}+2\mathfrak{a}^2)+b^2(a-2\mathfrak{a})(2a-\mathfrak{a})\right]x'y'g^6hj\\
\left(A_{33}^{4}\frac{\partial^2\mathfrak{B}}{\partial\eta^2}\right)_0 &= \frac{2a^8b^{24}\mathfrak{a}^6(a-\mathfrak{a})^7}{a^2-b^2}\left[-(a^2-b^2)\mathfrak{a}^2(a+\mathfrak{a})g^2-a^2b^2(a-\mathfrak{a})x'^2h^2-2(a^2-b^2)a\mathfrak{a}^2(x'^2-a^2)j^2\right]g^6
\end{aligned}\right\} \quad 34)$$

und aus den Formeln 9):

$$\left.\begin{aligned}
\left(A_{33}^{2}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\xi}\right)_0 &= -2a^5b^{12}\mathfrak{a}^4(a-\mathfrak{a})^4x'g^3h & \left(A_{33}^{2}\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial\eta}\right)_0 &= -2a^7b^{10}\mathfrak{a}^3(a-\mathfrak{a})^5y'g^3j\\
\left(A_{33}^{2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\xi}\right)_0 &= 2a^3b^{14}\mathfrak{a}^5(a-\mathfrak{a})^3x'g^3h & \left(A_{33}^{2}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial\eta}\right)_0 &= 2a^5b^{12}\mathfrak{a}^4(a-\mathfrak{a})^4y'g^3j
\end{aligned}\right\} \quad 35)$$

Es ist vortheilhaft, die in den Formeln 19) auftretenden elliptischen Integrale mittelst der Relation

$$\mathfrak{a} = \frac{-(1-\varkappa)K+\mathrm{E}}{\varkappa \mathrm{E}} a \quad \text{oder} \quad K = \frac{a-\varkappa\mathfrak{a}}{1-\varkappa}\mathrm{E} = \frac{a^3-(a^2-b^2)\mathfrak{a}}{b^2}\mathrm{E}$$

durch a, b, $\mathfrak{a}$ und E auszudrücken. Dann wird mit Rücksicht auf die Gleichungen 20):

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = \frac{\mathfrak{a}}{a^2}\mathrm{E} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\Phi}} = \frac{a-\mathfrak{a}}{b^2}\mathrm{E} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} = -\frac{a-2\mathfrak{a}}{a^2(a^2-b^2)}\mathrm{E} \\ \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} = -\frac{a-2\mathfrak{a}}{b^2(a^2-b^2)}\mathrm{E} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi\, d\varphi}{\Phi\sqrt{\Phi}} = \frac{a^2(a-\mathfrak{a})-b^2\mathfrak{a}}{a^2b^2(a^2-b^2)}\mathrm{E} \end{array}\right\} \qquad 36)$$

Damit sind nun die nöthigen Vorbereitungen getroffen, um die Grössen $\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0$, $\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\eta^2}\right)_0$ mittelst der Formeln 19) durch a, b, $\mathfrak{a}$, x', y' auszudrücken; man findet:

$$\left(A_{33}^4 \frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0 = \qquad 37)$$

$$= \frac{a^7b^{24}\mathfrak{a}^8(a-\mathfrak{a})^6}{a^2-b^2}\mathrm{E}\{(a^2-b^2)(a-\mathfrak{a})^2g^2+[a^2(a-\mathfrak{a})(a+3\mathfrak{a})-b^2\mathfrak{a}(4a-3\mathfrak{a})]x'^2h^2+a[a^2\mathfrak{a}-b^2(a-\mathfrak{a})](a^2-x'^2)j^2\}g^6$$

$$\left(A_{33}^4 \frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0 = \frac{a^9b^{22}\mathfrak{a}^7(a-\mathfrak{a})^7}{(a^2-b^2)}\mathrm{E}\{a^2(a^2+a\mathfrak{a}-3\mathfrak{a}^2)+b^2(a^2-5a\mathfrak{a}+3\mathfrak{a}^2)\}x'y'g^6hj \qquad 38)$$

$$\left(A_{33}^4 \frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \eta^2}\right)_0 = \tag{39)}$$

$$= \frac{a^9 b^{22} \mathfrak{a}^6 (a-\mathfrak{a})^8}{a^2 - b^2} \mathrm{E} \{ (a^2 - b^2) \mathfrak{a}^2 g^2 + a [a^2 \mathfrak{a} - b^2 (a - \mathfrak{a})] x'^2 h^2 + [a^2 (a-\mathfrak{a})(a+3\mathfrak{a}) - b^2 \mathfrak{a} (4a - 3\mathfrak{a})](a^2 - x'^2) j^2 \} g^6$$

Um nun das Vorzeichen von $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2 - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \eta^2}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0$ für alle in Betracht kommenden Werthe von $\varkappa$ und x'^2 beurtheilen zu können, müssen einige Bemerkungen über die Function $\frac{\mathfrak{a}}{a}$, welche mit t bezeichnet wird, vorausgeschickt werden.

Schliesst man für $\varkappa$ die reellen Werthe $\geqq 1$ aus, so sind, wie bekannt, die Integrale

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa z^2}} \qquad \mathrm{E} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\varkappa z^2}\, dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

in welchen $\sqrt{1-z^2}$ positiv und $\sqrt{1-\varkappa z^2}$ so zu nehmen ist, dass der reelle Theil positiv ist, in der ganzen übrigbleibenden $\varkappa$-Ebene eindeutige Functionen vom Charakter der ganzen rationalen (nach der Bezeichnung des Herrn Weierstrass).

Dasselbe gilt aber auch von der Function:

$$t = \frac{-(1-\varkappa)K + \mathrm{E}}{\varkappa \mathrm{E}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\varkappa z^2}} dz : \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\varkappa z^2}}{\sqrt{1-z^2}} dz, \tag{40)}$$

denn die Function $\frac{-(1-\varkappa)K+\mathrm{E}}{\varkappa} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-\varkappa z^2}} dz$ verhält sich, wie auch die Entwicklung 13) zeigt, an der Stelle $\varkappa = 0$ durchaus regulär, und das Integral E hat in dem betrachteten Gebiete von $\varkappa$ keine Nullstelle.

Setzt man nämlich $\varkappa = p + qi$, so ist:

$$\sqrt{1-\varkappa z^2} = \left| \sqrt{\frac{1-pz^2+\left|\sqrt{(1-pz^2)^2+q^2z^4}\right|}{2}} \right| + i\sqrt{\frac{-(1-pz^2)+\left|\sqrt{(1-pz^2)^2+q^2z^4}\right|}{2}}, \qquad 41)$$

wobei das Vorzeichen des Coëfficienten von i mit dem von $-q$ übereinstimmen muss.

Hieraus ersieht man aber deutlich, dass der reelle Theil von $\sqrt{1-\varkappa z^2}$ im betrachteten Gebiete von $\varkappa$ nicht verschwinden kann, dazu wäre nämlich erforderlich $1-pz^2=0$ und $qz^2=0$, also $z^2 = \frac{1}{p}$ $q=0$; für p sind aber, wenn $q=0$ ist, eben die positiven Werthe, welche nicht kleiner als $+1$ sind, ausgeschlossen. Daher ist auch der reelle Theil von E im betrachteten Gebiete von $\varkappa$ sicher positiv und von Null verschieden.

Die Entwicklung von t in der Umgebung der Stelle $\varkappa = 0$, d. h. innerhalb des Kreises vom Radius 1 aus dem Centrum $\varkappa = 0$, erhält man durch Multiplication der beiden Potenzreihen, welche die Functionen $\frac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa}$ und $\frac{1}{E}$ im Bereiche $0 \leqq |\varkappa| < 1$ darstellen.

Nach 13) ist nämlich:

$$\frac{-(1-\varkappa)K+E}{\varkappa} = \frac{\pi}{2}\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_\lambda^2}{2(\lambda+1)}\varkappa^\lambda. \qquad 42)$$

Da $\frac{c_{\lambda+1}^2}{\lambda+2} : \frac{c_\lambda^2}{\lambda+1} = 1 - \frac{2}{\lambda} + \ldots$ ist, so convergirt die Reihe auch noch für $\varkappa = +1$.

Dasselbe gilt von der Potenzreihe, welche in der Umgebung von $\varkappa = 0$ das Integral E darstellt, nämlich $E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \sum_{\lambda=1} \frac{c_\lambda^2}{2\lambda-1}\varkappa^\lambda\right]$, da $\frac{c_{\lambda+1}^2}{2\lambda+1} : \frac{c_\lambda^2}{2\lambda-1} = 1 - \frac{2}{\lambda} \ldots$ ist.

Für $\varkappa = 1$ ist $E = 1$, und somit hat die Reihe $\sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda^2}{2\lambda-1}$, welche für den Augenblick mit s bezeichnet werden soll, den Werth $1 - \frac{2}{\pi}$, welcher kleiner als 1 ist.

Hieraus folgt weiter, dass auch die Entwicklung von $\frac{1}{E}$, welche im Gebiete $0 \leqq |x| < 1$, sicher convergirt, da dasselbe keine Nullstelle der Function E enthält, ebenfalls für $x = +1$ convergirt.

Setzt man nämlich

$$\frac{1}{\frac{2}{\pi} E} = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - \left(c_1^2 x + \frac{c_2^2}{3} x^2 + \ldots\right)}, \qquad 43)$$

so sind die Coëfficienten a sämmtlich positiv; die Summe von beliebig vielen derselben ist sicher kleiner als die Summe der Reihe $s + s^2 + s^3 + \ldots = \frac{s}{1-s}$; somit convergirt in der That die Potenzreihe für $\frac{1}{E}$ auch noch für $x = +1$.

Indem man die Entwicklungen 42) und 43) multiplicirt, erhält man in der Umgebung der Stelle $x = 0$ für die Function t die Entwicklung:

$$t = \frac{1}{2} \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{c_\lambda^2}{\lambda+1} x^\lambda}{1 - \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{c_\lambda^2}{2\lambda - 1} x^\lambda} = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots, \qquad 44)$$

deren Convergenzkreis durch den Punkt $x = 1$ geht, welche aber auch für $x = +1$ noch convergirt und somit den Functionswerth $+1$ von t liefert, der sich aus 40) ergibt; also ist:

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \ldots = 1. \qquad 45)$$

Die Coëfficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots$ sind sämmtlich positive rationale Zahlen, zu deren Berechnung die aus 44) erfliessende Recursionsformel:

$$\gamma_n = \frac{3n}{(n+1)(2n-1)} c_n^2 + \frac{1}{2n-3} c_{n-1}^2 \gamma_1 + \frac{1}{2n-5} c_{n-2}^2 \gamma_2 + \ldots + c_1^2 \gamma_{n-1} \qquad 46)$$

dienen kann.

Die Anfangsglieder der Entwicklung sind:

$$t = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^4}\varkappa + \frac{3}{2^5}\varkappa^2 + \frac{3.37}{2^{11}}\varkappa^3 + \frac{3.47}{2^{12}}\varkappa^4$$

$$+ \frac{3.7.73}{2^{16}}\varkappa^5 + \frac{3.17.43}{2^{17}}\varkappa^6 + \dots \qquad 47)$$

Auf die numerische Berechnung der Function t soll erst später eingegangen werden.

Bricht man die Potenzreihe für t mit dem Gliede $\gamma_{n-1}\varkappa^{n-1}$ ab, so ist:

$$\left|\sum_{\nu=n}^{\infty}\gamma_\nu \varkappa^\nu\right| < |\varkappa|^n \sum_{\nu=n}^{\infty}\gamma_\nu = \left(1 - \sum_{\nu=0}^{n-1}\gamma_\nu\right)|\varkappa|^n, \qquad (0 < |\varkappa| < 1)$$

also ist der absolute Betrag des Restes kleiner als

$$\left(\frac{1}{2} - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_{n-1}\right)|\varkappa|^n.$$

Für die reellen Werthe von $\varkappa$ im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ hat man demnach die Begrenzung:

$$\gamma_0 + \gamma_1\varkappa + \dots + \gamma_{n-1}\varkappa^{n-1} < t < \gamma_0 + \gamma_1\varkappa + \dots + \gamma_{n-1}\varkappa^{n-1}$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \gamma_1 - \dots - \gamma_{n-1}\right)\varkappa^n \qquad 48)$$

Damit lässt sich nun aber in der That zeigen, dass im Intervalle $0 < \varkappa < 1$, also für $a^2 - b^2 > 0$, und für alle in Betracht kommenden Werthe von x' und y' $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \eta^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0$ positive Grössen sind.

Zuvörderst sei bemerkt, dass die in den Formeln 37) und 39) auftretenden Coëfficienten von g^2, $x'^2 h^2$ und $(a^2 - x'^2) j^2$ sämmtlich positiv sind. Vom Coëfficienten von g^2 ist dies evident; setzt man in den beiden anderen: $a^2(a-\mathfrak{a})(a+3\mathfrak{a}) - b^2\mathfrak{a}(4a - 3\mathfrak{a})$ und $a[a^2\mathfrak{a} - b^2(a-\mathfrak{a})]$, $b^2 = a^2(1-\varkappa)$, $\mathfrak{a} = at$, so gehen sie über in $a^4[1 - 2(1-2\varkappa)t - 3\varkappa t^2]$ und $a^4[-1 + 2t + \varkappa(1-t)]$.

Der letztere ist wegen $\frac{1}{2} < t < 1$ für $0 < \varkappa < 1$ ersichtlich positiv.

Was den ersteren betrifft, so fängt die Entwicklung der Function $1-2(1-2x)t-3xt^2$, welche für den Augenblick mit $\varphi(x)$ bezeichnet werden soll, an mit dem Gliede $\frac{7}{8}x$; daraus folgt, dass für hinreichend kleine positive Werthe von x $\varphi(x)$ positiv ist. Kann man also zeigen, dass die Function $\varphi(x)$ im Intervall $0<x<1$ nicht verschwindet, so ist damit auch bewiesen, dass $\varphi(x)$ im betrachteten Intervall durchaus positiv ist.

Aus $\varphi(x)=0$ würde folgen: $t=\frac{-1+2x+\sqrt{1-x+4x^2}}{3x}$, wobei der Quadratwurzel ihr positiver Werth zu ertheilen ist, weil t für $0<x<1$ nur positive Werthe annimmt.

Einen solchen Werth von x gibt es aber nicht, denn nach 48) ist $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x>t$; anderseits

$$\frac{\sqrt{1-x+4x^2}-1+2x}{3x}>\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x$$

für $0<x<1$, da

$$\sqrt{1-x+4x^2}>1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}x^2$$

oder

$$1-x+4x^2>1-x+\frac{13}{4}x^2-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{4}x^4$$

oder

$$\frac{3}{4}x^2(1+2x-3x^2)=\frac{3}{4}x^2(1-x)(1+3x)>0$$

ist.

Also ist immer $\frac{-1+2x+\sqrt{1-x+4x^2}}{3x}>t$ $(0<x<1)$ und somit in der That $\varphi(x)$ beständig positiv.

Die Function $g=(a-2\mathfrak{a})x'^2+a\mathfrak{a}^2$ kann für $0<x<1$ nicht verschwinden. P' ist ein Punkt auf E, folglich ist $0\leqq x'^2\leqq a^2$; setzt man $x'=a\mathfrak{x}'$ $(0\leqq\mathfrak{x}'^2\leqq 1)$, $\mathfrak{a}=at$, so ist $g=a^3[(1-2t)\mathfrak{x}'^2+t^2]$.

Da nun $\frac{t^2}{2t-1}>1$ ist, so ist stets $g>0$.

Hiemit ist bereits nachgewiesen, dass $\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\xi^2}\right)_0$ und $\left(\frac{\partial^2\mathfrak{f}}{\partial\eta^2}\right)_0$ für alle in Betracht kommenden Werthe von x und x' positive Grössen

sind und leicht zu zeigen, dass auch $\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \eta^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2$ positiv ist.

Führt man nämlich in den Formeln 37), 38), 39) ein:

$$b^2 = a^2(1-\varkappa), \qquad \mathfrak{a} = t a,$$

bezeichnet:

$$1-2(1-2\varkappa)t-3\varkappa t^2 = \varphi \qquad -1+2t+\varkappa(1-t) = \psi,$$

setzt:

$$a^2 y'^2 = a^2(1-\varkappa)(a^2-x'^2), \quad A_{33}^{(00)} = a^{12}(1-\varkappa)^6 t^2(1-t)^2 g^2$$

und bemerkt, dass in 38)

$$a^2(a^2+a\mathfrak{a}-3\mathfrak{a}^2)+b^2(a^2-5a\mathfrak{a}+3\mathfrak{a}^2)$$
$$= a^4[2-\varkappa-(4-5\varkappa)t-3\varkappa t^2] = a^4(\varphi-\psi)$$

ist, so ergibt sich:

$$\frac{a^2\varkappa^2(1-\varkappa)^2 t^2(1-t)^2}{g^4 \mathrm{E}^2}\left\{\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi^2}\right)_0\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \eta^2}\right)_0 - \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{f}}{\partial \xi \partial \eta}\right)_0^2\right\} =$$
$$= [\varkappa(1-t)^2 g^2+\varphi x'^2 h^2+\psi(a^2-x'^2)j^2]\,[\varkappa t^2 g^2+\psi x'^2 h^2+\varphi(a^2-x'^2)j^2]$$
$$-(\varphi-\psi)^2 x'^2(a^2-x'^2)h^2 j^2. \qquad 49)$$

Führt man die Multiplication rechts aus, so sind die Coëfficienten der Producte von je zweien der Grössen g^2, $x'^2 h^2$, $(a^2-x'^2)j^2$, mit Ausnahme desjenigen von $x'^2(a^2-x'^2)h^2 j^2$, aus lauter positiven Bestandtheilen zusammengesetzt; aber auch dieser letztere, nämlich: $\varphi^2+\psi^2-(\varphi-\psi)^2 = 2\varphi\psi$, ist positiv, nachdem φ und ψ, wie oben bewiesen wurde, für alle betrachteten Werthe von $\varkappa$ im Intervalle $0<\varkappa<1$ positiv sind.

Es bleibt jetzt noch der Ausnahmefall $a^2-b^2=0$ zu erledigen, in welchem $\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}$ nicht mehr nach ganzen positiven Potenzen von ξ und η entwickelt werden kann, weil $a_{11}^{(00)}-a_{22}^{(00)}=0$ und $a_{12}^{(00)}=0$ ist.

Stellt man indessen die Umgebung der Stelle $\xi=0$, $\eta=0$ in der Art dar, dass man setzt:

$$\xi = \lambda\zeta \qquad \eta = \mu\zeta, \qquad 50)$$

unter ζ eine reelle Veränderliche, unter λ und μ willkürliche reelle Parameter verstehend, so lässt sich dann $\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}$

nach ganzen positiven Potenzen von ζ entwickeln und damit auch die Function $\mathfrak{f}(\lambda\zeta, \mu\zeta)$, welche mit $\bar{\mathfrak{f}}(\zeta)$ bezeichnet werden soll.

Die Entwicklungen der Grössen a_{ik} nach Potenzen von ζ werden in der Form geschrieben:

$$a_{ik} = a_{ik}^{(0)} + a_{ik}^{(\prime)}\zeta + \frac{1}{2}a_{ik}^{(\prime\prime)}\zeta^2$$

und zur Abkürzung

$$\left(\frac{d^\nu A_{ik}}{d\zeta^\nu}\right)_0 = A_{ik}^{(\nu)} \qquad \left(\frac{d^\nu A}{d\zeta^\nu}\right)_0 = A^{(\nu)}$$

gesetzt, wobei der Zeiger 0 wieder anzeigen soll, dass die Werthe der Ableitungen an der Stelle $\zeta = 0$ gemeint sind.

Nun wird:

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 = \zeta^2 R_1(\zeta),$$

wobei

$$R_1(\zeta) = (a_{11}^{(\prime)} - a_{22}^{(\prime)})^2 + 4a_{12}^{(\prime)2} + [(a_{11}^{(\prime)} - a_{22}^{(\prime)})(a_{11}^{(\prime\prime)} - a_{22}^{(\prime\prime)}) + 4a_{12}^{(\prime)}a_{12}^{(\prime\prime)}]\zeta$$
$$+ \frac{1}{4}[(a_{11}^{(\prime\prime)} - a_{22}^{(\prime\prime)})^2 + 4a_{12}^{(\prime\prime)2}]\zeta^2 \qquad 51)$$

ist.

Bemerkt man den Zusammenhang:

$$a_{ik}^{(0)} = a_{ik}^{(00)} \qquad a_{ik}^{(\prime)} = a_{ik}^{(10)}\lambda + a_{ik}^{(01)}\mu \qquad a_{ik}^{(\prime\prime)} = a_{ik}^{(20)}\lambda^2 + 2a_{ik}^{(11)}\lambda\mu + a_{ik}^{(02)}\mu^2,$$

so sind die Grössen $a_{ik}^{(0)}, a_{ik}^{(\prime)}, a_{ik}^{(\prime\prime)}$ mittelst der Tabellen 1 und 2 leicht zusammenstellen.

Insbesondere erhält man (nach Absonderung des Proportionalitätsfactors a^2):

$$a_{11}^{(\prime)} = u'(u'x' - v'y' - 1)\lambda + [u'v'x' + (2u'^2 + v'^2)y' - 3v']\mu$$
$$a_{12}^{(\prime)} = v'(u'x' - v'y' + 1)\lambda + u'(-u'x' + v'y' + 1)\mu$$
$$a_{22}^{(\prime)} = [(u'^2 + 2v'^2)x' + u'v'y' - 3u']\lambda - v'(u'x' - v'y' + 1)\mu$$

und somit:

$$a_{11}^{(\prime)} - a_{22}^{(\prime)} = 2(-v'^2x' - u'v'y' + u')\lambda + 2(u'v'x' + u'^2y' - v')\mu.$$

Aus $a_{11}^{(\prime)} - a_{22}^{(\prime)} = 0$ und $a_{12}^{(\prime)} = 0$ würde daher folgen, da λ und μ nicht beide zugleich verschwinden:

$$\begin{vmatrix} -v'^2x'-u'v'y'+u' & u'v'x'+u'^2y'-v' \\ u'v'x'-v'^2y'+v' & -u'^2x'+u'v'y'+u' \end{vmatrix}$$
$$= -(u'^2+v'^2)(u'x'+v'y'-1) = 0.$$

Dies ist aber nach dem Satze II) unmöglich. $R_1(0)$ ist daher sicher von Null verschieden. $\sqrt{R_1(\zeta)}$ kann somit nach Potenzen von ζ entwickelt werden und damit auch die Grössen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= -\frac{A}{2A_{33}^2}\left[a_{11}+a_{22}+\zeta\sqrt{R_1(\zeta)}\right] \\ \mathfrak{B} &= -\frac{A}{2A_{33}^2}\left[a_{11}+a_{22}-\zeta\sqrt{R_1(\zeta)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{52)}$$

und die Function:

$$\bar{\mathfrak{f}}(\zeta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\mathfrak{A}\cos^2\varphi+\mathfrak{B}\sin^2\varphi}\, d\varphi.$$

Die nothwendige Bedingung dafür, dass $\bar{\mathfrak{f}}(0)$ ein Minimum sei, ist daher:

$$2\left(\frac{d\bar{\mathfrak{f}}(\zeta)}{d\zeta}\right)_0 = \left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}}$$
$$+\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\zeta}\right)_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\mathfrak{A}_0\cos^2\varphi+\mathfrak{B}_0\sin^2\varphi}} = 0.$$

Wegen $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 = a^2$ und $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}$ reducirt sich dieselbe auf:

$$\left(\frac{d(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta}\right)_0 = 0. \tag{53)}$$

Die Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B} = -\frac{A}{A_{33}^2}(a_{11}+a_{22})$ kann aber auch noch für $a^2-b^2 = 0$ nach Potenzen von ξ und η entwickelt werden und ist daher:

$$\left(\frac{d(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta}\right)_0 = \left(\frac{\partial(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi}\right)_0 \lambda + \left(\frac{\partial(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\eta}\right)_0 \mu.$$

Man kann somit zur Darstellung der Bedingung 53) die Formeln 10) benützen und erhält:

$$[(2-a^2v'^2)x'+a^2u'v'y'-a^2u']\lambda+[a^2u'v'x'+(2-a^2u'^2)y'-a^2v']\mu=0.$$

Diese Bedingung muss für alle Werthepaare λ, μ erfüllt sein; also ergeben sich für x' und y' die linearen Gleichungen:

$$(2-a^2v'^2)x'+a^2u'v'y'=a^2u'$$
$$a^2u'v'x'+(2-a^2u'^2)y'=a^2v'.$$

Die Determinante $2[2-a^2(u'^2+v'^2)]$ derselben ist zugleich mit $u'x'+v'y'-1$ von Null verschieden. Nach Absonderung des Factors $2-a^2(u'^2+v'^2)$ findet man:

$$x'=\frac{a^2}{2}u' \qquad y'=\frac{a^2}{2}v'. \tag{54}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung 1) ein, so ergibt sich für u' und v' die Bedingung:

$$\frac{a^2}{4}(u'^2+v'^2)=1, \tag{55}$$

welche aussagt, dass die Gerade $P''P'''$ den mit E concentrischen Kreis $\mathfrak{C}$ vom Radius $\frac{a}{2}$ berühren muss, welcher dem Werthe $t=\frac{1}{2}$ für $\varkappa=0$ entspricht.

Wegen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi=\frac{3\pi}{16} \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin^2\varphi\,d\varphi=\frac{\pi}{16}$$

und $\mathfrak{A}_0=\mathfrak{B}_0=a^2$ ist:

$$\mathfrak{f}''(0)=\frac{\pi}{16a}\left(\frac{d^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta^2}\right)_0-\frac{3\pi}{64a^3}\left[\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0^2+\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\zeta}\right)_0^2\right]-\frac{\pi}{32a^3}\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0\left(\frac{d\mathfrak{B}}{d\zeta}\right)_0$$
$$=\frac{\pi}{16a^3}\left[2a^2\left(\frac{d^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta^2}\right)_0-\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0^2\right]$$

(mit Rücksicht auf (53.)

Da die Summe $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}$ nach Potenzen von ξ und η entwickelt werden kann, ist:

$$\left(\frac{d^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta^2}\right)_0=\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi^2}\right)_0\lambda^2+2\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0\lambda\mu+\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\eta^2}\right)_0\mu^2.$$

Aus 33) und 34) ergibt sich zunächst:

$$\left(A_{33}^4\,\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi^2}\right)_0=$$

$$=2a^6b^{24}\mathfrak{a}^7(a-\mathfrak{a})^6\{(a-\mathfrak{a})[-a^2(a-\mathfrak{a})(2a-\mathfrak{a})+b^2\mathfrak{a}(3a-\mathfrak{a})]g^2$$
$$+2a[a^2(a-\mathfrak{a})^2-b^2\mathfrak{a}(a-3\mathfrak{a})]x'^2h^2+a^2(a^2+b^2)\mathfrak{a}(a^2-x'^2)j^2\}g^6$$

$$\left(A_{33}^4\,\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0=$$

$$=2a^9b^{22}\mathfrak{a}^6(a-\mathfrak{a})^6[a^2(a-\mathfrak{a})(a^2-a\mathfrak{a}-2\mathfrak{a}^2)-b^2\mathfrak{a}(2a^2-5a\mathfrak{a}+2\mathfrak{a}^2)]g^6$$

$$\left(A_{33}^4\,\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\eta^2}\right)_0=$$

$$=2a^8b^{22}\mathfrak{a}^6(a-\mathfrak{a})^7\{\mathfrak{a}[a^2(a-\mathfrak{a})(2a+\mathfrak{a})-b^2\mathfrak{a}(a+\mathfrak{a})]g^2$$
$$+a^2(a-\mathfrak{a})(a^2+b^2)x'^2h^2+2a[a^2(a-\mathfrak{a})(2a-3\mathfrak{a})+b^2\mathfrak{a}^2](a^2-x'^2)j^2\}g^6$$

Setzt man darin $a^2=b^2$, $\mathfrak{a}=\frac{a}{2}$, also: $g=\frac{a^3}{4}$, $A_{33}^{(00)}=\frac{a^{18}}{2^8}$ [26)], $h=x'^2-\frac{3}{4}a^2$, $j=x'^2-\frac{1}{4}a^2$ und bemerkt: x'^2h^2+ $+(a^2-x'^2)j^2=\frac{a^6}{2^4}$, so ergibt sich:

$$\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi^2}\right)_0=2^2.5\quad\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\xi\partial\eta}\right)_0=0\quad\left(\frac{\partial^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{\partial\eta^2}\right)_0=2^2.5$$

und somit:

$$\left(\frac{d^2(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})}{d\zeta^2}\right)_0=20(\lambda^2+\mu^2).$$

Wegen $A_{33}^{(10)}=A_{33}^{(01)}=0$ [26)], $A^{(10)}=A^{(01)}=0$ [29)]

$$a_{11}^{(1)}=\frac{a^5}{2}(x'h\lambda+y'j\mu)\qquad a_{22}^{(1)}=-\frac{a^5}{2}(x'h\lambda+y'j\mu)$$

$$a_{12}^{(1)}=\frac{a^5}{2}(y'j\lambda-x'h\mu)\quad\text{[Tab. 3]}$$

$\left(\text{für } \mathfrak{a} = \frac{a}{2}\right)$ ist

$$\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0 = -\frac{A^{(0)}}{2(A_{33}^{(0)})^2}\sqrt{R_1(0)} \qquad [52)]$$

$$A^{(0)} = -\frac{a^{29}}{2^{12}} \quad [28)] \qquad \frac{A^{(0)}}{2(A_{33}^{(0)})^2} = \frac{2^3}{a^7}.$$

Nach 51) ist:

$$R_1(0) = (a_{11}^{(\prime)} - a_{22}^{(\prime)})^2 + 4a_{12}^{(\prime)\,2} = a^{10}[(x'h\lambda + y'j\mu)^2 + (y'j\lambda - x'h\mu)^2]$$
$$= a^{10}(\lambda^2+\mu^2)(x'^2h^2+y'^2j^2) = \frac{a^{16}}{2^4}(\lambda^2+\mu^2).$$

Also findet sich: $\left(\frac{d\mathfrak{A}}{d\zeta}\right)_0^2 = 4a^2(\lambda^2+\mu^2)$ und somit:

$$\overline{\mathfrak{f}}''(0) = \frac{\pi}{16a^3}[40a^2(\lambda^2+\mu^2) - 4a^2(\lambda^2+\mu^2)] = \frac{9\pi}{4a}(\lambda^2+\mu^2). \quad 56)$$

Es ist daher auch für $a^2 - b^2 = 0$, $\mathfrak{f}(0,0)$ ein Minimum und damit vollständig der Satz bewiesen:

III) Die sämmtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ auf einer gegebenen Ellipse E, für welche der Umfang von E ein Minimum ist, sind diejenigen, welche zugleich der Ellipse $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind.

Es ist nun weiter zu untersuchen, ob es ausser E nicht noch andere Ellipsen gibt, welche einem solchen Dreiecke $P'P''P'''$ umgeschrieben sind und deren Umfang ein Minimum ist; die Mittelpunkte derselben müssten nach dem Satze I) jedenfalls auf der dem Dreiecke $P'P''P'''$ entsprechenden Curve $\mathfrak{C}$ liegen.

Die Beantwortung dieser Frage erfordert den Beweis eines Satzes, der erst im dritten Abschnitte gegeben werden kann. Es wird sich dort herausstellen, dass das Verhältniss $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ $(\mathfrak{B} \leqq \mathfrak{A})$ der Quadrate der Halbaxen einer Ellipse, welche durch die drei Punkte $P'P''P'''$ hindurchgeht, durch die Forderung, dass ihr Umfang ein Minimum sein soll, eindeutig bestimmt ist.

Dies vorausgesetzt lässt sich dann allerdings beweisen, dass der Umfang der Ellipse E das einzige Minimum ist, dass

also E in der That die Ellipse vom kleinsten Umfange durch P', P'', P''' ist, und wird damit eigentlich erst gerechtfertigt, von einer solchen Ellipse überhaupt zu sprechen, indem ja von vornherein keineswegs evident ist, dass es nur eine und nicht mehrere gibt.

Angenommen nämlich, es gäbe eine von E verschiedene Ellipse E_1 mit den Halbaxen a_1 und $b_1 \leqq a_1$, welche durch P', P'', P''' geht und deren Umfang ebenfalls ein Minimum ist, so ist nach dem vorausgesetzten Satze: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b}{a}$, d. h. E und E_1 sind ähnliche Ellipsen.

Denkt man sich nun von der Ebene, in welcher E_1 liegt, eine ähnliche Abbildung so gemacht, dass je zwei entsprechende Strecken, s_1 in der Ebene von E_1 und s_2 in der Abbildung, sich verhalten wie a_1 zu a oder b_1 zu b, so geht dabei E_1 in eine Ellipse E_2 über, deren Halbaxen a_2 und b_2, beziehungsweise gleich a und b sind, welche also mit E congruent ist.

Das Dreieck $P'P''P'''$, als ein Dreieck auf E_1 betrachtet, geht in ein ihm ähnliches Dreieck $P_2'P_2''P_2'''$ auf E_2 über und hört dabei offenbar nicht auf, den Bedingungen des Satzes III) zu genügen.

Wenn es also eine von E verschiedene Ellipse E_1 durch $P'P''P'''$ gibt, deren Umfang ein Minimum ist, so muss es unter den sämmtlichen Dreiecken auf E, welche zugleich $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind, mindestens eines geben, $P_1'P_1''P_1'''$, welches zu $P'P''P'''$ ähnlich, aber nicht congruent mit ihm ist.

Es lässt sich aber zeigen, dass ein solches Dreieck nicht vorhanden ist.

Da es nämlich zu jedem Dreiecke $P_1'P_1''P_1'''$ noch drei congruente gibt, die man dadurch erhält, dass man das Vorzeichen der ersten Coordinaten oder der zweiten oder aller Coordinaten der Eckpunkte zugleich in das entgegengesetzte verwandelt, so kann man annehmen, dass die entsprechenden Punkte P' und P_1' der beiden ähnlichen Dreiecke $P'P''P'''$ und $P_1'P_1''P_1'''$ in einem und demselben Ellipsenquadranten liegen, z. B. in dem, der durch die Scheitel $a|0$ und $0|b$ begrenzt wird.

Bezeichnet man die inneren Winkel dieser Dreieke bei P' und P_1' mit w' und w_1', so sind diese Winkel gleich, wenn die

beiden Dreiecke desselben Sinnes sind, entgegengesetzt gleich, wenn die Dreiecke verschiedenen Sinnes sind; jedenfalls ist $\cos w' = \cos w'_1$.

Wenn sich daher zeigen lässt, dass für $a^2-b^2>0$ $\cos w'$ jeden seiner Werthe nur einmal annimmt, wenn P' den Quadranten von $a|0$ nach $0|b$ durchläuft (ohne einen der beiden anderen Scheitel der Ellipse zu passiren), indem er dabei beständig abnimmt, so folgt daraus nothwendig, dass P'_1 mit P' zusammenfallen muss; dann fallen aber auch P''_1 und P'''_1 mit P'' und P''' zusammen und ist damit gezeigt, dass es unter den Dreiecken, welche dem Satze III) entsprechen, keines gibt, welches zu einem anderen ähnlich ist, ohne mit ihm congruent zu sein.

Das Tangentenpaar aus dem Punkte P' auf E an die Ellipse $\frac{x^2}{\mathfrak{a}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{b}^2}-1=0$ wird dargestellt durch die Gleichung:

$$(\mathfrak{b}^2x'^2+\mathfrak{a}^2y'^2-\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2)(\mathfrak{b}^2x^2+\mathfrak{a}^2y^2-\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2)-(\mathfrak{b}^2x'x+\mathfrak{a}^2y'y-\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2)^2=0.$$

Hieraus folgt:

$$\cos w' = \frac{x'^2+y'^2-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{\sqrt{(x'^2-y'^2-\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2)^2+4x'^2y'^2}}, \tag{57}$$

wobei der Quadratwurzel ihr positiver Werth zu ertheilen ist. Für den Scheitel $0|a$ nämlich ist $a^2-\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2=a^2[\varkappa(1-t)^2+2t(1-t)]>0$ und der Winkel w' sicher kleiner als ein rechter; die Schnittpunkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ des Tangentenpaares aus $a|0$ an die Ellipse $\mathfrak{E}$ haben ja die Ordinaten $\frac{a\mathfrak{b}}{|\sqrt{a^2-\mathfrak{a}^2}|}$ und $-\frac{a\mathfrak{b}}{|\sqrt{a^2-\mathfrak{a}^2}|}$, liegen also innerhalb der Scheitel der kleinen Axe. Der innere Winkel des Dreieckes der drei Scheitel $a|0, 0|b, 0|-b$ bei $a|0$ ist aber wegen $b<a$ kleiner als ein rechter Winkel.

Setzt man in 57): $x'=a\mathfrak{x}'$ $y'=b\mathfrak{y}'$, wobei $\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2=1$ ist, $\mathfrak{a}=ta$, $\mathfrak{b}=(1-t)b$, $b^2=(1-\varkappa)a^2$, so ergibt sich:

$\cos w' =$

$$= \frac{\varkappa\mathfrak{x}'^2+2(1-\varkappa)t-(2-\varkappa)t^2}{\sqrt{\varkappa\mathfrak{x}'^4+2[2(1-\varkappa)-2(1-\varkappa)(2-\varkappa)t-\varkappa(2-\varkappa)t^2]\mathfrak{x}'^2+t^2[2(1-\varkappa)+\varkappa t]^2}}$$

und daraus:

$$\frac{d \cos w'}{d\mathfrak{x}'} =$$

$$= \frac{4(1-\varkappa)[\varkappa(1-2t)\mathfrak{x}'^2-2(1-\varkappa)t+(6-5\varkappa)t^2-2(2-3\varkappa)t^3-2\varkappa t^4]\mathfrak{x}'}{[\sqrt{\varkappa\mathfrak{x}'^4+2[2(1-\varkappa)-2(1-\varkappa)(2-\varkappa)t-\varkappa(2-\varkappa)t^2]\mathfrak{x}'^2+t^2[2(1-\varkappa)+\varkappa t]^2}]^3} \quad 58)$$

Für kleine Werthe von $\varkappa$ im Intervalle $0<\varkappa<1$ hat der Zähler das Vorzeichen von $\mathfrak{x}'$, ist somit positiv, wenn $\mathfrak{x}'$ das Intervall $0<\mathfrak{x}'\leqq 1$ durchläuft, denn die Entwicklung des Coëfficienten von $4(1-\varkappa)\mathfrak{x}'$ beginnt mit $\frac{9}{16}\varkappa$.

Ferner lässt sich zeigen, dass dieser Coëfficient:

$$\varkappa(1-2t)\mathfrak{x}'^2-2(1-\varkappa)t+(6-5\varkappa)t^2-2(2-3\varkappa)t^3-2\varkappa t^4$$

für alle betrachteten Werthe von $\mathfrak{x}'^2\leqq 1$ und $\varkappa$ positiv ist.

Hält man $\varkappa$ fest, so kann ein Zeichenwechsel nur eintreten, wenn:

$$\mathfrak{x}'^2 = \frac{-2(1-\varkappa)t+(6-5\varkappa)t^2-2(2-3\varkappa)t^3-2\varkappa t^4}{\varkappa(2t-1)}$$

ist; einen solchen Werth von $\mathfrak{x}'^2$ in Intervalle $0\leqq\mathfrak{x}'^2\leqq 1$ gibt es aber nicht, denn es ist

$$-2(1-\varkappa)t+(6-5\varkappa)t^2-2(2-3\varkappa)t^3-2\varkappa t^4>\varkappa(2t-1)$$

oder

$$\varkappa-2t+(6-5\varkappa)t^2-2(2-3\varkappa)t^3-2\varkappa t^4>0,$$

wie man sofort erkennt, wenn man den Ausdruck linker Hand in der Form:

$$(1-t)\{\varkappa(1-t)[1+2t(1-t)]+2t(2t-1)\}$$

anschreibt, in der jetzt die einzelnen Bestandtheile sämmtlich positiv sind, da für $0<\varkappa<1$ $\frac{1}{2}<t<1$ ist.

Damit ist in der That gezeigt, dass für $a^2-b^2>0$ der Winkel w' beständig wächst, wenn der Punkt P' den Quadranten $a|0$ bis $0|b$ durchläuft, ohne einen der beiden anderen Scheitel zu passiren.

Es kommt somit ein bestimmter Winkel w' in jedem Ellipsenquadranten höchstens einmal vor, und es gibt daher auch auf E

kein zu $P'P''P'''$ ähnliches Dreieck, welches nicht mit ihm congruent wäre und desswegen auch keine von E verschiedene Ellipse durch $P'P''P'''$, deren Umfang ein Minimum ist.

Nun kann man das Resultat der Untersuchung in dem Satze aussprechen:

Die sämmtlichen Dreiecke $P'P''P'''$ auf einer gegebenen Ellipse E, für welche E die Ellipse vom kleinsten Umfange ist, sind diejenigen, welche zugleich der Ellipse $\mathfrak{E}$ umgeschrieben sind. IV)

Was endlich die numerische Berechnung der Halbaxen $\mathfrak{a} = ta$ und $\mathfrak{b} = (1-t)b$ oder also der Function t im Intervalle $0 < \varkappa < 1$ betrifft, so ist die Potenzreihe 47) ihrer schwachen Convergenz wegen wohl nur für sehr kleine Werthe von $\varkappa$ praktisch verwendbar; für grössere Werthe von $\varkappa$ wird man sich daher der rapid convergirenden Reihen bedienen, welche die Theorie der Thetafunctionen an die Hand gibt.

Ich will die betreffenden Formeln aus der von Herrn H. A. Schwarz bearbeiteten und herausgegebenen Sammlung, „Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass", Göttingen 1883, hier zusammenstellen, wobei ich nur statt k^2 $\varkappa$ schreibe.

Setzt man $e_1 - e_3 = 1$, $\sqrt{e_1 - e_3} = 1$, so ist $e_2 - e_3 = \varkappa$ und wegen $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

$$e_1 = \frac{2-\varkappa}{3} \qquad e_2 = \frac{-1+2\varkappa}{3} \qquad e_3 = \frac{-1-\varkappa}{3}, \quad (0 < \varkappa < 1)$$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-\varkappa t^2}} = \omega_1 \qquad \text{[Art. 27]}$$

$$\mathrm{E} = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\varkappa t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \eta_1 + e_1 \omega_1 \qquad \text{[Art. 29]}$$

$\sqrt{1-t^2}$ und $\sqrt{1-\varkappa t^2}$ sind positiv zu nehmen.

Damit ergibt sich:

$$t = \frac{-(1-\varkappa)K + \mathrm{E}}{\varkappa \mathrm{E}} = \frac{1}{\varkappa} \frac{\eta_1 + e_2 \omega_1}{\eta_1 + e_1 \omega_1}. \qquad 59)$$

Zur Berechnung der Grössen ω_1 und η_1 dienen nun die Formeln des Art. 45.

Setzt man:

$$l = \frac{1 - \sqrt[4]{1-\varkappa}}{1 + \sqrt[4]{1-\varkappa}} \tag{60}$$

(wobei der $\sqrt[4]{1-\varkappa}$ ihr positiver Werth zu ertheilen ist),

$$h = \frac{l}{2} + 2\left(\frac{l}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l}{2}\right)^{13} + \ldots, \tag{61}$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2\omega_1}{\pi} = \dfrac{4}{(1+\sqrt[4]{1-\varkappa})^2}(1+2h^4+2h^{16}+\ldots)^2 \\ \text{oder auch:} \\ \dfrac{2\omega_1}{\pi} = (1+2h+2h^4+2h^9+\ldots)^2 \end{array}\right\} \tag{62}$$

$$2\eta_1\omega_1 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h^2+5^3h^6-7^3h^{12}+\ldots}{1-3h^2+5h^6-7h^{12}+\ldots}. \tag{63}$$

Setzt man anderseits:

$$l_1 = \frac{1-\sqrt[4]{\varkappa}}{1+\sqrt[4]{\varkappa}} \tag{64}$$

(wobei der $\sqrt[4]{\varkappa}$ ihr positiver Werth zu ertheilen ist),

$$h_1 = \frac{l_1}{2} + 2\left(\frac{l_1}{2}\right)^5 + 15\left(\frac{l_1}{2}\right)^9 + 150\left(\frac{l_1}{2}\right)^{13} + \ldots, \tag{65}$$

so ist:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2\omega_3}{\pi i} = \dfrac{4}{(1+\sqrt[4]{k})^2}(1+2h_1^4+2h_1^{16}+\ldots)^2 \\ \text{oder auch:} \\ \dfrac{2\omega_3}{\pi i} = (1+2h_1+2h_1^4+2h_1^9+\ldots)^2 \end{array}\right\} \tag{66}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_3}{\pi i}\log\operatorname{nat}\left(\frac{1}{h_1}\right), \tag{67}$$

wobei dem natürlichen Logarithmus sein Hauptwerth zu ertheilen ist,

$$2\eta_3\omega_3 = \frac{\pi^2}{6}\,\frac{1-3^3h_1^2+5^3h_1^6-7^3h_1^{12}+\dots}{1-3h_1^2+5h_1^6-7h_1^{12}+\dots} \tag{68}$$

$$\eta_1\omega_3 - \omega_1\eta_3 = \frac{1}{2}\pi i. \tag{69}$$

Je nachdem $\varkappa \lesseqgtr \frac{1}{2}$ ist, ist $h \lesseqgtr h_1$; man wird daher im Intervalle $0 < \varkappa \leqq \frac{1}{2}$ die Formeln 60) bis 63) benützen, dagegen im Intervalle $\frac{1}{2} \leqq \varkappa < 1$ die Formeln 64) bis 69).

III. SITZUNG VOM 23. JÄNNER 1890.

Der Secretär legt das Heft X. (December 1889), Schlussheft des X. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die Commission für das Zweihundertjährige Jubiläum der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg übermittelt die Einladung zu der am 15. Februar d. J. stattfindenden feierlichen Sitzung dieser Gesellschaft.

Das c. M. Herr Prof. G. v. Escherich in Wien übersendet eine Abhandlung von Dr. A. Schwarz, betitelt: „Zur Theorie der reellen linearen Transformationen und der Lobatschefsky'schen Geometrie".

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung des Herrn Edmund Jüssen in Wien: „Über pliocäne Korallen von der Insel Rhodus" vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Edmund Poppy, Ingenieur in Wien, vor, mit der Aufschrift: „Abhandlung über die Theorie selbstthätiger Ventile, mit besonderer Rücksicht auf das vom Verfasser erfundene und patentirte Ventil-System und dessen Anwendung bei der Construction schnell gehender Pumpen, Gebläse und Compressoren".

Das c. M. Prof. Victor v. Ebner in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Strittige Fragen über den Bau des Zahnschmelzes".

Herr Dr. L. v. Hepperger, Privatdocent für Astronomie an der k. k. Universität zu Wien, überreicht eine Abhandlung betitelt: „Integration der Gleichungen für die Störungen der Elemente periodischer Kometen von geringer Neigung durch die Planeten Erde, Venus und Mercur".

Über die Veränderung elektrostatischer Kraftwirkungen durch eine leitende Wand

von

Dr. Gottlieb Adler,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. December 1889.)

Die vorliegende Abhandlung[1] führt die Untersuchung der Veränderung, welche eine leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der mechanischen Kraftwirkung elektrischer Systeme hervorbringt, für zwei einfachste Fälle durch.

Der erste Theil der Abhandlung untersucht jene Änderung, welche eine leitende Wand in der wechselseitigen mechanischen Kraftwirkung zweier elektrisch geladener Punkte bewirkt. Die Art der diesbezüglich gestellten Fragen und der Beantwortung, welche dieselben durch eine sehr einfache, auf Thomson's Theorie der elektrischen Bilder basirende Rechnung finden, will ich an dem speciellen Beispiele der Anziehung illustriren. Für diese ergibt die geführte Rechnung, dass es für die Lagen des angezogenen elektrischen Massenpunktes zwischen dem anziehenden und der leitenden Wand eine kritische Stelle gibt, diesseits welcher jene eine Schwächung, jenseits welcher sie eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung bewirkt; dass weiters innerhalb der letzteren Zone ein Punkt existirt, in welchem diese Verstärkung einen Maximalwerth erreicht. Der kritische Punkt sowohl, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung der Wand liegen umso näher an letzterer, je stärker die entferntere Masse im Verhältniss zur näheren geladen ist. Mit dem Betrage dieses Verhältnisses steigt auch der Maximalbetrag der

[1] Den wesentlichen Inhalt dieser Abhandlung enthält eine vorläufige Mittheilung des akademischen Anzeigers Nr. 17 vom 5. Juli 1888.

Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt; für den Grenzfall, ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld, in das der angezogene elektrische Punkt gebracht worden, vermag die Verstärkungswirkung der Wand $100^0/_0$ der ursprünglichen Anziehung zu erreichen.

Der zweite Theil der Abhandlung untersucht jene Veränderung, welche in der Anziehung eintritt, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Kugel von einem influenzirenden elektrischen Punkte erfährt, sobald man hinter die Kugel eine unendliche leitende, zur Erde abgeleitete Ebene aufstellt. Thomson's Methode der elektrischen Bilder auf diese Anordnung angewendet, ergäbe die eintretende Veränderung durch eine doppelt unendliche Reihe und würde so auf allzugrosse rechnerische Schwierigkeiten führen.

Die Rechnung wird daher nach einer anderen Methode geführt, welche ich in einer früheren Abhandlung[1] auseinander gesetzt habe, und die im Wesentlichen auf den Arbeitswerth der Ladung eines Conductors sich gründet; die so geführte Untersuchung ergibt das überraschende Resultat, dass die hinter die Kugel gebrachte leitende Wand in allen Fällen eine Schwächung in jener Anziehung bewirkt, welche die Kugel vom influenzirenden elektrischen Punkte allein erfahren hätte. Diese Schwächung kann, wie die durchgeführte Rechnung weiterhin ergibt, bis auf $35^0/_0$ der ursprünglichen Anziehung steigen, sie ist also mit der bekannten Thomson'schen Schirmwirkung, welche eine zwischen den elektrischen Punkt und die Kugel gebrachte, zur Erde abgeleitete leitende Ebene verursacht, an Grösse vergleichbar.

Es liess sich somit diese Schwächung mit Leichtigkeit experimentell nachweisen, aber nicht blos an einer zur Erde abgeleiteten Kugel, sondern sie trat in gleicher Weise bei beliebig gestalteten, zur Erde abgeleiteten elektrischen Pendeln ein, sobald während ihrer Anziehung durch einen elektrischen Körper hinter sie die zur Erde abgeleitete leitende Wand gebracht wurde.[2]

---

[1] Siehe diese Berichte, Bd. 96, 1887.

[2] Bekanntlich wird die Thomson'sche Schirmwirkung dazu verwendet, elektrostatische Systeme durch eine leitende, zur Erde abgeleitete Umhüllung störenden elektrischen Einflüssen, die von aussen kommen, zu

§. 1.

Die Veränderung, welche die Anwesenheit einer leitenden, zur Erde abgeleiteten Wand in der gegenseitigen mechanischen Kraftwirkung elektrisch geladener Punkte hervorbringt, wird, wie unmittelbar ersichtlich, dadurch bewirkt, dass die erstere unter dem Einflusse der elektrischen Massen mit influenzirter Ladung sich bedeckt.

Nun ist bekanntlich die Ladung, welche in einer unendlichen, leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene durch die Influenzwirkung eines elektrischen Punktes auftritt, in ihrem Betrage der Ladung dieses letzteren gleich, dem Zeichen nach entgegengesetzt, und ihre Vertheilung so beschaffen, dass sie für alle Punkte des Raumes, die mit dem influenzirenden elektrischen Punkte auf derselben Seite der Ebene liegen, — es ist dies das in Hinkunft allein zu betrachtende elektrische Feld — genau so wirkt, als wäre die gesammte Ladung in einem einzigen Punkte vereinigt, der ebenso weit hinter der Ebene liegt, als der influenzirende Punkt vor derselben.

Jener elektrische Punkt, der vermöge seiner eben angegebenen Lage und Ladung die Wirkung der in der leitenden Wand influenzirten Ladung für das ganze in Betracht kommende elektrische Feld vollständig zu ersetzen vermag, wird von Thomson als das elektrische Bild des influenzirenden Punktes bezüglich der Ebene bezeichnet.

Hieraus ergibt sich, dass die Veränderung, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Wand in der mechanischen Kraftwirkung zweier elektrischer Punkte auf einander bewirkt, einfach dadurch sich berechnen lässt, dass die mechanische Kraftwirkung der elektrischen Bilder beider bezüglich der Ebene in Anschlag gebracht wird.

So einfach dies der Rechnung zu Grunde gelegte Princip ist, und wiewohl blos jene Fälle untersucht werden, wo beide

---

entziehen. Die hier geführte Untersuchung zeigt jedoch, dass diese Umhüllung unter Umständen (ausgenommen sind vor Allem Fälle, wo die leitende Hülle, wie beispielsweise in Thomson's Quadrantenelektrometer, selbst integrirender Bestandtheil des elektrischen Systems ist) erhebliche Störungen der ursprünglichen mechanischen Kraftwirkung zur Folge haben kann.

elektrische Punkte auf derselben Normalen zur leitenden Ebene gelegen sind, ist gleichwohl die durch die letztere bewirkte Veränderung der ursprünglichen mechanischen Kraftwirkung, wie sie sich durch die geführte Rechnung ergibt, in der Mehrzahl der Fälle wohl kaum von vornherein vorherzusehen.

§. 1*a*.

Am leichtesten von vornherein zu übersehen ist jene Veränderung, welche die leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der mechanischen Kraftwirkung zweier gleichnamig geladener elektrischer Punkte hervorbringt.

Es bezeichne e die Ladung des die mechanische Kraftwirkung erfahrenden, me die Ladung des dieselbe ausübenden elektrischen Punktes, d den Abstand des letzteren von der leitenden Ebene. Es mag dann zunächst jene Configuration in Rechnung gezogen werden, wo der abgestossene elektrische Punkt sich zwischen dem abstossenden und der leitenden Ebene befindet, in der Distanz r vom ersteren, mithin im Abstande $d—r$ vom letzteren.

Die Veränderung der ursprünglichen Abstossung wird durch das Hinzutreten zweier elektrischer Bilder verursacht; erstens des elektrischen Bildes des abstossenden Punktes von der Ladung $—me$ und der Distanz d hinter der Ebene, zweitens des elektrischen Bildes des abgestossenen Punktes von der Ladung $—e$ und dem Abstande $(d—r)$ hinter der Ebene. Beide Bilder verstärken, wie unmittelbar ersichtlich, die ursprüngliche Abstossung auf den zwischenliegenden elektrischen Punkt um den Betrag

$$V = \frac{e^2}{4(d-r)^2} + \frac{me^2}{(2d-r)^2}\,. \qquad 1a)$$

Der Betrag dieser Verstärkung der ursprünglichen Kraftwirkung nimmt mit wachsender Annäherung der abgestossenen Masse an die Ebene stetig zu und erreicht unendlich nahe der letzteren einen unendlich hohen Werth.

Was die resultirende Abstossung

$$K' = \frac{me^2}{r^2} + \frac{e^2}{4(d-r)^2} + \frac{me^2}{(2d-r)^2} \qquad 2a)$$

anlangt, so besteht für dieselbe eine Minimumstelle. Setzt man $\frac{dK'}{dr} = 0$, so ergibt sich jene Distanz r_m, in welcher der elektrische Punkt e ein Minimum der Abstossung erfährt, in ihre Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_m} - 1\right)^3 \left[1 - \frac{1}{\left(2\frac{d}{r_m} - 1\right)^3}\right].$$

Es ergibt sich so

für das Ladungsverhältniss $m = 0 \cdot 01;\quad r_m = \frac{1}{4} d$

$m = 0 \cdot 031;\quad r_m = \frac{1}{3} d$

$m = 0 \cdot 25;\quad r_m = \frac{1}{2} d$

$m = 2 \cdot 3;\quad r_m = \frac{2}{3} d$

$m = 21 \cdot 6;\quad r_m = \frac{4}{5} d$

$m = 43;\quad r_m = \frac{5}{6} d$

$m = 250;\quad r_m = \frac{8}{9} d$

$m = 600;\quad r_m = \frac{10}{11} d.$

Je stärker also der abstossende elektrische Punkt im Verhältnisse zum abgestossenen geladen ist, desto näher rückt die Minimumstelle der Kraftwirkung an die leitende Ebene.

§. 1 *b*.

Es mag nun die Berechnung jener Veränderung geführt werden, welche die leitende Ebene in der Abstossung auf den ihr ferneren elektrischen Punkt bewirkt. Bezeichnet wieder d die Distanz der abstossenden elektrischen Masse me von der leitenden

Ebene, r ihren Abstand von der abgestossenen elektrischen Masse e, dann ist für die in Frage stehende Configuration $(d+r)$ der Abstand der letzteren von der Ebene. Die Veränderung der ursprünglichen Kraftwirkung wird durch das Hinzutreten der zwei elektrischen Bilder, eines von der Ladung $-me$ in der Distanz d hinter der Ebene und eines zweiten von der Ladung $-e$ in der Distanz $d+r$ hinter der Ebene hervorgebracht.

Beide elektrische Bilder schwächen, wie unmittelbar ersichtlich, die ursprüngliche Abstossung $K = \frac{me^2}{r^2}$, und zwar zusammen um den Betrag

$$S = \frac{e^2}{4(d+r)^2} + \frac{me^2}{(2d+r)^2}. \tag{1b}$$

Aus dem Ausdrucke für die solchergestalt resultirende Kraftwirkung

$$K' = \frac{me^2}{r^2} - \frac{e^2}{4(d+r)^2} - \frac{me^2}{(2d+r)^2} \tag{2b}$$

ergibt sich, dass es für die Lagen des elektrischen Punktes e eine kritische Stelle gibt, jenseits welcher die Abstossung in eine Anziehung übergeht.

Diese kritische Distanz r_0, in welcher die resultirende mechanische Kraftwirkung $K' = 0$ ist, ergibt sich aus 2 b) in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_0} + 1\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(2\frac{d}{r_0} + 1\right)^2}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältniss $m = 0 \cdot 03$; $r_0 = \frac{d}{2}$

$m = 0 \cdot 07$; $r_0 = d$

$m = 0 \cdot 15$; $r_0 = 2d$

$m = 0 \cdot 6$; $r_0 = 9d$

$m = 1 \cdot 42$; $r_0 = 20d$

$m = 3 \cdot 03$; $r_0 = 50d$

$m = 6$; $r_0 = 100d$.

Es zeigt sich somit, dass dieser kritische Punkt, der die Zone der Abstossung von der bis in unendliche Distanz sich erstreckenden Zone der Anziehung scheidet, umso weiter hinausrückt, je stärker der abstossende elektrische Punkt im Vergleiche zum abgestossenen geladen ist.

In der Zone der Anziehung existirt eine Stelle r_m, in welcher der Betrag derselben ein Maximum erreicht. Sie ergibt sich aus $\frac{dK'}{dr} = 0$ in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m, gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_m} + 1\right)^2 \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{2d}{r_m} + 1\right)^2}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältniss $m = 0 \cdot 009$; $r_m = \frac{d}{2}$

$m = 0 \cdot 031$; $r_m = d$

$m = 0 \cdot 093$; $r_m = 2d$

$m = 0 \cdot 5$; $r_m = 10d$.

Es rückt somit dieser Punkt, in dem der elektrische Punkt e vom gleichnamig geladenen me das Maximum der Anziehung erfährt, umso weiter von der leitenden Ebene fort, je stärker der letztere Punkt im Verhältnisse zum ersteren geladen ist.

§. 1c.

Ungleich interessanter, weil von vorneherein schwerer zu übersehen als die Ergebnisse des vorigen Paragraphen, gestalten sich die Verhältnisse bei jener Änderung, die eine leitende, zur Erde abgeleitete Ebene in der Anziehung zweier entgegengesetzt geladener elektrischer Punkte hervorbringt.

Betrachten wir zunächst jene Configuration, wo der angezogene elektrische Punkt von der Ladung $-e$ zwischen der anziehenden Masse me und der leitenden Ebene liegt; bezeichnet d die Distanz der letzteren Masse von der leitenden Ebene und r ihren Abstand von der angezogenen Masse e, so ist der Abstand

der letzteren von der Ebene $d-r$. Von den beiden elektrischen Bildern, welche die Veränderung der ursprünglichen Anziehung $K=-\frac{me^2}{r^2}$ bewirken, hat das Bild der anziehenden Masse die Ladung $-me$ und die Distanz d hinter der Ebene, und verstärkt, wie unmittelbar zu sehen, die ursprüngliche Anziehung um den Betrag $\frac{me^2}{(2d-r)^2}$; das elektrische Bild der angezogenen Masse hingegen besitzt die Ladung e und liegt in der Distanz $d-r$ hinter der Ebene, schwächt somit die ursprüngliche Anziehung um den Betrag $\frac{e^2}{4(d-r)^2}$.

Es ergibt sich somit die unter dem Einflusse der leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene resultirende mechanische Kraftwirkung

$$K' = -\frac{me^2}{r^2} - \frac{me^2}{(2d-r)^2} + \frac{e^2}{4(d+r)^2}. \tag{2c}$$

Zunächst ist aus dieser Formel ersichtlich, dass die resultirende mechanische Kraftwirkung unendlich nahe der anziehenden Masse unendlich grosse negative (Anziehungs-) Werte annimmt, in unendlicher Nähe der Wand hingegen positiv unendlich wird.

Es muss somit eine Nullstelle der resultirenden mechanischen Kraftwirkung geben. Aus $K'=0$ ergibt sich die Distanz r_0, in welcher die resultirende Totalkraft verschwindet, in ihrer Abhängigkeit vom Ladungsverhältnisse m der beiden sich anziehenden elektrischen Punkte, gegeben durch die Gleichung:

$$\frac{1}{4m} = \left(\frac{d}{r_0}-1\right)^2 \left[1-\frac{1}{\left(2\frac{d}{r_0}-1\right)^2}\right].$$

Beispielsweise ist

für das Ladungsverhältniss $m = 0\cdot016$; $r_0 = \frac{d}{3}$

$m = 0\cdot28$; $r_0 = \frac{d}{2}$

$m = 0\cdot69$; $r_0 = \frac{3}{5}d$

für das Ladungsverhältniss $m = 1\cdot\dot{3}\;;\; r_0 = \frac{2}{3}d$

$$m = 3\cdot 5\;;\; r_0 = \frac{3}{4}d$$

$$m = 7\cdot 2\;;\; r_0 = \frac{4}{5}d$$

$$m = 12\cdot 5;\; r_0 = \frac{5}{6}d$$

$$m = 44\cdot\dot{4};\; r_0 = \frac{8}{9}d$$

$$m = 81\cdot 8;\; r_0 = \frac{10}{11}d$$

$$m = 576\;;\; r_0 = \frac{20}{21}d.$$

Es rückt somit der Nullpunkt der resultirenden mechanischen Kraftwirkung umso näher an die leitende Ebene, je stärker die entferntere Masse im Verhältnisse zur näheren geladen ist.

Aus Formel $2c$ ist ersichtlich, dass die leitende, zur Erde abgeleitete Ebene für die zwischengelegene elektrische Masse eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung zur Folge hat, vom Betrage

$$V = e^2\left[\frac{m}{(2d-r)^2} - \frac{1}{4(d-r)^2}\right]. \qquad 1c)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Verstärkung nur dann positive Werthe haben kann, wenn $m > 1$, die entferntere Masse also die stärker geladene ist. Ist $m \leqq 1$, dann bewirkt die Anwesenheit der Wand für alle Lagen eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung, welche mit wachsender Annäherung an die Ebene stetig zunimmt, bis zu unendlich grossen Werthen an dieser selbst.

Für den ersteren Fall, in dem $m > 1$ ist, mag weiterhin untersucht werden, für welche Lagen der angezogenen elektrischen Masse eine effective Verstärkung, für welche eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung eintritt. Aus $1c)$ $V = 0$ ergibt sich die Lage jenes durch den Abstand r_k charak-

terisirten Punktes, welcher die Zone effectiver Verstärkung von jener effectiver Schwächung scheidet:

$$r_k = 2d\frac{2m-1-\sqrt{m}}{4m-1}. \qquad 3c)$$

Eine zweite Frage, die unmittelbar sich aufwirft, ist die: Gibt es in der Zone der Verstärkung der ursprünglichen Anziehung eine Lage für die angezogene Masse, in welcher diese Verstärkung im Verhältnisse zur ursprünglichen Anziehung ein **Maximum** erreicht, einen Punkt also, der gewissermassen ein Brennpunkt für die verstärkende Wirkung der leitenden Ebene darstellt, und weiters, wie gross ist in diesem Punkte das Verhältniss der Verstärkung zur ursprünglichen Anziehung?

Das Verhältniss der Verstärkung V zur ursprünglichen Anziehung $K = \frac{me^2}{r^2}$ ist

$$v = \frac{1}{\left(2\frac{d}{r}-1\right)^2} - \frac{1}{4m\left(\frac{d}{r}-1\right)^2}; \qquad 4c)$$

Aus $\frac{dv}{dr} = 0$ ergibt sich jene Lage, charakterisirt durch den Werth r_M, in welcher die percentuelle Verstärkung der ursprünglichen Anziehung ein Maximum erreicht, gegeben durch die Gleichung

$$r_M = 2d\frac{\sqrt[3]{m}-1}{2\sqrt[3]{m}-1}. \qquad 5c)$$

In der nachstehenden Tabelle enthält die erste Columne das Ladungsverhältniss der anziehenden zur angezogenen elektrischen Masse. Die zweite Columne enthält den zugehörigen Werth jener kritischen Distanz r_k, welche die Zone effectiver Verstärkung vor jener effectiver Schwächung trennt. Die vierte Columne gibt den Maximalwerth der Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung, v_M, die dritte Columne definirt durch r_M jenen Punkt, in welchem dieses Maximum der percentuellen Verstärkung erreicht wird.

$m = 4$	$r_k = 0\cdot\dot{6}\,d$	$r_M = 0\cdot 54\,d$	$v_M = 5\cdot 5\%$
$m = 8$	$r_k = 0\cdot 79\,d$	$r_M = 0\cdot\dot{6}\,d$	$v_M = 12\cdot 5$
$m = 10$	$r_k = 0\cdot 81\,d$	$r_M = 0\cdot 69\,d$	$v_M = 15$
$m = 16$	$r_k = 0\cdot 857\,d$	$r_M = 0\cdot 75\,d$	$v_M = 21$
$m = 27$	$r_k = 0\cdot 89\,d$	$r_M = 0\cdot 8\,d$	$v_M = 29$
$m = 64$	$r_k = 0\cdot 9\dot{3}\,d$	$r_M = 0\cdot 857\,d$	$v_M = 42$
$m = 100$	$r_k = 0\cdot 97\,d$	$r_M = 0\cdot 88\,d$	$v_M = 48$
$m = 1000$	$r_k = 0\cdot 984\,d$	$r_M = 0\cdot 94\,d$	$v_M = 66$

Die Ergebnisse der vorstehend geführten Rechnung lassen sich somit in folgende Sätze zusammenfassen:

Für die Lagen des angezogenen elektrischen Punktes zwischen der anziehenden elektrischen Masse und der leitenden Ebene gibt es einen kritischen Punkt, diesseits welches — von der Ebene aus gesehen — eine Schwächung, jenseits welches eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung stattfindet. In der letzteren Zone der Verstärkung gibt es eine Stelle, an welcher diese Verstärkung, in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt, einen Maximalwerth erreicht.

Die Lage des kritischen Punktes sowohl, wie die des Maximalpunktes der Verstärkungswirkung der leitenden Ebene ist wesentlich abhängig vom Grössenverhältnisse der Ladung der anziehenden Masse zu der der angezogenen, und zwar rücken beide Punkte umso näher an die leitende Ebene, je grösser dieses Ladungsverhältniss ist. Ebenso ist der Maximalbetrag der Verstärkung, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, von eben diesem Ladungsverhältnisse abhängig und steigt mit steigenden Werthen dieses letzteren. Für unendlich grosse Werthe des Ladungsverhältnisses convergirt die procentuelle Verstärkung gegen 100% der ursprünglichen Anziehung; es würden dann aber sowohl der kritische Punkt, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung in unendliche Nähe der Wand rücken.

Ein ursprünglich homogenes elektrisches Feld, in das der entgegengesetzt geladene Punkt gebracht wird, stellt die Realisirung dieses letzteren Falles dar.

§. 1d.

Es mag schliesslich der Vollständigkeit halber die Veränderung der elektrischen Kraftwirkung für jene Configuration untersucht werden, wo die angezogene elektrische Masse die der leitenden Ebene fernere ist.

Es bezeichne wieder $-e$ die Ladung der angezogenen elektrischen Masse, me die der anziehenden, d die Distanz der letzteren von der leitenden Ebene, r den Abstand von der angezogenen Masse, dann ist die Distanz der letzteren von der leitenden Ebene in der angenommenen Anordnung $d+r$.

Zur Anziehung, welche die entferntere Masse ursprünglich erfährt

$$K = -\frac{me^2}{r^2},$$

tritt durch die Anwesenheit der leitenden Ebene verändernd die Wirkung zweier elektrischer Bilder hinzu; von ihnen hat das Bild der anziehenden Masse die Ladung $-me$ und die Distanz d hinter der Ebene und schwächt die ursprüngliche Anziehung; das Bild der angezogenen Masse hingegen, von der Ladung e und der Distanz $d+r$ hinter der Ebene, verstärkt die ursprüngliche Anziehung.

Somit resultirt aus der Anwesenheit der leitenden, zur Erde abgeleiteten Ebene eine Totalverstärkung der ursprünglichen Anziehung vom Betrage

$$V = \frac{e^2}{4(d+r)^2} - \frac{me^2}{(2d+r)^2}. \qquad 1d)$$

Das Verhältniss derselben zur ursprünglichen Anziehung

$$v = \frac{e^2}{4m\left(\frac{d}{r}+1\right)^2} - \frac{e^2}{\left(2\frac{d}{r}+1\right)^2}. \qquad 4d)$$

Zunächst ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn $m \geqq 1$ ist, für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse stets eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung resultiren muss. Diese ist im Verhältnisse zu letzterer um so grösser, je grösser m ist, je stärker also die nähere Masse im Vergleich zu der ferneren geladen ist, und sie nimmt mit wachsender Distanz r

des angezogenen Punktes stetig zu, sich dem Grenzwerthe $1-\frac{1}{4m}$ nähernd.

Soll also aus der Anwesenheit der leitenden Ebene eine effective Verstärkung der ursprünglichen Anziehung resultiren, so muss $m<1$, der angezogene elektrische Punkt, der stärker geladene sein.

Für diesen letzteren Fall mag dann zunächst, analog wie im vorigen Paragraphen, untersucht werden, ob und wann ein kritischer Punkt existirt, der einen Bereich der Verstärkung von einem solchen der Schwächung der ursprünglichen Anziehung scheidet.

Aus $v=0$ ergibt sich der Durchgangspunkt von effectiver Verstärkung zu effectiver Schwächung der ursprünglichen Anziehung, gegeben durch die kritische Distanz

$$r_k = 2d\frac{\sqrt{m}-(2m+1)}{4m-1}; \qquad 3d)$$

Für alle Lagen des angezogenen elektrischen Punktes, die der leitenden Ebene näher sind, als der kritische Punkt, besteht eine effective Verstärkung, für alle Lagen jenseits des kritischen Punktes effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung.

Aber nicht in allen Fällen, wo die Ladung des angezogenen elektrischen Punktes stärker ist, als die des anziehenden, existirt ein kritischer Punkt. Vielmehr ist, soll ein solcher auftreten, das Ladungsverhältniss m innerhalb sehr enger Grenzen eingeschlossen. Aus Formel 3 d) ist unmittelbar ersichtlich, dass, wenn $m=\frac{1}{4}$ ist, der kritische Punkt in die Unendlichkeit rückt, und sinkt m unter diesen Werth, so wird r_k negativ, d. h. die kritische Stelle hat dann keine reale Existenz mehr. Erreicht also das Verhältniss der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen den Werth $1:4$, oder sinkt es unter diesen herab, dann findet für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse stets eine effective Verstärkung der ursprünglichen Anziehung in Folge des Einflusses der leitenden Ebene statt.

Stellt man sich weiterhin die Frage, wie sich, wenn das Ladungsverhältniss $m<1$ ist, der **Maximalpunkt** der Verstärkung befindet, so ergibt sich aus $\frac{dv}{dr}=0$ die Lage jenes Punktes, in welchem die Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ein Maximum erreicht, gegeben durch die Gleichung

$$r_m = 2d\frac{1-\sqrt[3]{m}}{2\sqrt[3]{m}-1} \qquad \ldots 5d)$$

In der nachstehenden Tabelle enthält die erste Columne das Verhältniss m der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen, die zweite Columne die kritische Distanz r_k, welche die Zone effectiver Verstärkung von jener effectiver Schwächung scheidet, die dritte Columne gibt r_m, die Lage jenes Punktes, in welchem die Verstärkung in Procenten der ursprünglichen Anziehung ausgedrückt, ein Maximum erreicht, die vierte Columne gibt eben diesen Maximalbetrag an.

$m=9:16$	$r_k=d$	$r_m=0\cdot54\,d$	$v_m=0\cdot9\%$
$m=4:9$	$r_k=2\,d$	$r_m=0\cdot92\,d$	$v_m=3$
$m=9:25$	$r_k=4\,d$	$r_m=1\cdot35\,d$	$v_m=6\cdot25$
$m=3:10$	$r_k=4\cdot63d$	$r_m=1\cdot94\,d$	$v_m=13\cdot5$
$m=1:4$	$r_k=\infty$	$r_m=2\cdot8\,d$	$v_m=21\cdot12$
$m=1:6$	—	$r_m=9\,d$	$v_m=55$
$m=1:8$	—	$r_m=\infty$	$v_m=100$

Sinkt das Ladungsverhältniss m unter den Betrag 1:8 herab, dann nimmt der Procentualbetrag der Verstärkung mit wachsender Distanz stetig zu, sich für unendlich grosse Entfernung dem $\left(\frac{1}{4m}-1\right)$fachen der ursprünglichen Anziehung nähernd.

Die Ergebnisse der vorstehend geführten Rechnung lassen sich somit in folgenden Sätzen zusammenfassen:

Ist das Verhältniss m der Ladung der anziehenden elektrischen Masse zu der der angezogenen $\leqq 1:4$, so findet für **alle** Lagen der angezogenen Masse **Verstärkung** der ursprünglichen Anziehungen statt.

Ist dieses Ladungsverhältniss zwischen den Grenzen eingeschlossen $\frac{1}{4} < m < 1$, dann gibt es einen kritischen Punkt, diesseits welches, von der Ebene aus gesehen, effective Verstärkung, jenseits welches effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung eintritt.

Innerhalb der Zone der Verstärkung gibt es wieder einen Punkt, in welchem diese, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, einen Maximalwerth erreicht. Sowohl der kritische Punkt, als der Maximalpunkt der Verstärkungswirkung der leitenden Ebene rücken mit sinkendem Werthe des Ladungsverhältnisses immer weiter hinaus, während der Maximalbetrag der percentuellen Verstärkung gleichzeitig ansteigt.

Auf diese Zone der Verstärkung folgt jenseits des kritischen Punktes eine Zone effectiver Schwächung der ursprünglichen Anziehung. Innerhalb dieser Zone existirt ein Maximalpunkt der Schwächung nicht, sondern der Betrag derselben, zur ursprünglichen Anziehung ins Verhältniss gesetzt, nimmt mit wachsender Entfernung von der leitenden Ebene stetig zu und convergirt für unendlich grossen Abstand von der leitenden Ebene gegen den Grenzwerth, nämlich das $\left(1 - \frac{1}{4m}\right)$ fache der ursprünglichen Kraftwirkung.

Erreicht das Ladungsverhältniss m den Werth Eins oder übersteigt es diesen, d. h. ist der anziehende elektrische Punkt der stärker geladene, dann tritt für alle Lagen der angezogenen elektrischen Masse effective Schwächung der ursprünglichen Anziehung statt. Diese Schwächung nimmt, in Procenten der ursprünglichen Kraftwirkung ausgedrückt, ohne im Endlichen ein Maximum zu erreichen, mit wachsender Entfernung der angezogenen Masse stetig zu und nähert sich in unendlich grosser Distanz dem Grenzwerthe, dem $\left(1 - \frac{1}{4m}\right)$ fachen der ursprünglichen Anziehung.

§. 2.

Im nachstehenden zweiten Theile der vorliegenden Abhandlung mag folgende Anordnung rechnend untersucht werden.

Eine zur Erde abgeleitete leitende Kugel befinde sich zwischen einem elektrischen Massenpunkte und einer leitenden, gleichfalls zur Erde abgeleiteten Wand; es soll untersucht werden, welche Änderung die letztere auf jene mechanische Kraftwirkung hervorbringt, wie sie ohne ihre Anwesenheit zwischen elektrischem Massenpunkt und zur Erde abgeleiteter Kugel allein statt hätte.

Zur Durchführung der Rechnung muss vor Allem die elektrische Vertheilung, wie sie auf der leitenden, zur Erde abgeleiteten Kugel aus dem Einflusse des elektrischen Punktes und der leitenden Wand resultirt, hergeleitet werden.

Ich bediene mich dazu Thomson's Methode der elektrischen Bilder.

Es bezeichne e die in dem influenzirenden elektrischen Punkte concentrirte Ladung, f seine Distanz von der leitenden, zur Erde abgeleiteten unendlichen Ebene; auf der vom influenzirenden elektrischen Massenpunkte zu letzterer gezogenen Senkrechten befinde sich der Mittelpunkt einer leitenden, zur Erde abgeleiteten Kugel vom Radius a in der Distanz $c < f$ von der leitenden Ebene.

Unter der Einwirkung des elektrischen Massenpunktes e bedeckt sich die zur Erde abgeleitete Kugel mit influenzirter elektrischer Ladung, deren Betrag $p_1 = -\frac{ea}{c}$ und deren Vertheilung über ihre Oberfläche derart ist, dass sie für alle Punkte ausserhalb der Kugel so wirkt, als wäre sie zur Gänze in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde der influenzirenden Masse rücksichtlich der Kugel vereinigt, dessen Distanz vom Mittelpunkte $f_1 = \frac{a^2}{c}$ beträgt, gegen den influenzirenden Punkt hin, oder wie in der Folge praktischer sein wird anzunehmen, $f_1 = -\frac{a^2}{c}$ gegen die leitende Ebene hin.

Anderseits wirkt die elektrische Masse e auch influenzirend auf die leitende Ebene und gibt Veranlassung zu einer die letztere überdeckenden Ladung vom Betrage $-e$, die nach aussen hin so wirkt, als wäre sie in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde von e bezüglich der Ebene $(-e)$, vereinigt, welcher in der

gleichen Distanz f hinter der Ebene liegt, wie die influenzirende Masse vor derselben.

Diese auf der leitenden Ebene influenzirte Ladung wirkt nun ihrerseits wieder influenzirend auf die leitende Kugel und diese bedeckt sich unter dieser Einwirkung oder der äquivalenten des elektrischen Bildes $(-e)$ mit einer Ladung vom Betrage $p_2 = \frac{ea}{2f-c}$, die nach aussen hin so wirkt, als wäre sie in einem einzigen Punkte, dem elektrischen Bilde p_2 von $(-e)$ rücksichtlich der Kugel, vereinigt, dessen Distanz vom Mittelpunkte der Kugel gegen die Ebene hin $f_2 = \frac{a^2}{2f-c}$ beträgt.

Dieses elektrische Bild gibt durch Influenz auf die leitende Ebene Veranlassung zur Entstehung eines elektrischen Bildes $q_2 = -p_2$, dessen Distanz hinter der leitenden Ebene $f-c-f_2$ beträgt; dieses elektrische Bild gibt wieder durch seinerseitige Influenz auf die leitende Kugel Veranlassung zur Entstehung eines innerhalb dieser befindlichen elektrischen Bildes vom Betrage $p_4 = -q_2 \frac{a}{2f-2c-f_2} = p_2 \frac{a}{2f-2c-f_2}$, dessen Distanz vom Mittelpunkte gegen die leitende Ebene hin $f_4 = \frac{a^2}{2f-2c-f_2}$ beträgt.

Setzt man diese Betrachtungen in gleicher Weise fort, so gelangt man zu einer unendlichen Reihe im Innern der Kugel entstehender elektrischer Bilder, deren Entstehung in letzter Linie auf das elektrische Bild $(-e)$ des influenzirenden elektrischen Massenpunktes bezüglich der Ebene zurückzuführen ist; die Reihe dieser Bilder erscheint mit geraden Indices bezeichnet.

Ebenso gibt aber auch das erste elektrische Bild des influencirenden elektrischen Punktes e rücksichtlich der leitenden Kugel, p_1, Veranlassung zu einer unendlichen Reihe von elektrischen Bildern. Zunächst influenzirt p_1 auf der leitenden Ebene eine elektrische Ladung vom Betrage $q_1 = -p$, deren Wirkung nach aussen ersetzbar ist, durch die einer q_1 gleich grossen Masse, die in einem einzigen Punkte vereinigt ist, der in der gleichen Distanz $f-c+f_1$ hinter der leitenden Ebene liegt, wie p_1 vor derselben. Durch Influenzirung von q_1 auf die leitende Kugel gibt dieses

elektrische Bild Veranlassung zu einem neuen, innerhalb der Kugel gelegenen elektrischen Punkte, dessen Ladung

$$p_3 = -q_1 \frac{a}{2f-2c+f_1} = p_1 \frac{a}{2f-2c+f_1}$$

und dessen Distanz vom Mittelpunkte der Kugel gegen die Ebene hin $f_3 = \frac{a^2}{2f-2c+f_1}$ beträgt. Durch successive Influenzirung der so in der Kugel entstehenden Bilder auf die leitende Ebene und durch Rückinfluenzirung der durch erstere Wirkung in der Ebene auftretenden Bilder auf die leitende Kugel entsteht somit im Inneren der letzteren auf der Centrallinie eine zweite unendliche Reihe elektrischer Bilder, charakterisirt durch ungerade Indices.

Das Bildungsgesetz dieser elektrischen Bilder ist sowohl für die mit geraden, als für jene mit ungeraden Indices durch die überaus einfachen Recursionsformeln gegeben:

$$\left. \begin{aligned} p_n &= \frac{ap_{n-2}}{2f-2c-f_{n-2}}; \\ f_n &= \frac{a^2}{2f-2c-f_{n-2}}, \end{aligned} \right\} \qquad 1)$$

$$p_n = p_{n-2} \frac{f_n}{a}. \qquad 2)$$

Nach Thomson's Theorie der elektrischen Bilder lässt sich die mechanische Kraftwirkung, welche eine leitende, zur Erde abgeleitete Kugel, die der Influenz beliebig vertheilter, ausser ihr gelegener elektrischer Massen unterliegt, nach aussen hin ausübt, und somit auch jene, welche sie von aussen her erfährt, vollständig ersetzen durch jene Wirkung, die von, beziehungsweise auf sämmtliche in ihrem Inneren befindlichen elektrischen Bilder geübt wird.

Sollte aber nach dieser Methode die mechanische Kraftwirkung, welche die zur Erde abgeleitete Kugel für die vorliegende Anordnung erfährt, berechnet werden, so müsste die Wirkung des influenzirenden elektrischen Massenpunktes e und die der sämmtlichen hinter der leitenden Ebene gelegenen elek-

trischen Bilder auf die sämmtlichen im Inneren der leitenden Kugel gelegenen elektrischen Bilder in Rechnung gezogen werden, es würde sich mithin die mechanische Kraftwirkung auf die leitende Kugel durch eine doppelt unendliche Reihe darstellen, deren Summirung mit ungewöhnlichen Schwierigkeiten verbunden wäre.

Eine Methode, welche ich in einer früheren[1] Abhandlung auseinandergesetzt habe, gestattet hingegen, die mechanische Kraftwirkung, welche die leitende Kugel in der vorliegenden Anordnung erfährt, sofort durch eine einfach unendliche Reihe darzustellen.

Diese Methode beruht darauf, den Arbeitswerth der Ladung eines Conductors in einem elektrischen Felde zur Grundlage der Berechnung zu wählen; nach dem Satze der Erhaltung der Energie gibt dann der negative Differentialquotient dieses Arbeitswerthes, nach irgend einer Richtung genommen, die mechanische Kraft an, welche den Conductor nach eben dieser Richtung im elektrischen Felde angreift. Dieser Arbeitswerth besitzt aber hier einen höchst einfachen Ausdruck. Bezeichnet Φ das Potential, wie es herrschen würde, wenn der zur Erde abgeleitete Conductor $\mathfrak{C}$, für den eben die mechanische Kraftwirkung berechnet werden soll, gar nicht im elektrischen Felde vorhanden wäre, so ist der Arbeitswerth seiner schliesslichen elektrischen Ladung

$$W_{\mathfrak{C}} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{C}} \Phi \sigma d\omega, \tag{3}$$

wo σ die schliesslich in den einzelnen Punkten $d\omega$ des Conductors $\mathfrak{C}$ herrschende Flächendichte bezeichnet und das Integral über die ganze Oberfläche des in Frage stehenden Conductors sich erstreckt.

Für die vorliegende Anordnung ist aber der Ausdruck für Φ ein sehr einfacher; das Potential Φ, wie es herrschen würde, wenn die leitende Kugel fehlte, wird sich lediglich zusammensetzen aus den Potentialen, herrührend vom influenzirenden

[1] Über eine neue Berechnungsmethode der Anziehung, die ein Conductor in einem elektrischen Felde erfährt. Diese Berichte, Bd. 96, 1887.

elektrischen Massenpunkte e und seinem elektrischen Bilde $(-e)$ bezüglich der leitenden Ebene; es ist somit

$$\Phi = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_1},$$

wo r die Distanz eines beliebigen Punktes des elektrischen Feldes vom influenzirenden elektrischen Punkte e, r_1 seine Distanz vom elektrischen Bildpunkte $(-e)$ bezeichnet.

Somit ergibt sich der Arbeitswerth der unter Einwirkung des influenzirenden elektrischen Punktes und der leitenden Ebene auf der zur Erde abgeleiteten Kugel auftretenden influenzirten Ladung

$$W_k = \frac{1}{2}\int_K \frac{e\sigma d\omega}{r} - \frac{1}{2}\int_K \frac{e\sigma d\omega}{r_1} = \frac{e}{2}\left[\int_K \frac{\sigma d\omega}{r} - \int_K \frac{\sigma d\omega}{r_1}\right]$$
$$= \frac{e}{2}(V_e - V_{e_1}) \quad (4_a),$$

wo V_e den Werth des Potentials, herrührend von der schliesslichen Elektricitätsvertheilung auf der leitenden Kugel für den influenzirenden Punkt e, und ebenso V_{e_1} den Werth derselben Function für den elektrischen Bildpunkt $(-e)$ bezeichnet.

Nun ist aber nach Thomson's Theorie der elektrischen Bilder das Potential der schliesslich auf der zur Erde abgeleiteten Kugel durch Influenz auftretenden Ladung für alle äusseren Punkte gegeben durch das Potential der sämmtlichen in ihrem Inneren gelegenen elektrischen Bildpunkte p.

Somit ergibt sich für die angegebene Anordnung der Arbeitswerth ihrer Ladung, wenn man die zu je einem Bildpunkte p gehörigen Werthe von V_e und $V_{e'}$ zusammenfasst durch die nachstehende einfach unendliche Reihe:

$$W_K = \frac{e}{2}\left(\frac{p_1}{c+f_1} - \frac{p_1}{2f-c-f_1}\right) + \frac{e}{2}\left(\frac{p_2}{c+f_2} - \frac{p_2}{2f-c-f_2}\right) +$$
$$+ \dots \frac{e}{2}\left(\frac{p_n}{c+f_n} - \frac{p_n}{2f-c-f_n}\right) + \dots \qquad \dots 4)$$

Der negative Differentialquotient nach der Variabeln der Symmetrielinie des Systems, der Centrallinie, c wird dann die

mechanische Kraft angeben, von welcher die zur Erde abgeleitete Kugel nach eben dieser Richtung angegriffen wird.

Wir haben uns zunächst von der Convergenz der Reihe für W zu überzeugen.

Jedes der in der Kugel liegenden elektrischen Bilder gibt Veranlassung zur Entstehung zweier Posten im Ausdrucke für W, einen positiven und einen negativen. Ich bezeichne die positiven, deren Bauart unter einander gleichartig ist, mit ungeraden Indices, die negativen Posten mit geraden Indices und weise die Convergenz der Folge der ersteren, wie der letzteren Posten nach.

Es ist

$$W_{2n+1} = \frac{p_n}{c+f_n} = \frac{\frac{p_n}{f_n}}{\frac{c}{f_n}+1}.$$

Nun ist aber $f_n = \frac{a^2}{2f-2c-f_{n-2}}$; $\frac{1}{f_n} = \frac{2f-2c-f_{n-1}}{a^2}$ nach der obigen Recursionsformel 2), aber weiters $\frac{p_n}{f_n} = \frac{p_{n-2}}{a}$, mithin

$$W_{2n+1} = p_{n-2}\frac{a}{(2fc-2c^2+a^2)-cf_{n-2}}, \tag{5}$$

anderseits ist aber

$$W_{2n-1} = \frac{p_{n-2}}{c+f_{n-2}}.$$

Der Quotient je zweier auf einander folgenden Glieder des Ausdruckes für W mit ungeraden Indices ist somit

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n-1}} = \frac{c+f_{n-2}}{c(2f-2c-f_{n-2})+a^2}.$$

Dieser Quotient muss aber in allen Fällen <1 sein, weil f_{n-2} kleiner als a sein muss, weil weiters die Distanz des Kugelmittelpunktes von der leitenden Ebene $f-c>a$ sein muss, mithin im äussersten Falle noch $2f-2c-f_{n-2}>a$ sein muss.[1]

[1] Hier wie im Folgenden sind f und c durch den Kugelradius als jeweilige Einheit der Länge ausgedrückt gedacht.

So nahe wird in den folgenden numerischen Berechnungen der Kugelmittelpunkt an die leitende Ebene nicht heranrücken; seine kleinste Distanz von dieser wird in den folgenden Rechnungen nicht unter $f-c=2a$ herabgehen. Schon für diesen Werth ist aber die Convergenz der ungeraden Posten, wie unmittelbar zu sehen, eine sehr bedeutende und, wie auf ähnliche Weise sich nachweisen lässt, auch für die geraden Posten im Ausdrucke für W.

Noch eine Eigenthümlichkeit der einzelnen Posten im Ausdrucke für W will ich herleiten, und zwar wieder für die ungeraden Posten, da sie für die geraden in gleicher Weise sich ergibt. Setzt man das Verfahren, welches zu Formel 5) für W_{2n+1} geführt hat, fort, indem man Zähler und Nenner dieses Ausdruckes, durch f_{n-2} dividirt, nach Recursionsformel 2) $\frac{p_{n-2}}{f_{n-2}}=\frac{p_{n-4}}{a}$ setzt, so ergibt sich durch gleiches Verfahren, wie es oben vorgeschlagen worden,

$$W_{2n+1}=p_{n-2}\frac{a^2}{(2fc-2c^2+a^2)(2f-2c)-a^2c-f_{n-4}(2fc-2c^2+a^2)}\,.$$

Setzt man das Recursionsverfahren fort, bis man auf p_1, beziehungsweise p_2 gelangt, so ergeben sich die einzelnen Glieder der Reihe von W als Brüche, deren Zähler das Product von e^2 in eine mit wachsendem Index steigende Potenz von a ist, und deren Nenner eine ganze Function von c ist, deren Grad den Potenzexponenten von a um eine Einheit übersteigt.

Ausserdem ergibt sich $W_{4n+2}=W_{4n+3}$.

Aus der eben nachgewiesenen Convergenz der Reihe für W lässt sich nicht mit Sicherheit auf die Convergenz der Reihe ihrer Differentialquotienten nach c, welche die mechanische Kraftwirkung auf die Kugel darstellt, schliessen; die soeben dargelegte Bauart der Glieder W, in welchen lediglich der Nenner die Variable c in einer mit wachsendem Index in ihrem Grade zunehmenden, ganzen Function enthält, macht diese Convergenz plausibel. Indess wird die nachstehend folgende Zusammenstellung der den verschiedenen Werthen von f und c zugehörigen numerischen Werthe dieser Differentialquotienten schon an den

ersten zwölf derselben eine praktisch völlig ausreichende Convergenz erkennen lassen.

Ich stelle nachstehend die expliciten Ausdrücke auf für die Differentialquotienten der ersten 12 Glieder jener Reihe W, welche den Arbeitswerth der Ladung der Kugel in ihrer Lage zwischen influenzirendem elektrischen Punkte und leitender Wand darstellt, genommen nach der Variabeln der Symmetrieaxe des Systems, nach c.

$$A_1 = -e^2 a \frac{c}{(c^2-a^2)^2}$$

$$A_2 = e^2 a \frac{f-c}{(2fc-c^2+a^2)^2} = A_3$$

$$A_4 = e^2 a \frac{2f-c}{[(2f-c)^2-a^2]^2}$$

$$A_5 = -\frac{e^2 a^2}{4} \frac{2fc-3c^2+a^2}{[c(fc-c^2+a^2)]^2}$$

$$A_6 = \frac{e^2 a^2}{4} \frac{2f^2-6fc+3c^2-a^2}{[2f^2c-3fc^2+c^3-a^2c+a^2f^2]^2} = A_7$$

$$A_8 = \frac{e^2 a^2}{4} \frac{8f^2-10fc+3c^2-a^2}{[4f^3-8f^2c+5fc^2-2a^2f-c^3+a^2c^2]^2}$$

$$A_9 = -e^2 a^3 \frac{4f^2c-12fc^3+8c^3+2a^2f-3a^2c}{(4f^2c^2-8fc^3+4c^4+4a^2fc-3a^2c^2+a^4)^2}$$

$$A_{10} = e^2 a^3 \frac{4f^3-20f^2c+24fc^2-5a^2f-8c^3+5a^2c}{(8f^3c-20f^2c^2+16fc^3-10a^2fc-4c^4+5a^2c^2+4a^2f^2-a^4)^2} = A_{11}$$

$$A_{12}{}^{*} = e^3 a^3 \cdot$$

$$\cdot \frac{24f^3-52f^2c+36fc^2-8a^2f-8c^3+5a^2c}{(16f^4-48fc^3+52f^2c^2-24fc^3+16a^2fc-12a^2f^2+4c^4-5a^2c^2+a^4)^2} .$$

---

*) In dieser Schreibweise lassen die einzelnen A die ihnen entsprechenden Glieder der Reihe für W mit Leichtigkeit erkennen, aus denen sie durch Differentiation nach c hervorgegangen sind. Den Zähler der letzteren bildet der constante, von c unabhängige Factor im zugehörigen A-Posten, den Nenner die Quadratwurzel aus dem entsprechenden Nenner des A-Gliedes.

Der erste Posten dieser Reihe, A_1, stellt die Wirkung dar, welche der elektrische Punkt e auf das erste elektrische Bild ausübt, das durch seine Influenzwirkung in der zur Erde abgeleiteten Kugel entsteht. Es ist somit A_1 jene Kraftwirkung, wie sie die zur Erde abgeleitete leitende Kugel von dem elektrischen ohne Anwesenheit der leitenden Wand erfahren würde.

Wir wollen diese Kraftwirkung als die ursprüngliche oder Hauptwirkung bezeichnen. Die Summe der übrigen A stellt dann die Veränderung dar, welche eine hinter die Kugel gebrachte, zur Erde abgeleitete Ebene in dieser ursprünglichen Kraftwirkung hervorbringt.

Auf Grundlage der vorstehenden expliciten Formeln für A stelle ich nachstehend die für verschiedene numerische Werthe von f und c berechneten zugehörigen numerischen Werthe, erstens der ursprünglichen Kraftwirkung, diese als Anziehung negativ bezeichnet, zweitens der durch die Anwesenheit der leitenden Ebene hinzutretenden, diese verändernden Glieder, zusammen. Die letzteren sind je in drei Zahlenwerthe zusammengefasst, von denen der erste die Summe der ersten drei Posten $A_2—A_4$, der zweite die Summe der folgenden vier $A_4—A_8$ und die dritte die Summe der letzten vier $A_8—A_{12}$ in sich zusammenfasst.

Es ergibt sich so:

Für $f=5a$; $c=2a$ die Hauptwirkung $-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2}=-0\cdot\dot{2}\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot02277-0\cdot01047-0\cdot00\dot{1}0\dot{1}$. $\cdot\frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung im Gesammtbetrage von $0\cdot01129\frac{e^2}{a^2}$ oder von $5\cdot8\%$ dieser letzteren.

Für $f=4a$; $c=2a$ ergibt sich die Hauptwirkung $-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2}=$ $=-0\cdot\dot{2}\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot02857-0\cdot01273-0\cdot00098)$. $\cdot\frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung der ursprünglichen Kraftwirkung um $0\cdot01486\frac{e^2}{a^2}$ oder um $6\cdot7\%$.

Für $f=5a$; $c=3a$ ergibt sich die Hauptwirkung $-0\cdot04688\,\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot01132-0\cdot00359-0\cdot00095)\,\frac{e^2}{a^2}$,

somit als eine Schwächung vom Gesammtbetrage $0\cdot00678\,\frac{e^2}{a^2}$,

oder von $14\cdot4\%$ der ursprünglichen Anziehung.

Für $f=6a$; $c=4a$ beträgt die ursprüngliche Kraftwirkung $-0\cdot01777\,\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot00568-0\cdot00141-0\cdot00060)\,\frac{e^2}{a^2}$,

somit resultirt eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung um $0\cdot00367\,\frac{e^2}{a^2}$ oder $20\cdot6\%$ dieser letzteren.

Bei einer zweiten Reihe von Berechnungen befinde sich der influenzirende elektrische Punkt e immer in derselben Distanz $f=10a$ von der leitenden Ebene, während der Kugelmittelpunkt immer mehr und mehr dieser letzteren sich nähere.

Es ergibt sich so für

$f=10a$; $c=2a$; die ursprüngliche Kraftwirkung $-\frac{2}{9}\frac{e^2}{a^2}=$
$=-0\cdot2\,\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot011864-0\cdot00574-0\cdot000309)\,.$
$.\frac{e^2}{a^2}$, es ergibt sich somit eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung um $0\cdot005815\,\frac{e^2}{a^2}$ oder um $2\cdot6\%$ dieser letzteren.

Für $f=10a$; $c=3a$ ergibt sich die Hauptwirkung $-0\cdot04688\,\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0\cdot005384-0\cdot001726-$
$-0\cdot000057)\,\frac{e^2}{a^2}$, somit ergibt sich eine Schwächung der ursprünglichen Kraftwirkung um $0\cdot003601$ oder um $7\cdot7\%$.

Für $f=10a$; $c=4a$ ergibt sich die Hauptwirkung als $-0.177\,\frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0 \cdot 003088 - 0 \cdot 000766 - - 0 \cdot 000028) \frac{e^2}{a^2}$ als eine Schwächung im Betrage von $0 \cdot 002294 \frac{e^2}{a^2}$ oder von $12 \cdot 9\%$ der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 5a$ ergibt sich die Hauptwirkung

$-0 \cdot 00868 \frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0 \cdot 002031 - 0 \cdot 000407 - - 0 \cdot 000020) \frac{e^2}{a^2}$ als eine Schwächung um $0 \cdot 001604 \frac{e^2}{a^2}$ oder um $18 \cdot 4\%$ der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 6a$ ergibt sich die Hauptwirkung

$-0 \cdot 004894 \frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0 \cdot 001475 - 0 \cdot 000244 - 0 \cdot 000045) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung um $0 \cdot 001186 \frac{e^2}{a^2}$ oder um $24 \cdot 2\%$ der ursprünglichen Anziehung.

Für $f = 10a$; $c = 7a$ ergibt sich die Hauptwirkung gleich

$-0 \cdot 003039 \frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0 \cdot 001168 - 0 \cdot 000170 - - 0 \cdot 000024) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung um $0 \cdot 000974 \frac{e^2}{a^2}$ oder um $32 \cdot 04\%$ der ursprünglichen Anziehung.

Endlich ergibt sich für $f = 10$; $c = 8$ die Hauptwirkung

$-0 \cdot 002015 \frac{e^2}{a^2}$,

die Veränderung derselben $(0 \cdot 001020 - 0 \cdot 000136 - - 0 \cdot 000155) \frac{e^2}{a^2}$, somit als eine Schwächung im Betrage von $0 \cdot 000729 \frac{e^2}{a^2}$ oder von 36% der ursprünglichen Kraftwirkung.[1]

---

[1] Aus den hier zusammengestellten numerischen Werthen für die einzelnen Gruppen der Glieder A der Reihe für die mechanische Kraftwirkung auf die leitende Kugel ergibt sich, dass sie in allen Fällen, ausgenommen den letzten, wo die Kugel im Verhältnisse zu ihrem Abstande

Ein Überblick über die vorstehend zusammengestellten Ergebnisse der Rechnung ergibt vor Allem das überraschende Resultat, dass für alle Lagen der zur Erde abgeleiteten Kugel zwischen dem influenzirenden elektrischen Punkte und der zur Erde abgeleiteten Ebene stets eine Schwächung jener Anziehung eintritt, welche sie ohne Anwesenheit der leitenden Ebene vom influenzirenden elektrischen Punkte allein erfahren würde.

Die Schwächung dieser letzteren, ursprünglichen, Kraftwirkung ist, in Procenten derselben ausgedrückt, umso bedeutender, je näher die Kugel an die leitende Ebene heranrückt. Bei einer und derselben Distanz $f-c$ des Kugelmittelpunktes von der leitenden Ebene und ebenso bei einem und demselben Verhältnisse dieser Distanz zur Distanz c des Kugelmittelpunktes vom influenzirenden Punkte ist aber der Procentsatz der Schwächung umso grösser, je grösser die letztere Distanz ist, je schwächer also die ursprüngliche Kraftwirkung ist.

Das Resultat, dass die Anwesenheit der zur Erde abgeleiteten leitenden Ebene für alle Lagen der zur Erde abgeleiteten Kugel eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung auf dieselbe zur Folge hat, ist nach den Ergebnissen des §. 1c insofern überraschend, als ein elektrischer Massenpunkt, an der Stelle des elektrischen Bildes der influenzirenden Masse bezüglich der Kugel gelegen, und ebenso stark, aber unveränderlich geladen wie dieses, für die Mehrzahl der vorstehend untersuchten Lagen eine Verstärkung der ursprünglichen Anziehung erfahren müsste.

Von vornherein ist dieses Ergebniss der vorstehend durchgeführten Rechnung wohl kaum vorherzusehen. Bei der festgesetzten Anordnung wirken nämlich zwei, die ursprüngliche Kraftwirkung verändernde Ursachen gegen einander. Durch die Anwesenheit der zur Erde abgeleiteten Ebene hinter der gleichfalls zur Erde abgeleiteten Kugel befindet sich diese zwischen einem mit unveränderlicher Stärke positiv geladenen Massenpunkt und der durch letzteren in der leitenden Ebene influenzirten negativen Ladung. Eine oberflächliche Betrachtung würde, da

---

vom influenzirenden Punkte sehr nahe an die Ebene heranrückt, sehr rasch abnehmen und die Convergenz der Reihe eine praktisch völlig ausreichende ist.

diese letztere die durch Influenz des elektrischen Massenpunktes gleichfalls negativ geladene Kugel nach der gleichen Richtung treibt, wie die elektrische Masse selbst, die Vermuthung nahelegen, die Anwesenheit der leitenden Ebene hinter der Kugel müsse eine Verstärkung der ursprünglich auf diese wirksame Anziehung zur Folge haben, es müsste ihr das vorstehende Rechnungsergebniss paradox erscheinen.

Nun ist aber eine zweite Wirkung der in der Ebene influenzirten Ladung zu berücksichtigen, die nämlich, dass sie den Betrag der gleichnamigen, in der Kugel durch den elektrischen Punkt influenzirten Ladung zu schwächen sucht, und es stehen somit zwei Wirkungen der hinter die Kugel gebrachten leitenden Ebene gegen einander, so dass ohne durchgeführte Rechnung unmöglich ist, zu entscheiden, in welchem Sinne die resultirende Veränderung der ursprünglichen Kraftwirkung erfolgen werde.

Dieses überraschende Rechnungsergebniss, dass die hinter eine leitende, zur Erde abgeleitete und der Influenz eines elektrischen Punktes ausgesetzte Kugel gebrachte Ebene stets in gleicher Weise eine Schwächung der ursprünglichen Anziehung eingeschobene bewirkt, wie eine zwischen die influenzirende Masse und die Kugel abgeleitete Ebene, dass weiterhin die erstere Schwächung 37% der ursprünglichen Kraftwirkung erreichen kann und somit mit der Thomson'schen Schirmwirkung an Grösse vergleichbar ist, konnte mit Leichtigkeit experimentell bestätigt werden, und zwar nicht nur an einer abgeleiteten Kugel, sondern auch an beliebig gestalteten, zur Erde abgeleiteten elektrischen Pendeln.

Integration der Gleichungen für die Störungen der Elemente periodischer Kometen von geringer Neigung (Biela'scher Komet) durch die Planeten Erde, Venus und Mercur

von

Dr. J. v. Hepperger,

Privatdocent für Astronomie an der k. k. Universität in Wien.

Die Integrationsmethode, welche ich in meiner in den Sitzber. d. kais. Akad. d. Wissenschaften in Wien, Bd. XCVIII, Abth. II. a. Juli 1889 veröffentlichten Abhandlung zur Berechnung der Störungen der mittleren täglichen siderischen Bewegung periodischer Kometen von geringer Neigung in Vorschlag gebracht habe, gestattet in ebenso einfacher Weise die Ermittlung der Störungen der übrigen Elemente.

Setzt man:

$$R = \frac{km_1}{\sqrt{p}}\left[\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\xi - \frac{r}{\rho^3}\right]$$

$$S = \frac{km_1}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\eta$$

$$W = \frac{km_1}{\sqrt{p}}\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right)\zeta$$

so lauten die Differentialgleichungen der Störungen:

$$di = r\cos u W dt$$

$$d\Omega = \frac{r\sin u}{\sin i} W dt$$

$$d\mu = -\frac{3k}{\sqrt{a}}\left(\sin\varphi\sin vR + \frac{p}{r}S\right)dt$$

$$d\varphi = a \cos\varphi \left[\sin v R + (\cos v + \cos E) S\right] dt$$

$$d\pi = \left[-p \frac{\cos v}{\sin\varphi} R + (r+p) \frac{\sin v}{\sin\varphi} S + r \sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2} W\right] dt$$

$$dL = \left[\left(-2r \cos\varphi + p \cos v \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) R + (r+p) \sin v \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} S + \right.$$
$$\left. + r \sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2} W\right] dt.$$

Bedeutet w den in der Bewegungsrichtung gemessenen Winkelabstand des störenden Körpers vom aufsteigenden Knoten seiner Bahn über die Bahnebene des Kometen, J die Neigung ersterer Ebene zur letzteren, σ den Abstand besagten Knotens vom aufsteigenden Knoten der Kometenbahn über die Ekliptik, so wird, wenn man

$$x = w + \sigma - u$$

annimmt,

$$\xi = r' \cos x + 2r' \sin w \sin(\sigma - u) \sin^2 \frac{J}{2}$$

$$\eta = r' \sin x - 2r' \sin w \cos(\sigma - u) \sin^2 \frac{J}{2}$$

$$\zeta = r' \sin w \sin J$$

$$\rho^2 = r^2 + r'^2 - 2r\xi.$$

Bezeichnet man mit p_1 den Parameter der Bahn des störenden Planeten und nimmt ferners an

$$\alpha = \frac{r'}{r} \qquad \beta = \sqrt{\frac{p}{p_1}}$$

so wird die Beziehung zwischen den Differentialen von t, x und w, die Bahnelemente als constant vorausgesetzt, durch folgende Gleichung dargestellt

$$dt = \frac{r'^2 dx}{k\sqrt{p_1}(1 - \alpha^2\beta)} = \frac{r'^2 dw}{k\sqrt{p_1}}.$$

Statt des genauen Ausdruckes für ρ^{-3} soll wieder die Näherungsformel

$$\rho^{-3} = r^{-3}(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}$$

benützt werden, und dementsprechend in $\frac{\xi}{\rho^3}$ und $\frac{\eta}{\rho^3}$ das mit $\sin^2 \frac{J}{2}$ multiplicirte Glied des Zählers unberücksichtigt bleiben.

Ich werde nun die Integration der Störungsgleichungen der Reihe nach vornehmen und zunächst nur den einen Fall behandeln, in welchem bei der Integration nach x die untere Grenze $= -\frac{\pi}{2}$, die obere $= +\frac{\pi}{2}$ ist.

Die diesen Grenzen zugehörigen Incremente der Störungen mögen durch $\Delta_1 i$, $\Delta_1 \Omega$ etc. bezeichnet werden.

Die ersten beiden Gleichungen gehen durch Substitution der für ζ und dt gegebenen Ausdrücke über in:

$$di = \frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \sin J\left[\left(\frac{r'}{\rho}\right)^3 - 1\right] \frac{r}{1-\alpha^2\beta} \cos u \sin wdx$$

$$d\Omega = \frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \frac{\sin J}{\sin i}\left[\left(\frac{r'}{\rho}\right)^3 - 1\right] \frac{r}{1-\alpha^2\beta} \sin u \sin wdx.$$

Bezeichnet man allgemein die der unteren, respective oberen Integrationsgrenze entsprechenden Werthe von r, a, v, u durch Beifügung des Index 1, respective 2, die dem arithmetischen Mittel beider Grenzen entsprechenden Werthe durch den Index 0 und setzt abkürzungshalber

$$\varepsilon = \frac{4(\alpha_2-\alpha_1)\alpha_0\beta}{1-\alpha_0^2\beta}$$

$$f = \frac{1}{\pi}\left(\varepsilon + \frac{r_2-r_1}{2r_0}\right)$$

$$h = \frac{2}{\pi}(u_2-u_1)$$

so kann man der Veränderlichkeit von $\frac{r}{1-\alpha^2\beta}$ und u in erster Annäherung dadurch Rechnung tragen, dass man annimmt

$$\frac{r}{1-\alpha^2\beta} = \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta}\left(1 + \frac{1}{2} fx\right)$$

$$u = u_0 + \frac{1}{2} hx.$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\cos u \sin w = \cos u_0 \sin (x+u_0-\sigma) + \frac{1}{2} hx \cos (x+2u_0-\sigma)$$

$$\sin u \sin w = \sin u_0 \sin (x+u_0-\sigma) + \frac{1}{2} hx \sin (x+2u_0-\sigma).$$

Man erhält sonach:

$$\int \frac{r \cos u \sin w}{1-\alpha^2\beta} dx = \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta} [2 \cos u_0 \sin (u_0-\sigma) + \\ + f \cos u_0 \cos (u_0-\sigma) - h \sin (2u_0-\sigma)]$$

$$\int \frac{r \sin u \sin w}{1-\alpha^2\beta} dx = \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta} [2 \sin u_0 \sin (u_0-\sigma) + \\ + f \sin u_0 \cos (u_0-\sigma) + h \cos (2u_0-\sigma)].$$

In den mit ρ^{-3} multiplicirten Gliedern kann man ihrer Kleinheit halber r, α, u als Constante betrachten und bekommt dann

$$\int \frac{r'^3 \sin w}{\rho^3} dx = \alpha_0^2 \sin (u_0-\sigma) \int \frac{\alpha \cos x dx}{(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man

$$F^{(1)} = 2-\alpha^2 \int \frac{\alpha \cos x dx}{(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

so wird

$$\Delta_1 i = -\frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \sin J \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta} [\cos u_0 \sin (u_0-\sigma) F^{(1)} + \\ + f \cos u_0 \cos (u_0-\sigma) - h \sin (2u_0-\sigma)]$$

$$\Delta_1 \Omega = -\frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \frac{\sin J}{\sin i} \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta} [\sin u_0 \sin (u_0-\sigma) F^{(1)} + \\ + f \sin u_0 \cos (u_0-\sigma) + h \cos (2u_0-\sigma)].$$

Am Schlusse dieser Abhandlung befindet sich eine Tafel, welche mit dem Argumente α den Werth von F bequem finden lässt.

Durch Elimination von R aus den Gleichungen für $d\mu$ und $d\varphi$ ergibt sich sofort

$$d\varphi = -\operatorname{cotg}\varphi\left[\frac{d\mu}{3\mu} + rSdt\right].$$

Das Integral des ersten Theiles ist — $\operatorname{cotg}\varphi\,\frac{\Delta_1\mu}{3\mu}$. Die Formel zur Berechnung von $\Delta\mu$ ist in der früher citirten Abhandlung abgeleitet worden, und wird in der schliesslichen Zusammenstellung der Formeln nochmals aufgeführt werden. Das zweite Glied obigen Binoms lautet entwickelt:

$$rSdt = \frac{m_1}{\sqrt{pp_1}}\,\frac{r}{1-\alpha^2\beta}\left[\left(\frac{r'}{\rho}\right)^3 - 1\right]\left[\sin x - 2\sin w\cos(u-\sigma)\sin^2\frac{J}{2}\right]dx.$$

Bei Vernachlässigung der Grössen zweiter Ordnung sind die Integrale der einzelnen Glieder obiger Gleichung folgende:

$$\int\left(\frac{r'}{\rho}\right)^3 \sin x dx = 0$$

$$\int\frac{r\sin x}{1-\alpha^2\beta}dx = \frac{r_0}{1-\alpha_0^2\beta}\cdot f$$

$$\int\frac{\cos(u-\sigma)\sin w dx}{1-\alpha^2\beta} = 2\cos\frac{u_2-u_1}{2}\sin(u_0-\sigma)\cos(u_0-\sigma).$$

Setzt man

$$s = 4\cos\frac{u_2-u_1}{2}\sin(u_0-\sigma)\sin^2\frac{J}{2}$$

so wird

$$\Delta_1\varphi = \operatorname{cotg}\varphi\left[\frac{-\Delta_1\mu}{3\mu_0} + \frac{m_1 r_0}{\sqrt{pp_1}}\left(\frac{f}{1-\alpha_0^2\beta} - s\cos(u_0-\sigma)\right)\right].$$

Die Differentialgleichung der Störung der Länge des Perihels lautet in entwickelter Form:

$$d\pi = 2\sin^2\frac{i}{2}d\Omega + \frac{m_1\beta r'^2 dx}{\sin\varphi(1-\alpha^2\beta)}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(r-\xi)\cos v + \left(1+\frac{r}{p}\right)\eta\sin v}{\rho^3} + \frac{\xi\cos v - \left(1+\frac{r}{p}\right)\eta\sin v}{r'^3}\right].$$

Macht man

$$A_0^{(1)} = \int \frac{1-\alpha \cos x}{(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

so ist das Hauptglied des Integrals aus dem ρ^3 enthaltenden Ausdrucke gegeben durch die Gleichung:

$$\int \frac{r'^2}{\rho^3(1-\alpha^2\beta)}\left[(r-\xi)\cos v + \left(1+\frac{r}{p}\right)\eta \sin v\right]dx = \frac{\alpha_0^2 \cos v_0 \,.\, A_0^{(1)}}{1-\alpha_0^2\beta}.$$

Es ist ferner

$$\frac{\xi \cos v - \left(1+\frac{r}{p}\right)\eta \sin v}{r'} = \cos(x+v) - \frac{r}{p}\sin v \sin x +$$

$$+2\left[\sin(\sigma-\omega) + \frac{r}{p}\cos(u-\sigma)\right]\sin w \sin^2\frac{J}{2}.$$

Das Integral des ersten Gliedes wird

$$\int \frac{\cos(x+v)\,dx}{1-\alpha^2\beta} = \int \cos(w+\sigma-\omega)\,dw = \cos v_1 + \cos v_2$$

Um den Factor $\frac{r}{p}\frac{\sin v}{1-\alpha^2\beta}$, welcher ansehnliche Werthe besitzen und innerhalb der Integrationsgrenzen beträchtliche Veränderungen erleiden kann, als Function von x darzustellen, gehe ich von der Gleichung

$$\frac{r}{p}\sin v = \frac{\sin E}{\cos \varphi}$$

aus, und nehme an

$$E = E_0 + \frac{E_2-E_1}{2}\,.\,\frac{2x}{\pi}.$$

Es sei ferner

μ_1 = mittl. tägl. sid. Bewegung des störenden Planeten

$$\gamma = \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\pi+v_2-v_1}{2}$$

Man kann nun die Annahme machen:

$$\frac{E_2-E_1}{2}=\frac{\alpha}{r}\gamma$$

und erhält so

$$\frac{r\sin v}{p}=\frac{r_0\sin v_0}{p}+\gamma\frac{e+\cos v_0}{\cos^3\varphi}\frac{2x}{\pi}.$$

Stellt man $(1-\alpha^2\beta)^{-1}$ ebenfalls als Function von x dar, ersetzt $\Delta\alpha$ durch Δv und nimmt für letztere Grösse den Näherungswerth

$$\Delta v=\frac{p^2}{r_0^2\cos^3\varphi}.\gamma.\frac{2x}{\pi}.$$

so ergibt sich

$$\frac{1}{1-\alpha^2\beta}=\frac{1}{1-\alpha_0^2\beta}\left(1-2\alpha_0^2\beta\frac{pe\sin v}{r_0\cos^3\varphi}\gamma\frac{2x}{\pi}.\right)$$

Es wird sonach:

$$\int\frac{r}{p}\frac{\sin v\sin xdx}{1-\alpha^2\beta}=\frac{4}{\pi}\frac{\gamma}{\cos^3\varphi}\cdot\frac{1}{1-\alpha_0^2\beta}(e+\cos v_0-2\alpha_0^2\beta e\sin^2 v_0).$$

Bei der Integration des letzten Gliedes nehme ich wieder nur $\sin w$ als variabel an, und erhalte so die Gleichung

$$\Delta_1\pi=\frac{m_1\beta}{\sin\varphi}\Big\{\cos v_1+\cos v_2+s\left(\sin(\sigma-\omega)+\frac{r_0}{p}\sin v_0\cos(u_0-\sigma)\right)+$$
$$+\frac{1}{1-\alpha_0^2\beta}\left[\alpha_0^2\cos v_0 A_0^{(1)}-\frac{4\gamma}{\pi\cos^3\varphi}(e+\cos v_0-2\alpha_0^2\beta e\sin^2 v_0)\right]\Big\}+$$
$$+2\sin^2\frac{i}{2}\Delta_1\Omega.$$

Die Functionswerthe $A_0^{(1)}$ sind dieselben, welche auch zur Berechnung von $\Delta\mu$ gebracht wurden, und sind in Form einer Tafel in diese Abhandlung aufgenommen worden.

Durch Verbindung der beiden letzten Störungsgleichungen erhält man:

$$dL=-2r\cos\varphi Rdt+\sin\varphi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}d\pi+2\cos\varphi\sin^2\frac{i}{2}d\Omega$$

worin

$$rRdt = \frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \frac{r}{1-\alpha^2\beta} \left[\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r'^3}\right) \cdot \left(r' \cos x - 2r' \sin w \sin (u-\sigma) \sin^2 \frac{J}{2}\right) - \frac{r}{\rho^3}\right] r'^2 dx,$$

wofür man auch nehmen kann

$$rRdt = -\frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \left[\frac{r\alpha^2(1-\alpha\cos x)}{(1-\alpha^2\beta)(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} + \right.$$
$$\left. + \frac{r\cos x - 2r\sin w \sin (u-\sigma) \sin^2 \frac{J}{2}}{1-\alpha^2\beta}\right] dx.$$

Durch Integration ergibt sich hieraus

$$\int -2r \cos \varphi R dt = \frac{2m_1 \cos\varphi}{\sqrt{pp_1}} r_0 \left[\frac{2+\alpha_0^2 A_0^{(1)}}{1-\alpha_0^2\beta} - s \sin (u_0-\sigma)\right].$$

Macht man

$$H^{(1)} = 2+\alpha_0^2 A_0^{(1)}$$

so erhält man schliesslich

$$\Delta_1 L = \frac{2m_1 \cos\varphi}{\sqrt{pp_1}} r_0 \left(\frac{H^{(1)}}{1-\alpha_0^2\beta} - s \sin (u_0-\sigma)\right) +$$
$$+ \sin\varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \Delta_1 \pi + 2\cos\varphi \sin^2 \frac{i}{2} \Delta_1 \Omega.$$

Es ist aber auch

$$\sin\varphi \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \Delta\pi + 2\cos\varphi \sin^2\frac{i}{2} \Delta_1\Omega = \Delta_1\pi - \left(\Delta_1\pi - 2\sin^2\frac{i}{2}\Delta_1\Omega\right)\cos\varphi.$$

Die Werthe von H lassen sich bequem in eine Tafel bringen; eine solche ist auch dieser Abhandlung beigefügt.

Im zweiten Falle, wo die untere Grenze von x den Werth $+\frac{\pi}{2}$, die obere den Werth $+\frac{3\pi}{2}$ erhält, ist statt $F^{(1)}$, $A_0^{(1)}$, $H^{(1)}$ zu nehmen

$$F^{(2)} = 2+\alpha_0^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\alpha \cos x dx}{(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$A_0^{(2)} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{(1-\alpha \cos x) dx}{(1-2\alpha \cos x+\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$H^{(2)} = 2+\alpha_0^2 A_0^{(2)}$$

und den Störungen durchwegs entgegengesetztes Vorzeichen zu geben. So wäre z. B.

$$\Delta_2 L = -\frac{2m_1 \cos \varphi}{\sqrt{pp_1}} r_0 \left(\frac{H^{(2)}}{1-\alpha_0^2 \beta} - s \sin (u_0-\sigma)\right) +$$
$$+ \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \Delta_2 \pi + 2 \cos \varphi \sin^2 \frac{i}{2} \Delta_2 \Omega.$$

Am zweckmässigsten ist es daher, die Störungen für beide Fälle nach den für den ersten Fall gegebenen Formeln zu berechnen und hiebei nur darauf zu achten, dass man für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{\pi}$ die Grössen $F^{(2)}$, $A_0^{(2)}$, $H^{(2)}$ in Anwendung bringt, und erst nach vollständig durchgeführter Berechnung von Δi, $\Delta\Omega$, $\Delta\mu$, $\Delta\varphi$, $\Delta\pi$, ΔL das Vorzeichen dieser Störungsbeträge für den zweiten Fall in das Entgegengesetzte zu verwandeln.

Um die Werthe von α_1. α_2 und α_0 möglichst genau zu erhalten, bestimme man für die Zeitpunkte, in welchen die Radienvectoren des Kometen r_1, r_2 und r_0 sind, auch die Radienvectoren des störenden Planeten; seien letztere r'_1, r'_2 und r'_0.

Es wird sodann

$$\alpha_1 = \frac{r'_1}{r_1}; \quad \alpha_2 = \frac{r'_2}{r_1}.$$

In α_0 wird man zweckentsprechender einen Mittelwerth für r' einführen, da auch r_0 nahe mit dem Mittel aus r_1 und r_2 zusammenfällt. Es ist am einfachsten als solchen zu wählen

$$\log r' = \frac{1}{4} [\log r'_1 + \log r'_2 + 2 \log r'_0]$$

und also

$$\alpha_0 = \frac{r'}{r_0}$$

zu machen.

Ich will noch erwähnen, dass, da

$$\alpha^2\beta = \frac{dv}{dw}$$

man auch setzen könnte

$$\frac{1}{1-\alpha_0^2\beta} = \frac{\pi+v_2-v_1}{\pi}.$$

Die Hauptzüge der Störungsrechnung nach der bisher entwickelten Methode sind kurzgefasst folgende:

Bedeuten m_1, μ_1, p_1, Ω_1, i_1 die Elemente des störenden Planeten, λ' seine Länge in der Bahn, r' seinen Radiusvector, so berechnet man zuerst die Zeitmomente, in welchen $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ wird, wobei

$$x = \lambda' - i_1 \sin(\Omega_1 - \Omega) \operatorname{tg} \frac{i}{2} - (\Omega + \omega + v)$$

und bestimmt für diese Momente die Grössen r und v, sowie die Elemente des Kometen für die Zeitpunkte $x = 0$ und π; ferner geben die Gleichungen

$$\begin{aligned} \sin J \sin\sigma &= \sin i_1 \sin(\Omega_1 - \Omega) \\ \sin J \cos\sigma &= -\sin i \cos i_1 + \cos i \sin i_1 \cos(\Omega_1 - \Omega) \\ \cos J &= \cos i \cos i_1 + \sin i \sin i_1 \cos(\Omega_1 - \Omega) \end{aligned}$$

die Grössen J und σ.

Die Formeln zur Auswerthung der Hilfsgrössen sind:

$$\alpha_1 = \frac{r'_1}{r_1};\quad \alpha_2 = \frac{r'_2}{r_2};\quad \alpha_0 = \frac{r'}{r_0};\quad \log r' = \frac{1}{4}[\log r'_1 + \log r'_2 + 2\log r'_0]$$

$$\beta = \sqrt{\frac{p}{p_1}};\quad \gamma = \frac{\mu}{\mu_1}\frac{\pi+u_2-u_1}{2};\quad \log k = 8\cdot 2356$$

$$m_1 = \frac{\text{Planetenmasse}}{\text{Sonnenmasse} \times \sin 1''}; \quad \varepsilon = \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)\alpha_0\beta}{1 - \alpha_0^2\beta}$$

$$f = \frac{1}{\pi}\left(\varepsilon + \frac{r_2 - r_1}{2r_0}\right); \quad h = \frac{2}{\pi}(u_2 - u_1) = \frac{(u_2 - u_1)^0}{90}$$

wo $(u_2 - u_1)^0$ bedeuten soll, dass diese Differenz in Graden auszudrücken ist.

$$s = 4 \cos\frac{u_2 - u_1}{2} \sin(u_0 - \sigma) \sin^2\frac{J}{2}$$

$$\text{Integrationsgrenzen: } x_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad x_2 = +\frac{\pi}{2}$$

$$J^{(1)} = A_0 . A_0^{(1)} + \gamma^2 A_2 . A_2^{(1)} + B_0 . B_0^{(1)} + \gamma B_1 . B_1^{(1)}$$

$$JJ^{(1)} = A_0 . AA_0^{(1)} + \gamma A_1 . AA_1^{(1)} + \gamma^2 A_2 . AA_2^{(1)} + B_0 . BB_0^{(1)} + \gamma B_1 . BB_1^{(1}$$

$$\Delta\mu = \frac{3m_1 k}{\sqrt{p_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ap}}\Big[e(\sin v_1 + \sin v_2) + \frac{1}{1 - \alpha_0^2\beta}\left(\frac{\varepsilon}{\pi} - \alpha_0^2 J^{(1)}\right) -$$
$$- s\left(\cos(u_0 - \sigma) + e\cos(\sigma - \omega)\right)\Big]$$

$$\iint \frac{d\mu}{dt} dt^2 = \frac{3m_1 r'^2}{p_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{ap}}\Big[e((\pi + u_2 - u_1)\sin v_1 - \cos v_1 - \cos v_2) -$$
$$- \frac{1}{(1 - \alpha_0^2\beta)^2}(2 - \varepsilon + \alpha_0^2 JJ^{(1)})\Big]$$

$$\Delta i = -\frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \sin J \frac{r_0}{1 - \alpha_0^2\beta}\Big[\cos u_0 \sin(u_0 - \sigma_1 F^{(1)} +$$
$$+ f \cos u_0 \cos(u_0 - \sigma) - h \sin(2u_0 - \sigma)\Big]$$

$$\Delta\Omega = -\frac{m_1}{\sqrt{pp_1}} \frac{\sin J}{\sin i} \frac{r_0}{1 - \alpha_0^2\beta}[\sin u_0 \sin(u_0 - \sigma) F^{(1)} +$$
$$f \sin u_0 \cos(u_0 - \sigma) + h \cos(2u_0 - \sigma)]$$

$$\Delta\varphi + \operatorname{cotg}\varphi \frac{\Delta\mu}{3\mu_0 \sin 1''} = \operatorname{cotg}\varphi \frac{m_1 r_0}{\sqrt{pp_1}}\left(\frac{f}{1 - \alpha_0^2\beta} - s\cos(u_0 - \sigma)\right)$$

$$\Delta\pi - 2\sin^2\frac{i}{2}\Delta\Omega = \frac{m_1\beta}{\sin\varphi}\Big\{\cos v_1 + \cos v_2 + \,.$$

$$s\left(\sin(\sigma-\omega) + \frac{r}{p}\sin v_0\cos(u_0-\sigma)\right) + \frac{1}{1-\alpha_0^2\beta}\Big[\alpha_0\cos v_0 A_0^{(1)} -$$

$$-\frac{4\gamma}{\pi\cos^3\varphi}(e+\cos v_0 - 2\alpha_0^2\beta e\sin^2 v_0)\Big]\Big\}$$

$$\Delta L - \Delta\pi + \left(\Delta\pi - 2\sin^2\frac{i}{2}\Delta\Omega\right)\cos\varphi =$$

$$= \frac{2m_1\cos\varphi}{\sqrt{pp_1}} r_0\left(\frac{H^{(1)}}{1-\alpha_0^2\beta} - s\sin(u_0-\sigma)\right).$$

Sind die Integrationsgrenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$, so ist statt $A_0^{(1)}$, $AA_0^{(1)}$, $F^{(1)}$ etc. zu setzen $A_0^{(2)}$, $AA_0^{(2)}$, $F^{(2)}$ etc. und das Vorzeichen der rechten Seite obiger Gleichungen zu verkehren.

Um die Leistungsfähigkeit der bisher auseinandergesetzten Methode an einem Beispiele zu demonstriren, möge folgende Zusammenstellung der nach obigen Formeln berechneten und der im Wege mechanischer Quadratur nach gewöhnlichem Verfahren erhaltenen Beträge der Störungen der Elemente des Biela'schen Kometen durch die Erde im Zeitraume von 1827 März 1—1831 November 19 hier noch Platz finden.

Die genauen Störungsbeträge für die aufeinanderfolgenden Integrationsintervalle sind hierin durch $\Delta\mu$, $\Delta^2\mu$, $\Delta i \ldots$, die der summirten Reihe durch ${}^{\prime}\Delta\mu$, ${}^{\prime}\Delta^2\mu$, ${}^{\prime}\Delta i \ldots$ bezeichnet, während die approximativen Störungsbeträge durch dieselben aber in Klammern befindlichen Zeichen ausgedrückt sind. Ich will noch hervorheben, dass

$$(\Delta^2\mu) = \iint\frac{d\mu}{dt}dt^2 + ({}^{1}\Delta\mu).(t_2 - t_1).$$

${}^{\prime}(\Delta\mu)$	$(\Delta\mu)$	$\Delta\mu$	${}^{\prime}\Delta\mu$
—0"00090			—0"000910
+0·01010	+0"01100	+0"011037	+0·010127
+0·00377	—0·00633	—0·006340	+0·003787
+0·00825	+0·00448	+0·004490	+0·008277
+0·00627	—0·00198	—0·001991	+0·006286
+0·00632	+0·00005	+0·000061	+0·006347
+0·00819	+0·00187	+0·001860	+0·008207
+0·00392	—0·00427	—0·004284	+0·003923
+0·00999	+0·00607	+0·006069	+0·009992
—0·00037	—0·01036	—0·010362	—0·000370

$('\Delta^2\mu)$	$(\Delta^2\mu)$	$\Delta^2\mu$	$'\Delta^2\mu$
−11′709			−11′763
	+ 0′317	+ 0′366	
−11·392			−11·397
	+ 1·760	+ 1·750	
− 9·632			− 9·647
	+ 0·751	+ 0·764	
− 8·881			− 8·883
	+ 1·715	+ 1·715	
− 7·166			− 7·168
	+ 0·839	+ 0·839	
− 6·327			− 6·329
	+ 1·715	+ 1·720	
− 4·612			− 4·609
	+ 0·769	+ 0·764	
− 3·843			− 3·845
	+ 1·743	+ 1·759	
− 2·100			− 2·086
	+ 0·420	+ 0·406	
− 1·680			− 1·680

$('\Delta i)$	(Δi)	Δi	$'\Delta i$
− 0′215			− 0·220
	+ 0′165	+ 0·170	
− 0·050			− 0·050
	− 0 343	− 0·343	
− 0·393			− 0·393
	+ 0′481	+ 0·480	
+ 0·088			+ 0·087
	− 0·580	− 0·579	
− 0·492			− 0·492
	+ 0·626	+ 0·626	
+ 0·134			+ 0·134
	− 0·632	− 0·632	
− 0·498			− 0·498
	+ 0·577	+ 0·575	
+ 0 079			+ 0·077
	− 0·464	− 0·462	
− 0·385			− 0·385
	+ 0·261	+ 0·261	
− 0·124			− 0·124

$('\Delta\Omega)$	$(\Delta\Omega)$	$\Delta\Omega$	$'\Delta\Omega$	$('\Delta\varphi)$	$(\Delta\varphi)$	$\Delta\varphi$	$'\Delta\varphi$
+0′808			+0′819	−0′560			−0′559
	−0′406	+0′405			−1′031	−1′026	
+1·214			+1·224	−1·591			−1·585
	−0·700	−0·697			+0·601	+0·603	
+0·514			+0·527	−0·990			−0·982
	+1·183	+1·184			−0·460	−0·457	
+1·697			+1·711	−1·450			−1·439
	−1·727	−1·724			+0·242	+0·238	
−0·030			−0·013	−1·208			−1·201
	+2·280	+2·278			−0·077	−0·072	
+2·250			+2·265	−1·285			−1·273
	−2·797	−2·798			−0·094	−0·102	
−0·547			−0·533	−1·379			−1·375
	+3·224	+3·222			+0·315	+0·321	
+2·677			+2·689	−1·064			−1·054
	−3·538	−3·538			−0·475	−0·481	
−0·861			−0·849	−1·539			−1·535
	+3·507	+3·495			+0·897	+0·893	
+2·646			+2·646	−0·642			−0·642

$({}'\Delta\pi)$	$\Delta\pi$	$\Delta\pi$	$'\Delta\pi$	$({}'\Delta L)$	(ΔL)	ΔL	$'\Delta L$
+0'851			+0'854	−7'221			−7'246
	−1'664	−1'698			+5'818	+5'800	
−0·815			−0·839	−1·403			−1·446
	+1·467	+1·481			−5·910	−5·886	
+0·652			+0·642	−7·813			−7·332
	−1·702	−1·707			+7·235	+7·229	
−1·050			−1·065	−0·078			−0·103
	+1·529	+1·541			−6·957	−6·944	
+0·479			+0·476	−7·035			−7·047
	−1·696	−1·697			+7·701	+7·698	
−1·217			−1·221	+0·666			+0·651
	+1·518	+1·524			−6·973	−6·963	
+0·296			+0·303	−6·307			−6·312
	−1·664	−1·665			+7·260	+7·262	
−1·368			−1·362	+0·953			+0·950
	+1·410	+1·422			−5·974	−5·964	
+0·042			+0·060	−5·021			−5·014
	−1·572	−1·590			+5·888	+5·881	
−1·530			−1·530	+0·867			+0·867

Diesem Rechenbeispiele liegen dieselben Integrationsepochen zu Grunde, wie dem in der eingangs citirten Abhandlung enthaltenen. Die geringe Verschiedenheit der hier und dort aufgeführten Zahlen für $(\Delta\mu)$ und $(\Delta^2\mu)$ rührt daher, dass bei der neuerlichen Berechnung für r' ein Mittelwerth angenommen wurde, während früher r' durchwegs $= 1$ gesetzt worden ist. Die untersten Zahlen der summirten Reihen sind für jedes Element einander gleich gemacht und drücken die anfänglichen Werthe der Störungen aus, deren Berechnung nach rückwärts durchgeführt wurde. Die Beträge der den aufeinander folgenden Integrationsintervallen entsprechenden Störungen sind zur bequemeren Vergleichung nebeneinander gestellt.

Tafel der Logarithmen von $A_0^{(1)}$, $F^{(1)}$ etc.

α	$A_0^{(1)}$	$F^{(1)}$	$H^{(1)}$	$A_0^{(2)}$	$F^{(2)}$	$H^{(2)}$
0·00	0·4972	0·3010	0·3010	0_n4972	0·3010	0·3010
0·01	0·5027	0·3010	0·3011	0_n4916	0·3010	0·3009
0·02	0·5082	0·3010	0·3013	0_n4861	0·3010	0·3007
0·03	0·5137	0·3010	0·3016	0_n4805	0·3010	0·3004
0·04	0·5192	0·3010	0·3021	0_n4750	0·3010	2·3000
0·05	0·5247	0·3009	0·3028	0_n4694	0·3009	0·2994
0·06	0·5302	0·3009	0·3036	0_n4639	0·3009	0·2987
0·07	0·5358	0·3008	0·3046	0_n4583	0·3009	0·2979
0·08	0·5413	0·3008	0·3058	0_n4527	0·3008	0·2970
0·09	0·5468	0·3007	0·3071	0_n4471	0·3008	0·2960
0·10	0·5523	0·3005	0·3087	0_n4415	0·3007	0·2949
0·11	0·5578	0·3003	0·3104	0_n4359	0·3006	0·2938
0·12	0·5633	0·3001	0·3123	0_n4303	0·3005	0·2925
0·13	0·5688	0·2998	0·3144	0_n4247	0·3004	0·2911
0·14	0·5743	0·2994	0·3167	0_n4191	0·3002	0·2897
0·15	0·5798	0·2989	0·3192	0_n4135	0·3000	0·2881
0·16	0·5854	0·2984	0·3219	0_n4078	0·2998	0·2865
0·17	0·5909	0·2977	0·3248	0_n4022	0·2996	0·2849
0·18	0·5965	0·2970	0·3279	0_n3966	0·2993	0·2831
0·19	0·6020	0·2961	0·3313	0_n3909	0·2991	0·2813
0·20	0·6076	0·2952	0·3348	0_n3852	0·2088	0·2794
0·21	0·6132	0·2941	0·3386	0_n3796	0·2985	0·2774
0·22	0·6188	0·2928	0·3426	0_n3739	0·2982	0·2754
0·23	0·6244	0·2913	0·3469	0_n3682	0·2979	0·2733
0·24	0·6300	0·2897	0·3513	0_n3625	0·2975	0·2712
0·25	0·6357	0·2879	0·3560	0_n3568	0·2971	0·2690
0·26	0·6413	0·2858	0·3609	0_n3511	0·2967	0·2667
0·27	0·6470	0·2834	0·3661	0_n3454	0·2963	0·2644
0·28	0·6528	0·2808	0·3715	0_n3397	0·2959	0·2621
0·29	0·6585	0·2778	0·3771	0_n3340	0·2954	0·2597
0·30	0·6643	0·2744	0·3830	0_n3283	0·2949	0·2572
0·31	0·6702	0·2706	0·3891	0_n3226	0·2944	0·2547
0·32	0·6760	0·2663	0·3954	0_n3169	0·2939	0·2522
0·33	0·6819	0·2615	0·4020	0_n3112	0·2933	0·2497
0·34	0·6879	0·2561	0·4088	0_n3055	0·2927	0·2471



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. II. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



IV. SITZUNG VOM 6. FEBRUAR 1890.

Der Vorsitzende gedenkt in warmen Worten des Verlustes, welchen die kaiserliche Akademie und speciell diese Classe durch das am 29. Jänner d. J. erfolgte Ableben des correspondirenden Mitgliedes Prof. Dr. Melchior Neumayr in Wien erlitten hat.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October bis December 1889) des 98. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Herr G. C. Schmidt in Basel übersendet eine Abhandlung: „Über die Volumänderung beim Lösen von Salzen in Wasser".

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben von Herrn J. Richard Harkup in Krems a. D. behufs Wahrung der Priorität vor, welcher angeblich eine Beschreibung seiner Erfindung hinsichtlich einer neuartigen Schiesspulverladung für alle Arten von Schusswaffen enthält.

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine im physikalisch-chemischen Laboratorium der k. k. Wiener Universität von Herrn Dr. James Moser ausgeführte Arbeit: „Vergleichende Beobachtung von Inductionscapacität und Leitungsfähigkeit evacuirter Räume".

Herr Prof. Loschmidt überreicht ferner: Sechs Mikrophotographien einiger für die Lehre von den Ton-

empfindungen wichtiger Organe des Ohres, welche von Herrn Dr. Tomas Albarracin aus Chile in dem physikalisch-chemischen Laboratorium der Wiener Universität unter der Leitung des Herrn Dr. Moser ausgeführt worden sind.

Das w. M. Herr Prof. Wiesner überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. E. Heinricher, Professor an der k. k. Universität zu Innsbruck, welche den Titel führt: „Über einen eigenthümlichen Fall von Umgestaltung einer Oberhaut und dessen biologische Deutung“.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak berichtet über eine Arbeit des Herrn Prof. Dr. Friedrich Becke in Czernowitz: „Über die Ursache der Tetartoëdrie des Dolomit“.

Herr Dr. J. Schaffer, Privatdocent und Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Die Färbung der menschlichen Retina mit Essigsäurehämatoxylin“.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Direccion General de Estadistica de la Provincia de Buenos Aires, Censo Agricolo-Pecuario de la Provincia de Buenos Aires. Levantado en el mes de octubre de 1888. Buenos Aires, 1889; 8°.

Von dem auswärtigen Ehrenmitgliede M. Charles Hermite eingesendet:

Institut de France. Académie des Sciences, Discours de M. Hermite, Président, lu dans la séance publique annuelle le 30 décembre 1889. Paris, 1889; 4°.

Université de France. Académie de Paris, Inauguration de la Nouvelle Sorbonne par le Président de la République le 5 août 1889. Paris, 1889; 4°.

V. SITZUNG VOM 13. FEBRUAR 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—X (October-December 1889) des 98. Bandes, Abtheilung III der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Hofrath Dr. L. Schmarda übersendet eine Abhandlung von Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz, betitelt: „Zur Systematik der Gallmilben".

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Bahnbestimmung des Meteors vom 23. October 1889, von Prof. G. v. Niessl in Brünn.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

K. k. Ackerbau-Ministerium, Bilder von den Kupferkies-Lagerstätten bei Kitzbühel und den Schwefel-Lagerstätten bei Swoszowice. Nach der Natur aufgenommen von den k. k. Bergbeamten, redigirt von Ministerialrath F. M. v. Friese. Herausgegeben auf Befehl Sr. Excellenz des Herrn Ackerbau-Ministers Julius Grafen Falkenhayn. (Mit 78 Lagerstätten-Bildern.) Wien, 1890; 4°.

Vergleichende Beobachtung von Inductionscapacität und Leitungsfähigkeit evacuirter Räume

von

Dr. James Moser.

Aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium
der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Februar 1890.)

In meinen beiden Mittheilungen vom 9. Jänner 1890 hatte ich drei Stadien des Vacuums unterschieden, welche ich kurz als

1. das ordinäre,
2. das leitende,
3. das extreme Stadium

bezeichnen will.

Ich hatte gezeigt, dass das zweite Stadium von nahe 1 *mm* Quecksilberdruck Leiter elektrischer Ströme, das erste und dritte Stadium Isolatoren sind. Wir sehen also eine Röhre, deren Luftinhalt wir evacuiren, während wir sie gleichzeitig elektrischen Einwirkungen aussetzen, zuerst dunkel als Isolator, dann mit abnehmender Dichte leuchten und leiten, endlich bei weiterer Verdünnung erlöschen und isoliren. Würden wir die Leitfähigkeiten als Ordinaten einer Curve darstellen, deren Abscissen den Druck bezeichnen, so würde diese Curve von 760 bis 2 *mm* horizontal in oder nahe der Abscissenaxe verlaufen, dann bei 1 *mm* steil ansteigen, und gleich darauf zwischen 1 und 0 *mm* jäh zum Nullwerthe wieder herabsinken.

Selbstverständlich ist es von grossem Interesse, bei solch eigenthümlicher Variation der Leitfähigkeit den gleichzeitigen Verlauf der specifischen Inductionscapacität derselben Luft, also bei identisch gleichem Druck und identisch gleicher Temperatur zu verfolgen.

Es gelang mir, diese Frage experimentell zu beantworten.

Für Drucke unterhalb 5 *mm* — und nur so geringe Drucke kommen für meine Untersuchung in Betracht — liegt für die Inductionscapacität des luftverdünnten Raumes nur der vorläufige Bericht vor über noch nicht abgeschlossene Versuche der Herren Ayrton, Lodge, Gordon und Perry, als Commission der British Association von 1880, wonach sich für minimale Drucke Variationen bis zu acht Tausendstel unter die normale Capacität der Luft zu ergeben schienen.[1]

Es war also für die Beantwortung der vorliegenden Frage das vergleichende Beobachtungsmaterial vollständig neu zu schaffen. Dies geschah in folgender Weise:

Zunächst wurde eine Leydener Flasche construirt, deren Diëlektricum nicht das Glas, sondern das Vacuum war. Zwei dünnwandige Glasröhren, von denen die eine 50 *cm* lang und 5 *cm* weit, die andere etwas kürzer und enger war, wurden in einander geschoben und so ein doppelwandiges cylindrisches Glasgefäss mit halbkugeligem Doppelboden gebildet, indem die oberen ebenen Kreisränder beider Röhren mit einander verschmolzen wurden. Beide ineinandergeschobene Röhren waren vorher auf den einander zugekehrten Flächen zur Hälfte ihrer Länge vom Boden an versilbert und mit Elektroden versehen worden, so dass das Ganze einer Leydener Flasche glich, deren Belegungen die beiden Silberschichten und deren Diëlektricum der zwischen ihnen befindliche Luftmantel war. Ein kleines Seitenrohr führte zur Luftpumpe, so dass der Mantelraum evacuirt werden konnte.

Ehe ich an die vergleichende Messung ging, überzeugte ich mich, dass kein Contact zwischen den beiden Silberflächen stattfand und machte die Beobachtung, dass ein kleines Inductorium das leitende Vacuum zum bekannten glimmenden Leuchten brachte. Im extremen Vacuum jedoch erzeugte das Inductorium kräftige Funken, die sich als convective Entladung leicht erklären.

Für die comparative Bestimmung war mit der Geisslerpumpe gleichzeitig durch ein Gabelrohr sowohl diese Leydener Flasche zur Messung der Inductionscapacität, als auch das in meinen

---

[1] Vergl. die Literatur in Wiedemann, Elektricität. II.

Mittheilungen vom 9. Jänner beschriebene Röhrensystem zur Beobachtung der Leitungsfähigkeit und Schirmwirkung verbunden. Auch eine gewöhnliche Geisslerröhre war mit der Pumpe in Communication. Indem diese Röhre durch ein kleines Inductorium erregt wurde, konnten die in ihr auftretenden Erscheinungen zur annähernden Bestimmung der extremen Luftverdünnung dienen, bei welcher das Manometer keine Abweichungen vom Nullpunkt mehr anzeigte.

So wurde also derselbe zusammenhängende Luftraum abwechselnd in einem Theile durch das am 9. Jänner beschriebene Röhrensystem auf seine Leitungsfähigkeit und in einem anderen Theile auf seine Inductionscapacität untersucht. Nachdem das Stadium des Vacuums bestimmt war, wurden alle elektrischen Einflüsse wie die Wirkung des Inductoriums beseitigt und dann die Inductionscapacität beobachtet. Da die Capacität der Flasche von der Grössenordnung der der Elektrometervorrichtung war, u. zw., wie genaue Versuchsreihen ergaben, sehr nahe die Hälfte der letzteren betrug, so konnten die Messungen in bekannter Weise durch Ladung und Entladung der Flasche mittelst constanter Batterien, Thomson'schen Quadrantenelektrometers (Modell Mascart-Carpentier) und Sabine'schen Schlüssels vorgenommen werden.

Bei der ersten Versuchsreihe war das Quadrantenpaar des Elektrometers durch fünf Latimer-Clark-Elemente, die Flasche durch eine Zink-Wasser-Kupfer-Batterie von 150 Elementen geladen. Als sich aber für alle drei Stadien eine gleiche Ablenkung, u. zw. im Mittel aus vielen Versuchen 198 Millimetertheile der Scala bei objectiver Ablesung ergab, versuchte ich, ob nicht wenigstens eine kleine Schwankung der Inductionscapacität der sprungweisen Änderung der Leitfähigkeit entsprechen würde.

Ich verfeinerte die Methode, indem ich unter geringer Erhöhung des auf die Elektrometerangabe wirkenden Productes den Factor, dessen Variation beobachtet werden sollte, möglichst vergrösserte. Physikalisch gesprochen, ich lud die Leydener Flasche durch eine Zambonische Säule, das Quadrantenpaar durch ein einziges Latimer-Clark-Element. Indem ich hiebei die Vorsicht gebrauchte, die Ladung immer genau eine Minute währen zu lassen, konnte ich auf der in Millimeter getheilten Scala

folgende Ausschläge für die drei Stadien des Vacuums beobachten.

I. bei 10 *mm* Hg	II. bei 1 *mm* Hg	III. extremes Vacuum
318	318	318
318	320	320
318	320	320.

Es ergab sich also keine Änderung der Inductionscapacität für alle drei Stadien des Vacuums.

Unter Vermeidung aller Hypothesen begnüge ich mich, diesen Gegensatz im gleichzeitigen Verhalten zweier elektrischer Qualitäten, die Variation der Leitungsfähigkeit, die Constanz der Inductionscapacität mit Sicherheit zu constatiren.

Zum Schluss habe ich Herrn Fabriksbesitzer B. Egger verbindlichst zu danken, dass er durch seinen Glasmechaniker Herrn Gustav Fuchs den oben beschriebenen Condensator schnell und ganz meinen Angaben entsprechend herstellen liess.

Auf das Herzlichste danke ich auch Herrn Julius Miesler für die hingebungsvolle Assistenz bei der langen Versuchsreihe, die mit der Wiederholung der Hertz'schen Experimente begann und in den hier vorgelegten Arbeiten ihre Fortsetzung findet.

Bahnbestimmung des Meteors vom 23. October 1889

von

Prof. G. v. Niessl in Brünn.

Am 23. October 1889 wurde um 5^h 22^m mittlerer Wiener Zeit, also noch vor Einbruch der Dunkelheit, an vielen Orten der Monarchie ein sehr grosses, lichtstarkes Meteor beobachtet, welches über Theile Westungarns hinzog. Nicht sowohl die sehr unbestimmten Zeitungsnotizen, als die weiter unten mitgetheilten Beobachtungen des Herrn Oberforstmeisters J. Jackl in Kremsier, welche ich am anderen Tage erhielt, veranlassten mich zu weiteren Nachforschungen.

Herr Jackl hatte sogleich die nöthigen Messungen aus eigenem Antriebe vorgenommen, und seinem vorzüglichen Berichte fehlte für die erfolgreiche Benützung nichts, als zum mindesten eine annähernd ebenso gute correspondirende Wahrnehmung, welche unter den gegebenen Umständen am ehesten von Wien aus erwartet werden konnte. Herr Prof. Dr. Edmund Weiss, Director der k. k. Universitäts-Sternwarte, dessen weitgehender Zuvorkommenheit ich schon so vielfache Förderungen meiner Arbeiten verdanke, entsprach meiner Bitte, mir zur Erlangung von Wiener Beobachtungen behilflich zu sein, in der umfassendsten Weise und mit einem Erfolge, welcher meine Erwartungen weit übertraf. In Folge einer durch die „Neue freie Presse“, die „Deutsche Zeitung“ und das „Deutsche Volksblatt“ veröffentlichten Aufforderung der k. k. Wiener Sternwarte liefen bei dieser gegen 40 Mittheilungen über das Meteor aus dem Publikum, und zwar nicht allein von Wien, sondern auch aus anderen Orten ein, welche den grössten Theil des mir zu Gebote stehenden Materiales ausmachen. Dieselben waren zunächst freilich nicht

verwendbar, aber Herr Director Dr. Weis hat, wie ich mit lebhaftem Dankgefühle hervorheben muss, die Mehrzahl der Wiener Beobachtungen durch die sorgfältigsten Erhebungen, an welchen sich die Herren Assistenten der Sternwarte Dr. C. Zelbr und Dr. J. Spitaler, sowie Herr R. Froebe in höchst dankenswerther Weise betheiligten, erweitert und sichergestellt. Es wurden dabei nicht allein je zwei Bahnpunkte — soweit eben die Erinnerung der Beobachter noch reichte — zumeist durch Theodolitmessungen festgelegt, sondern auch fast überall Angaben über die Dauer und die optischen Eigenthümlichkeiten der Erscheinung gesammelt.

Für werthvolle directe Mittheilungen fühle ich mich ferner noch den Herren Regierungsrath Prof. Joseph Wastler in Graz, Landesschulinspector Dr. Carl Schober in Brünn, Dr. Nicolaus v. Konkoly in O-Gyalla und R. v. Kövesligethy in Budapest verpflichtet.

Bezüglich der an die Wiener Sternwarte gelangten Nachrichten aus anderen Orten, sowie einiger durch die geehrte Redaction der „Neuen freien Presse" mir zugekommenen, habe ich selbst weitere Erkundigungen eingezogen, um sie in eine bestimmtere, brauchbare Form zu bringen. Dabei war mein Bestreben dahin gerichtet, die Azimuthe durch die von den Beobachtern selbst vorgenommenen Eintragungen in Karten möglichst zu sichern, während ich zur Ermittlung der Höhen — welche, weil an den meisten Orten passende Instrumente nicht zu Gebote stehen oder nicht gehandhabt werden können, stets grosse Schwierigkeiten bereitet — diesmal den Versuch machte, an die Beobachter kleine Gradbogen aus Kartenpapier mit Senkelfaden, nebst entsprechender Anleitung zu senden. Ich habe zu diesem Zwecke die bekannten käuflichen Schultransporteurs mit einer kleinen Abänderung benützt, und der Erfolg war so überraschend gut, dass mir die Feststellung der Höhen nunmehr in Zukunft keine Sorgen mehr bereiten wird. Während mich früher jedes andere Hilfsmittel mindestens bei der Hälfte der Beobachter im Stiche liess, wurde der Gebrauch dieses einfachen Gradbogens überall verstanden, hiedurch die so äusserst nachtheilige Überschätzung der Höhenwinkel hintangehalten und in dieser Hinsicht nicht viel weniger als durch ein Meteoroskop erreicht. Bei sehr

kurzen Bahnstücken, deren Lage durch die unvermeidlichen Fehler der beiden Endpositionen sehr entstellt werden kann, wurde, wie in früheren Fällen, mit Vortheil auch die Darstellung der scheinbaren Neigung der Bahn in Betracht gezogen, jedoch nicht nach Schätzung im Gradmasse, sondern durch Zeichnung oder auch mit Hilfe des Gradbogens. Diese Angaben über die Art und Weise, wie das für die Rechnung verwendete Material entstanden ist, scheinen mir sowohl für die Beurtheilung der vorliegenden Untersuchung als auch für die Zukunft nicht ganz überflüssig zu sein.

Der Fall, welcher hier zur näheren Betrachtung gelangt, zeichnet sich übrigens durch einige Umstände der Erscheinung und durch andere in Hinsicht der Beobachtung aus. In ersterer Beziehung ist hervorzuheben, dass die wahre Bahnlage eine solche war, welche die Entscheidung der Hauptfrage, ob das gesehene Stück einer heliocentrischen Parabel angehören konnte, oder ob es ein Hyperbelelement war, möglichst erleichterte. Denn das Meteor kam fast genau hinter der Erde (vom Antiapex) her, und die beobachtete Geschwindigkeit war desshalb nur der Unterschied zwischen der Geschwindigkeit des Meteors und jener der Erde.

Der relativ langsame Lauf erleichterte die Abschätzung der Dauer selbst auf kürzeren Strecken, und hiezu kommt nun als äusserst günstiger Factor, dass gerade in Wien so zahlreiche Angaben gesammelt wurden, welche eine gute Verwerthung zuliessen, weil nach der Lage des Beobachtungsortes gegen die Bahn, hier bedeutende Fehlereinflüsse minder zu besorgen sind. Um diesen günstigen Verhältnissen Rechnung zu tragen, habe ich in dem betreffenden Abschnitte die Vergleichung der Bahnlängen mit der Dauer in allen Einzelheiten aufgenommen.

Nicht ohne Interesse ist auch die verhältnissmässig gute Übereinstimmung der zahlreichen Berichte über die Form, scheinbare Grösse und Farbe der Feuerkugel.

Da es mir bei Arbeiten dieser Art ganz unerlässlich scheint, dass sie alle Daten, auf welche die Untersuchung sich stützt, in möglichst ursprünglicher Form dem Leser darbieten, damit er sie, wenn nöthig, selbst interpretiren könne, habe ich mich bei Wiedergabe der Wahrnehmungen thunlichst an den Wortlaut

gehalten, wobei allerdings ganz Unwesentliches wegbleiben musste. Es ist jedoch nicht die geringste erhebliche Mittheilung unterdrückt worden. Die Aufeinanderfolge der Berichte, welche ich nun anführe, ist derart, dass die zahlreichen Beobachtungen aus Wien vorangehen, während man jene aus den übrigen Orten von Nord gegen Süd nach der Polhöhe geordnet findet.

Aus Ungarn sind mir nur sehr wenig Mittheilungen zugekommen und aus der Gegend der Fallstelle habe ich gar keine Nachrichten erhalten, insbesondere habe ich auch nicht erfahren, ob irgendwo Detonationen vernommen worden sind.

Für die vielseitige Unterstützung durch die Beobachter, insbesondere aber für das zuvorkommende Eintreten der k. k. Sternwarte, ohne welches die Sicherstellung der folgenden Resultate nicht gelungen wäre, fühle ich mich zu lebhaftestem Danke verpflichtet.

---

1. Wien. Die folgenden einzelnen geographischen Coordinaten stützen sich auf den Stadtplan des Baudirectors F. Berger im Massstabe 1:12500.

a) (λ: 30° 0′ 15″, φ: 48° 14′ 48″) Herr A. Wortschek, Handelsgärtner in Ober-Döbling, Weinberggasse, sah gegen $5^{1}/_{2}{}^{h}$ das Meteor in SSW(?) aufsteigen und nach ENE ziehen. Es beschrieb während 3—4 Secunden einen mässigen Bogen und zersprang am Ende in drei Stücke. Sein Licht war grünlich. Die Messungen ergaben für den Anfang: $A = 303°$ $h = 16{\cdot}5°$, für das Ende: $A = 259°$ $h = 6°$. Die Azimuthe sind vom magnetischen Südpunkte gezählt.

b) (λ: 34° 0′ 0″, φ: 48° 14′ 33″) Herr Realschulprofessor Dr. E. Nader beobachtete die Feuerkugel etwa um 5^{h} 20^{m} von der Türkenschanze aus, und zwar, nach später vorgenommener Messung, zuerst — nachdem er durch den Lichtblitz aufmerksam geworden — in $A = 280°$ $h = 33°$ und das Ende in $A = 267°$ $h = 20°$ (die Azimuthe ebenfalls magnetisch). Die Dauer in dieser Bahn betrug etwa $1^{1}/_{2}$ Secunden.

c) (λ: 33° 59′ 50″, φ: 48° 14′ 30″) Herr Postcontrolor Ott sah das Meteor ebenfalls von der Höhe der Türkenschanze aus. Es fiel in schwachem Bogen von $A = 282°$ $h = 26°5$ zu $A = 257°$

$h = 6°$. Die Messung erfolgte mit einem Meteoroskop, welches nach der Sonne orientirt war, wesshalb die Azimuthe sich, wie üblich, auf den astronomischen Meridian beziehen. Den Anfangspunkt hält der Beobachter für sehr gut, das Ende für unsicher. Das Meteor war innen gelbgrün, aussen lichtgelb, birnförmig, an der breitesten Stelle etwa $^1/_2$ Monddurchmesser gross, mit einem kurzen Schweife.

d) (λ: 34° 1′ 0″, φ: 48° 14′ 26″) Herr Anton Kalbmayer, Copist an der k. k. Sternwarte, befand sich in Ober-Döbling, Neugasse bei Nr. 13, als er um 5^h 23^m das Meteor in südöstlicher Richtung aufleuchten sah. Trotz der noch vorherrschenden Tageshelle zeichnete es sich durch die auffallende Grösse, beinahe ein Viertel der Mondscheibe, durch sein intensiv weisses, gegen den Mittelpunkt bläuliches Licht, sowie durch seinen gegen die Meteorscheibe hin dicken und kurzen Schweif aus. Die Dauer betrug etwa $1^1/_2$ Secunden. Die später vorgenommene Messung lieferte (magnetisch) für den Punkt der ersten Wahrnehmung: $A = 289°5$ $h = 11°$, für das Ende: $A = 278°$ $h = 10°$. Herr Kalbmayer entwarf auch eine in Farben ausgeführte Skizze, in welcher die bläuliche Feuerkugel mit dem scheinbar gekrümmten, am Ende spitzen Schweife, dessen Länge gleich dem vier- bis fünffachen Durchmesser des Hauptkörpers war, an die sogenannten „Glastropfen“ erinnert. Die Neigung des Schweifes, welcher ohne Zweifel in der Bahn lag, zeichnete der Beobachter etwa zu 23° gegen den Horizont, was hervorzuheben ist, weil die oben angegebenen gemessenen Positionen eine viel geringere scheinbare Neigung darstellen.

e) (λ: 34° 0′ 36″, φ: 48° 14′ 9″) Die Fräulein Rosmanith und Braumüller beobachteten das Meteor aus einem Fenster der Carl Ludwig-Strasse in Währing zwischen gegenüberliegenden Häusern in (magnetisch) $A = 275°$ $h = 12°$ als eine helle, grosse, geschweifte Kugel im Bogen herabkommen und vor ihren Augen wieder vergehen, wobei kleinere Stückchen, wie Funken, davonflogen.

f) (λ: 34° 1′ 0″, φ: 48° 13′ 42) Herr G. Rosmanith, Studirender der Astronomie, hatte seinen Standpunkt bei der Währinger Linie und berichtete: Um 5^h 20^m auf hellem Himmel aufleuchtend, an Helligkeit und Grösse bis circa $^1/_5$ Monddurch-

messer zunehmend, erlosch das Meteor plötzlich ohne weitere besondere Erscheinung. Bewegung auffallend langsam, von Süd gegen Ost gerichtet; Neigung der Bahn gegen den Horizont gering, Dauer etwa 5 Secunden. Eindruck einer intensiv gelb leuchtenden Kugel. Aus den in Gemeinschaft mit dem Herrn Beobachter vorgenommenen Theodolitmessungen folgte für das Aufleuchten (magnetisch): $A = 315°$ $h = 18°$, für das Ende: $A = 265°$ $h = 10°$.

g) (λ: 34° 3′ 5″, φ: 48° 13′ 30″) Herr Civilingenieur Fr. Anderle stand vor Nr. 7 der Pazmanitengasse im II. Bezirke und sah das Meteor in der Richtung WSW—ENE unter einem (von ihm skizzirten) Neigungswinkel von beiläufig 45° gegen den Horizont niedergehen. Voran befand sich eine grosse goldgelbe Kugel, welche drei viel kleinere, weisse und etwas röthliche Tröpfchen zurückliess.

h) (λ: 34° 1′ 3″, φ: 48° 13′ 28″) Herr Bürgerschuldirector K. Schellenberger beobachtete die Feuerkugel aus dem Garten der Bürgerschule Glasergasse 8. Sie erschien über einem Hause in (magnetisch) $A = 309 \cdot 5°$ $h = 24 \cdot 5°$ und verschwand, ohne dass sonst etwas Besonderes zu bemerken gewesen wäre, in $A = 285°$ $h = 22 \cdot 5°$ nach den vorgenommenen Messungen „über einem Baume, durch dessen Zweige sie bei eventuellem weiteren Laufe noch hätte gesehen werden können". Das Meteor war birnförmig, von bläulicher Farbe, an den Rändern wie weissglühend, $^1/_3$—$^1/_2$ Monddurchmesser gross. Es war durch 2 Secunden sichtbar und hinterliess keine Spur.

i) (λ: 34° 2′ 34′, φ: 48′ 12′ 40″) Herr Regierungsrath und Prof. Med. Dr. Carl Aberle berichtete an die Sternwarte: Ich war etwa 3 *m* vom linken Eckpfeiler der Ferdinandsbrücke entfernt, auf dem Gehwege des Franz Josephs-Quai, als sich plötzlich das hellglänzende Meteor zeigte. Der Höhenwinkel der Anfangstelle betrug nicht über 30°. Die höchste Stelle fiel meiner Erinnerung nach zwischen die linke Seite des neuen Postgebäudes und die Radetzkystrasse. Diese Richtung entspricht dem 80. östlichen Grade meines Compasses (an Ort und Stelle gemessen). Das Ende war ungefähr über dem Thurme des Donau-Dampfschifffahrtsgebäudes, etwa 15° über dem Horizonte. Aus dem Stadtplane kann man nach den Angaben des Herrn Beobachters

für Anfang und Ende die (astronomischen) Azimuthe $A = 274°$ und $A = 258°$ entnehmen. Ist das bezeichnete östliche magnetische Azimuth vom Südpunkte gerechnet, also 280°, so stimmt es nach Abzug der magnetischen Declination bis auf wenige Grade mit dem Obigen überein. Weitere Nachmessungen konnten daher unterbleiben.

k) (λ: 34° 1′ 35″, φ: 48′ 12′ 43″) In der Mittheilung des Herrn Regierungsrathes Dr. Aberle ist auch noch eine zweite Wahrnehmung erwähnt. Herr Rechtshörer Carl Weizner bemerkte von dem Trottoir nächst der linken Ecke der Auffahrtsrampe des Parlamentsgebäudes das hellglänzende Meteor in der Farbe und Grösse der Venus plötzlich über den Bäumen der rechten Hälfte des Volksgartens aufleuchten, von wo es sich nach links abwärts gegen die Spitze des Stephansthurmes bewegte und in der Luft verschwand. Nach dem Stadtplane wären die entsprechenden Richtungen $A = 287°$ (sehr unsicher) für den Anfang und $A = 266°$ (besser) für das Ende. Die Zeit wird für beide Beobachtungen zu 5^h $22-23^m$ angegeben.

l) (λ: 34° 4′ 0″, φ: 48° 12′ 30″) Herr Ministerial-Secretär Zelechowsky stand bei der Einmündung der Sophienbrückengasse in die Gürtelallee des Praters, mit dem Gesichte gegen die Rotunde und sah das Meteor, nach den später vorgenommenen Messungen, in $A = 268°$ $h = 35°$ aufblitzen und etwas höher als die Rotunde in $A = 255°$ $h = 25°$ (beide Azimuthe magnetisch) nach einigen Secunden verschwinden. Der Herr Beobachter sah es über Bäumen hinziehen, deren Höhenwinkel bei der Messung sich grösser als 20° herausstellte. Die Farbe erschien smaragdgrün.

m) (λ: 33° 59′ 15″, φ: 48° 12′ 20″) Herr Postcontrolor C. Schubauer beobachtete das Meteor von der Hütteldorferstrasse, beim Gitter des Wasserreservoirs auf der Schmelz und sah es in mässiger Höhe, da er den Kopf nicht heben musste, während 2—3 Secunden in sanftem Bogen nach abwärts, von etwas links der Strasse bis über das Hôtel „Wimberger“ sich bewegen, wo es verschwand. Nach dem Stadtplane würden diesen Angaben ungefähr die astronomischen Azimuthe 280° und 263° entsprechen. Das Licht war gelbgrün, die Scheibe hatte $^1/_4$ Monddurchmesser, zog sich aber gegen Ende des Weges in die Länge und wurde birnförmig.

n) (λ: 34° 0′ 16″, φ: 48° 12′ 17″) Herr Dr. Julius Engel schrieb an die k. k. Sternwarte: Ich bemerkte am östlichen Himmel, etwa 30° über dem Horizonte, einen hellglänzenden, grünlich strahlenden Körper ungefähr von $^1/_{10}$ Monddurchmesser, schief im Winkel von circa 45° von oben rechts nach unten links fallen. Nach ungefähr 3 Secunden Dauer erlosch das Meteor, nachdem sich von demselben scheinbar zwei bis drei kleinere Stücke abgetrennt hatten, die nachher gleichfalls verschwanden. Ich sah das Meteor von der Westbahnlinie aus in der nahezu reinen Richtung nach Osten. Die durchlaufene sichtbare Bahnstrecke dürfte etwa 10° gewesen sein.

o) (λ: 34° 2′ 5″, φ: 48° 12′ 12″) Nach den Angaben des Herrn Richard Krastel, welcher die Beobachtungen auf dem Naschmarkte machte, wurde mit dem Theodoliten die magnetischen Azimuthe durch Herrn R. Froebe 278·3° für das erste Erblicken an einer Hauskante und 266·5° für das Ende (welches als sehr sicher bezeichnet wird), sowie die zugehörigen Höhen 14·5° und 13·0° gemessen. Das Meteor erschien rein kugelförmig, von etwa $^1/_5$ Monddurchmesser, weissglühend, sprühte im letzten Drittel der Bahn Funken und verschwand nach 2 Secunden Dauer.

p) (λ: 34° 2′ 11″, φ: 48° 12′ 11″) Herr F. Lecouvey, Vorstand der Liquidatur der Staatseisenbahn-Gesellschaft, befand sich in den Anlagen am Wienflusse, unweit des Resselmonumentes. Er bemerkte um 5^h 19^m das Meteor, als es — nach einer vorgelegten Planskizze — in beiläufig 275° astronomischem Azimuth angelangt war und sah es nach 2—3 Secunden über dem „Palais Ofenheim“ in 258° Azimuth verschwinden. Mittelst eines kleinen Gradbogens bestimmte der Herr Beobachter nach meiner Anleitung die entsprechenden Höhen zu 30° und 26°. Die Bahn erschien ihm sehr schwach geneigt. Herr Lecouvey war so freundlich, eine Reise nach Brünn zu unternehmen, um mir mündlich noch eine genauere Beschreibung der Erscheinung zu geben. Das gelblich leuchtende Meteor hatte etwa $^1/_5$ Monddurchmesser in der kürzeren Dimension, war länglich, vorne stumpf, hinten spitz, mit einem mehrmals längeren Lichtschweif. Die Auflösung beschrieb der Herr Beobachter so: Die Feuerkugel dehnte sich in dem Momente vor dem Verschwinden etwa bis

auf die Grösse der Mondscheibe aus, und es hatte den Anschein, als ob sie in sehr viele, 20—30 scheinbar haselnussgrosse Theilchen von verschiedenen prächtigen Farben zerfallen wäre, welche von einem gemeinsamen Lichthofe umgeben waren und, ohne diesen zu verlassen, mit ihm zugleich nach höchstens $^1/_2$ Secunde erloschen. Herr Lecouvey glaubte auch besonders hervorheben zu sollen, dass der Himmel nicht rein, sondern sehr dunstig war, wodurch der Lichteffect stark vermindert wurde. Dem gegenüber betonen jedoch andere Beobachter die Reinheit des Himmels besonders. So schreibt z. B.:

q) Herr Gustav Pechwill, Regierungsrath im k. k. Finanz-Ministerium, an die Sternwarte: Am 23. October, genau $5^h\ 20^m$, ging ich auf dem Kärntnerringe gegen das mir rechts zur Seite beiläufig 15 Schritte entfernt liegende Kaffeehaus „Kremser“, als ich zufällig aufblickend den besonders reinen, durchsichtigen Himmel bewunderte. In demselben Augenblicke sah ich die schönste Naturerscheinung, welche ich noch je gesehen habe. Beiläufig von SW (Hôtel Impérial) gegen NE (Grand Hôtel) hin sah ich etwa 4—5 Secunden lang ein mir sehr langsam zu fliegen scheinendes, wunderbares Meteor von der Gestalt einer in die Länge gezogenen Kugel, in der Farbe zwischen lichtblau und lichtgrün, welches gerade über der Mitte des Daches des Grand Hôtel verschwand. Dem Berichte ist auch eine Planskizze beigefügt, aus welcher jedoch wegen der Nähe und Ausdehnung der Richtobjecte sichere Angaben nicht zu entnehmen sind. Der Endpunkt dürfte hienach in etwa 250° Azimuth beiläufig erschienen und die Bahnlänge nicht weniger als 45° gewesen sein.

Es sei nun noch einiger Berichte gedacht, welche zwar nur unbestimmt lauten, aber immerhin einzelne bemerkenswerthe Wahrnehmungen enthalten. Herr L. Della Zia, Bureauchef der Staatseisenbahn-Gesellschaft, befand sich in der Nähe des in der vorigen Beobachtung bezeichneten Standpunktes am Kärntnerring, beiläufig vor dem „Palais Königswarter“, als er das Meteor ebenfalls quer über die Ringstrasse fliegen und hinter dem Grand Hôtel — also etwa in ENE — verschwinden sah. Es war von wässerig grüner Farbe, wie die Eisenbahn-Lichtsignale, doch lichter, rundlich, hinten mit einem kurzen Fortsatze. Eine Mittheilung des Herrn G. Berg in Penzing besagt, dass das Meteor

eiförmig, intensiv grünleuchtend durch etwa 5 Secunden sichtbar war und zuletzt eine schwanzartige Verlängerung zeigte. Herr Dr. Joseph de Zannany, welcher die Feuerkugel vom Albertplatz im VIII. Bezirke aus der Richtung von SW gegen NE hin ziehen sah, bezeichnete die Farbe als blaugrün. Eine Beobachterin, die sich in der Nähe des Centralfriedhofes befand, beschreibt das Meteor als metallisch grün.

2. Prag (λ: 32° 5′, φ: 50° 5′). Herr Redacteur Joseph Svátek richtete an die k. k. Sternwarte eine sehr interessante Mittheilung, welche er auf mein persönliches Ansuchen sachgemäss ergänzte, so dass sich seine Beobachtung als eine besonders sichere darstellt. Er sah, als er um $5^h 20^m$ über die Karlsbrücke von der Kleinseite zur Altstadt ging, etwas südöstlich vom Altstädter Wasserthurm ein ungemein helles und grosses Meteor aufleuchten, welches blitzschnell in schräger Linie unter einem Winkel von etwa 40° hinschoss und nach einem Laufe von höchstens 3 Secunden noch oberhalb des östlichen Horizontes verschwand. Er bemerkte ferner: „Die Farbe des dahinschiessenden Himmelskörpers, dessen Grösse und Lichtglanz mir um so mehr auffiel, als es um jene Zeit noch heller Tag war, erschien mir anfangs bläulich, hierauf schillerte sie ins Lichtgelbe und schliesslich erschien das Meteor glänzend weiss, worauf es plötzlich verschwand. Die Form war gänzlich die einer Kugel. Das Auffallendste war die Grösse des Meteors, wodurch allein sich der Umstand erklärt, dass dasselbe bei hellem Tage gesehen werden konnte. Seit Jahren beobachte ich die Sternschnuppenfälle im August und November, habe aber noch nie ein Meteor von dieser Grösse gesehen."

Der Herr Beobachter war später so freundlich, in den Stadtplan die Richtungen von seinem Standpunkte gegen Anfang und Ende der Erscheinung einzutragen und die zugehörigen scheinbaren Höhen mit dem Gradbogen zu messen, woraus sich ergab: Anfang $A = 317°$ $h = 15°$, Ende $A = 301 \cdot 5$ $h = 5°$. Auch die Neigung der Bahn wurde am Gradbogen verglichen und ergab 35°, während vorher 40—45° abgeschätzt wurden. Die angegebene Neigung stimmt mit den Positionen sehr gut überein.

3. Iglau (λ: 33° 16, φ: 49° 23′). Herr Bürgerschuldirector Fr. Kowarz sah das Meteor am südöstlichen Himmel die

Richtung gegen Klein-Beranau (266°) nehmen, jedoch früher hinter einer Anhöhe in 12° verschwinden. Die Dauer war höchstens 3 Secunden. Es strahlte in grünlichem Lichte.

4. Kremsier (λ: 35° 4′, φ: 49° 17′). Die nachfolgende Beobachtung des Herrn Oberforstmeisters Johann Jackl war die erste, welche ich über dieses Meteor erhielt, und sie gab zu den weiteren Nachforschungen Veranlassung. Die Feuerkugel, von grünlicher Farbe, trat um 5^h 26^m Ortszeit in SE 11—13° zu S (astronomisch), also im Mittel in 327° Azimuth circa 35° hoch, auf und fiel mit grosser Geschwindigkeit beinahe senkrecht herab, um in ungefähr 12° Höhe nach 3 Secunden zu erlöschen. Sie hinterliess nur einen ganz kurzen, schwachen Schweif. Die angegebenen Daten wurden von dem Herrn Beobachter mit einem einfachen Winkelmesser bestimmt.

5. Brünn (λ: 34° 17′, φ: 49° 12′). Hier wurde die Feuerkugel von dem Fräulein Ludmilla Schober, der Tochter des Herrn k. k. Landesschulinspectors Dr. Carl Schober, beobachtet. Da die Aussicht eine beschränkte war, so konnte nur ein kleines Bahnstück, jedoch bis zum Endpunkte wahrgenommen werden, welch' letzterer der Richtung nach durch das Gebäude der Turnhalle recht sicher fixirt war. In Gegenwart des Fräuleins und nach ihren Angaben habe ich durch Messung folgende Positionen erhalten: Als das Meteor hinter einem Dache hervorkam, hatte es $A = 313°$ $h = 11°$, am Endpunkte $A = 305{\cdot}8°$ $h = 8°$. Da bei der Bahnlänge von wenig mehr als 7° die unvermeidlichen Beobachtungsfehler sehr störend werden konnten, habe ich auch, unabhängig von den beiden Punkten, die scheinbare Neigung der Bahn festzustellen gesucht, für welche 25° als ein der Erinnerung am besten entsprechender Werth erkannt wurde. Die Dauer war 2 Secunden, die Farbe gelb.

Später erfuhr ich, dass das Meteor in Brünn auch von dem Herrn Ingenieur Kostersitz gesehen worden war. Da sich jedoch dieser Beobachter nur vorübergehend hier aufgehalten hatte, konnte ich über seine Wahrnehmungen wenig Bestimmtes mehr erfahren; doch wurde mir der Standpunkt und jene Stelle über (oder hinter?) einem Dache, wo das Meteor nach Aussage des genannten Herrn Ingenieurs verschwunden sein soll, gezeigt, so dass ich Richtung und Höhe dieses Punktes messen konnte.

Ich fand das Azimuth fast ganz gleich mit jenem der obigen Beobachtung, nämlich 306°, dagegen die Höhe 12°. Weil nun in der Zeichnung und Beschreibung, welche Herr Kostersitz entworfen hatte, hinter dem Hauptkörper einige getrennte Theile dargestellt und ausdrücklich erwähnt sind, und weil diese Theilung nach den Wiener Berichten erst am Schlusse erfolgte, denke ich diese Angabe um so eher ebenfalls für den Endpunkt gelten lassen zu können, da sie, wenigstens im Azimuth, mit jener des Fräulein Schober ganz übereinstimmt. Für die zugehörige Höhe habe ich den Mittelwerth, nämlich 10° in Rechnung gezogen.

6. Austerlitz (λ: 34° 33′, φ: 49° 9′). Durch die entgegenkommende Unterstützung der Redaction der „Neuen freien Presse" erhielt ich eine Mittheilung der Fräulein Irma Mandl und Adele Schimatschek, in welcher sie die Bewegungsrichtung des nach ihrer Angabe um 5^h 12^m beobachteten Meteors von SW nach NE und dessen Gestalt als eine trichterähnliche bezeichneten. Auch war bemerkt, dass es in „wunderbar seltsamen, grünschillernden Farben" erschien. Bei der weiteren Erkundigung wurde ich von dem Herrn Zuckerfabriks-Director Emil Löw in Austerlitz freundlichst unterstützt. Es konnte jedoch nicht mehr festgestellt werden als Folgendes: Das Meteor wurde in der Richtung über Kobeřitz (d. i. 349° Azimuth) zuerst gesehen und es nahm gegen Ost ziehend eine solche Richtung, dass es, wenn es nicht früher hinter Gebäuden verschwunden wäre, gegen $A = 280°$ (der Zeichnung auf der Planskizze entsprechend) zur Erde gekommen wäre. Es wurde festgehalten, dass diese Angabe sehr genau sei, die Stelle aber, wo die Erscheinung den Blicken entschwand, war nicht mehr sicher anzugeben. Eine sorgfältig in Farben ausgeführte Darstellung zeigt das Meteor oval, von blauer Farbe, mit einem sehr kurzen, kegelförmigen, gelben Schweifansatz. In der beigefügten Erläuterung ist die Erscheinung „als eine bläulich-weisse ovale Kugel von der Grösse des Mondes, wie intensives elektrisches Licht, mit zwei sich nach hinten schliessenden gelbflimmernden Bändern" beschrieben und die Dauer mit 8 Secunden angegeben.

7. Feldsberg (λ: 34° 25′, φ: 48° 45′). Herr Gerichtsadjunct August Koerber sah, wie er an die Direction der Wiener Sternwarte schrieb, das Meteor gerade im Momente des Erlöschens

und gab folgende Schilderung: Die Farbe war lichtgrün, der Kern der Feuerkugel war wie von einem schwachen Dunst oder Rauch umgeben und bewegte sich, ziemlich rasch rotirend und fliegend, nach dem kurzen zurückgelassenen grünen Streifen zu urtheilen, etwa in der scheinbaren Richtung von Nicolsburg nach Lundenburg (d. i. von etwa 18° N von W gegen ebensoviel S von E). Da der Herr Beobachter kein angebbares Bahnstück wahrgenommen hatte, begnügte ich mich damit, ihn um Feststellung des Endpunktes zu ersuchen. Das Azimuth desselben ergab sich durch Eintragung in die Karte in 277°, die Höhe durch Messung mit dem Gradbogen zu $13^3/_4$°.

Aus Lundenburg berichtete Herr M. Dostal der „Neuen freien Presse", dass er das Meteor um $5^h\ 25^m$ mit grünlichgelbem Lichte in der Richtung gegen NE niedergehen sah. Nähere Mittheilungen konnte ich von diesem Beobachter nicht erhalten.

8. Stein (λ: 33° 14·8′, φ: 48° 24·6′). Der hochwürdige Herr Stiftshofmeister P. Wilh. Obermayer schilderte in einem kurzen Berichte die Erscheinung mit folgenden Worten: „Ich sah plötzlich einen blendendweissen, feurigen Körper, wie eine grosse Citrone, hinten mit einem feurigen Stiele oder einer Masche von rechts nach links in der Richtung SW—NE über das Thal fliegen und im nahen Weingarten verschwinden." Auf Veranlassung des Herrn Beobachters war Herr Gymnasialprofessor Alois Prey so gefällig, Messungen vorzunehmen. Der Standpunkt war im Alaunthale; das Meteor kam hinter einem Baume der rechtsseitigen (südlichen) Thalwand hervor und verschwand knapp vor der entgegengesetzten Seite des Thales, welches es in schwach geneigter Bahn scheinbar übersetzt hatte. Die Messung ergab für den Anfang $A = 290°$ $h = 5°$, für das Ende $A = 268°$ $h = {}^1/_2°$. Die ganze Bahn liegt ersichtlich viel zu tief, wahrscheinlich weil der Standpunkt nicht mehr sichergestellt werden konnte. Eine sorgfältige Skizze der Bahn gibt 26° Neigung gegen den Horizont.

Aus dem nahen Krems berichtete Herr Realschulprofessor A. Pokorny in der „Neuen freien Presse" und mit einer Verbesserung auch an die Sternwarte, dass zwischen $5^h\ 22^m$ und $5^h\ 23{\cdot}5^m$ Wiener Zeit ein glänzendes Meteor mit grünlichgelbem Lichte am südlichen Himmel auftauchte, und nach etwa 2 Secunden

in der Richtung ENE verschwand. Ein Berichterstatter aus Krems in der „Deutschen Zeitung“ schreibt, dass das Meteor den südlichen Horizont in der Richtung W—E durcheilte und im Osten verschwand.

9. Mautern (λ: 33° 15′, φ: 48° 23·3′). Herr Eduard v. Zambaur, k. u. k. Lieutenant in Krems, befand sich zur Zeit des Falles auf dem technischen Übungsplatze nächst Mautern. Nach seiner Beobachtung erschien das Meteor in $A = 308°$ $h = 24°$ und erlosch in $A = 279°$ $h = 18°$. Die Richtungen wurden in die Specialkarte eingetragen, die Höhen jedoch nur abgeschätzt.

10. Gloggnitz (λ: 33° 47′, φ: 47° 40·7′). Eine ungenannte Abonnentin der „Neuen freien Presse“ befand sich in der Gloggnitzer Au, unweit des Bahnhofes, als „eine ellipsoidische, bläulichgrün leuchtende Masse mit einem langen Striche, den sie nachzog, am Himmel vom Dorfe Wörth ($A = 284°$) bis gegen Stuppach ($A = 240°$) zog.

11. Hirm (λ: 34° 7·5′, φ: 47° 47·2′) im Ödenburger Comitat. Herr Eduard Czicho, Zuckerfabriks-Adjunct, berichtete von hier an die Wiener Sternwarte: „Ich erblickte bei fast vollständiger Tageshelle in nordöstlicher Richtung eine Lichterscheinung von der Grösse eines Hühnereies sich herabsenken. Die prachtvoll smaragdgrüne Färbung ging in den nächsten Augenblicken in eine bläulich-grüne über. Ich bemerkte das Meteor zu spät, um die Flugrichtung beobachten zu können und sah nur das Herabsinken in NE. In derselben Richtung war zu dieser Zeit Herr Verwalter Carl Girardoni mit seinem Neffen Béla Matisz beschäftigt. Letzterer bemerkte die Erscheinung viel früher und sagte bestimmt, die Flugrichtung sei SE—NE deutlich zu erkennen gewesen. Er fügte hinzu, das Meteor müsse anscheinend zwischen Eisenstadt und Vulka Prodersdorf niedergegangen sein“. Auf mein Ersuchen zeichnete Herr Czicho die betreffenden Daten in die Karte ein. Hiernach ergab sich aus seinem Standpunkte das Ende in $A = 237°$ und für Herrn Girardoni in $A = 237·6°$. Den Anfangspunkt hatte Herr Matisz in $A = 248°$ bemerkt. Da die beiden Beobachtungspunkte kaum $^1/_2$ *km* von einander entfernt waren, habe ich oben die mittlere Position angesetzt.

12. Ödenburg (λ: 34° 15·5′, φ: 47° 41′). Durch freundliche Vermittlung des Herrn Lehrers Johann Polster wurde mir bekannt, dass Herr Rittmeister v. Szalay die Feuerkugel beobachtet hatte, dessen Gefälligkeit ich auch die folgenden, durch Eintragung in die Karte und Messung mit dem Gradbogen sichergestellten Daten verdanke. „Das Firmament", schreibt der Herr Beobachter, „war klar und wolkenlos, auch war es zur Zeit der Beobachtung, etwa 5^h $20-22^m$, beinahe noch taghell. Die Farbe dieses intensiv glänzenden Meteors von seltener Schönheit und Eigenart war lichtgelb; der Kern, von etwa 20 *cm* Durchmesser, flammte und sprühte Funken, der Lichtstreifen war gegen das Ende zu spitz verlaufend." Gemessen wurden für den Anfang: $A = 237°$ $h = 20°$, für das Ende: $A = 220°$ $h = 16°$. Die Dauer betrug $1-1^1/_2$ Secunden. Die Beobachtung fand in der Stadt zwischen Gebäuden statt.

13. Budapest (λ: 36° 46′, φ: 47° 29′). Die „Neue freie Presse" brachte eine telegraphische Nachricht, dass hier am Abende des 23. October ein Meteor von seltener Schönheit wahrgenommen worden sei. Auf die folgende Beobachtung machte mich Herr Dr. Nicolaus v. Konkoly in Ó-Gyalla aufmerksam. Herr R. v. Kövesligethy, Assistent am königl. physikalischen Institute in Budapest, stand eben 2 *m* weit vom Fenster und hatte eine grosse, hellbrennende Gasflamme zwischen diesem und seinen Augen, als ihn um 5^h 35^m der intensive Lichtreiz des äusserst glänzenden Meteors zwang, hinauszusehen, wobei er durch etwa 0·2 Secunden ein sehr kurzes Stück der Bahn auffassen konnte. Für den Endpunkt wurde $A = 146°$ $h = 26°$ gemessen, allerdings erst später nach der Erinnerung. Der Herr Beobachter, dem ich diese wichtigen Mittheilungen verdanke, bemerkte ferner, dass das Meteor aus der Nachbarschaft des Zeniths herzukommen schien und fügte bei: „Indem ich die Richtung des Meteors gegen die Verticale auf verschiedene Zettel zeichnete, fand ich, dass sie zwischen 20° und 27° gelegen sein mochte, wobei sie nach Norden wies."

14. Graz (λ: 33° 8′, φ: 47° 4′). Herr Regierungsrath Joseph Wastler, Professor an der k. k. technischen Hochschule daselbst, dessen collegialer Freundlichkeit ich die folgende Beobachtung verdanke, sah in der Elisabethstrasse um 5^h 18^m das in weiss-

grünlichem Lichte leuchtende Meteor eben hinter einem Dache verschwinden. Da der beobachtete Weg nicht mehr als höchstens 2° betragen hatte, konnte die Bahnlage nicht festgestellt werden. Das Verschwinden erfolgte nach Messung in $A = 234°$ (astronomisch) $h = 10^1/_3°$.

Von den beiläufigen, in den Journalen mitgetheilten Nachrichten enthält jene aus Baden in Niederösterreich eine Dauerangabe (5 Secunden). Auch hier wird die Feuerkugel als birnförmig, mit einem Stiele oder Bändchen am Ende und die Farbe als grünlich schillernd bezeichnet.

Die nachstehende, am selben Tage in Wien gemachte Beobachtung kann ich nicht unberührt lassen, wenn sie auch das in Rede stehende Meteor sicher nicht betrifft.

Herr **Maly**, früher Studirender der Astronomie an der Wiener Universität, theilte dem Herrn Sternwarte-Director Dr. **Weiss** Folgendes mit: Am 23. October um $5^h\ 25^m$ mittlerer Wiener Zeit sah er, mit einem Bekannten beim Artillerie-Arsenale stehend, ein helles Meteor, dessen Anfang er wahrscheinlich nicht bemerkt hatte, da er erst durch den Lichtblitz aufmerksam gemacht wurde. Es zeigte zuerst eine deutliche Scheibe von etwa $^2/_3$ Monddurchmesser, nahm aber sowohl an Ausdehnung, als auch an Helligkeit rasch ab, so dass es nur noch etwas heller als Venus im stärksten Glanze, allerdings in Dünsten, in der Nähe des Horizontes erlosch. Das Meteor sprühte Funken, war birnförmig, innen blau gefärbt, mit weisslichen Rändern, zuletzt gelblich. Es liess einen an den Rändern verwaschenen gelblichen Schweif zurück, der mindestens durch 8 Secunden sichtbar blieb. Die gesehene Bahn wurde in etwa 3 Secunden durchlaufen.

Bei der von dem Herrn Assistenten Dr. J. **Spitaler** mit Herrn **Maly**, welcher selbst die Einstellungen vornahm, an Ort und Stelle, nämlich etwas östlich vom Hauptthore des Arsenals, ausgeführten Messung ergab sich nun für den Anfang: $A = 122°$ $h = 8°$, für das Ende: $A = 150°$ $h = 5°$ (wobei die Azimuthe noch um die magnetische Declination zu vermindern sind), welche Bahn also, im Gegensatze zu allen anderen Angaben aus Wien, auf der **Westseite** lag. Ein Irrthum im Ablesen ist bestimmt

ausgeschlossen, da Herrn Dr. Spitaler, der über die beiläufige Bahnlage des allgemein beobachteten Meteors schon orientirt war, die abweichende Himmelsgegend selbstverständlich auffiel und da übrigens der östliche Theil des Himmels durch das Arsenal verdeckt war. Da anderseits Herr Maly bei wiederholter Erkundigung mit grosser Bestimmtheit auf der unbedingten Verlässlichkeit seiner Angaben beharrte, so kann es nur ein anderes Meteor gewesen sein, welches von ihm beinahe zur selben Zeit oder wenige Minuten nach dem hier besprochenen, gesehen, sich im Westen aus einem ganz anderen Radiationspunkte her bewegt hatte.

Der Versuch, dieses Meteor, über welches mir indessen sonst nicht die geringste anderweitige Nachricht zugekommen ist, einem der mir bekannten, zur Zeit in der betreffenden Himmelsgegend befindlichen Radianten zuzutheilen, hat zu nachstehendem Ergebnisse geführt. Die obigen Messungen entsprechen den Positionen: I. $\alpha = 191 \cdot 3°$ $\delta = +21 \cdot 7°$, II. $\alpha = 163 \cdot 9°$ $\delta = +36 \cdot 4°$. Wird der entsprechende grösste Kreis über I hinaus nach rückwärts verlängert, so geht er mit einer Abweichung von kaum 1° auf den Radianten $\alpha = 224°$ $\delta = -8°$ zu, welchen ich für das grosse detonirende Meteor fand, das am 23. October 1887 um 4^h 24^m Wiener Zeit, also genau zwei Jahre vorher, im Süden der Monarchie beobachtet worden ist.[1] Der Fall, dass bei ausgedehnteren Erkundigungen durch die Tagesblätter gleichzeitige Beobachtungen nicht identischer Erscheinungen auftauchen, ist mir übrigens schon recht oft vorgekommen.

Für die Epoche der hier zu besprechenden Erscheinung erhält man aus 14 bestimmten Zeitangaben: 1889, October 23, 5^h $22 \cdot 0^m$ mittlerer Wiener Zeit $\pm 0 \cdot 6^m$ mittlerem Fehler. Die Angabe *i)* von Wien, dann jene von Kremsier, Krems und Graz stimmen genau mit dem Mittel überein.

Hemmungspunkt.

Die grosse Zahl der aus Wien über die Lage des Endpunktes vorliegenden Beobachtungen erfordert zunächst eine besondere

[1] Diese Berichte, 97. Bd., Abth. II, Juni, S. 684.

Betrachtung. Bei der bedeutenden Ausdehnung der Residenz wäre es nämlich nicht ausgeschlossen, dass schon diese Daten für sich, weil ihre Menge die Unsicherheit vermindert, eine bestimmte Parallaxe erkennen liessen. Da aus einer vorläufigen Betrachtung folgte, dass der Hemmungspunkt ungefähr östlich von Wien gelegen war, hatte ich, um den azimuthalen Theil der Parallaxe zu untersuchen, die Wiener Beobachtungen — ohne Rücksicht auf die geographischen Längen, deren Unterschiede bei dieser Lage wenig in Betracht kommen — in zwei Gruppen, eine nördliche und eine südliche getheilt und, wie man im Folgenden findet, aus den angesetzten einzelnen astronomischen Azimuthen, sowie aus den geographischen Breiten Mittelwerthe gebildet. Von den 13 Angaben ist in der ersten Gruppe nur *h)*: $A = 275 \cdot 5°$ weggeblieben, weil bei dem grossen Unterschiede von den übrigen Beobachtungen und mit Rücksicht auf die Umstände der Wahrnehmung die Vermuthung nahe liegt, dass der weitere Lauf des Meteors denn doch durch die vorstehenden Bäume verdeckt wurde, so dass sich die Angabe nicht auf den wirklichen Endpunkt bezieht.

Nördliche Gruppe.		Südliche Gruppe.	
	Endpunkt-Azimuth		Endpunkt-Azimuth
a)	249°5	*i)*	258°0
b)	257·5	*k)*	266·0
c)	257.0	*l)*	245·5
d)	268·5	*m)*	263·0
e)	265·5	*o)*	257·0
f)	255·5	*p)*	258·0
Mittel	258°9±2°8	Mittel	257°9±2°8
Mittlere Breite:	48° 14′ 21″		48° 12′ 26″

Der mittlere Fehler einer Beobachtung in der ersten Gruppe ist $\pm 6 \cdot 9°$, in der zweiten $\pm 7 \cdot 0°$, also in beiden fast ganz gleich. Die beiden Mittelwerthe zeigen für etwa 2′ Breitendifferenz einen azimuthalen Unterschied von 1°. Obwohl nun dieses Resultat ziemlich nahe derjenigen Lage des Endpunktes entspricht, welche man aus den anderweitigen Beobachtungen

folgern kann, so ist es doch nur ein zufälliges, weil dieser geringe Unterschied der beiden Azimuthmittel von dem mittleren Fehler jedes einzelnen beinahe um das Dreifache übertroffen wird. In der That ändert sich auch diese Beziehung völlig, wenn z. B. aus der zweiten Gruppe die stark abweichende Angabe *l)* weggelassen wird. Es schien mir hiernach angemessen, aus allen 12 Azimuthen nur ein Mittel zu bilden, nämlich $A = 258\cdot4° \pm 2°$ und dieses für die mittlere Polhöhe 48° 13′ 24″ gelten zu lassen.

Was nun die Höhen betrifft, so ist es ein eigenthümliches Zusammentreffen, dass die meisten grossen Werthe der Endhöhe an den östlichen Punkten der Stadt gemessen worden sind, so zwar, dass, wenn man nun auch die Höhen in zwei Gruppen, eine östliche und eine westliche trennt, Mittelwerthe entstehen, welche, sofern man ihren Unterschied als Höhenparallaxe gelten liesse, den Hemmungspunkt wenig mehr als 4 *km* östlich von Wien ergeben würden, während in Wirklichkeit seine Entfernung mehr als dreissigmal so gross gewesen sein muss.

Folgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht der gemessenen Höhen, in welcher für die Beobachtung *h)* jener Werth eingesetzt ist, der sich aus der Verlängerung des angegebenen Bahnbogens bis zum Azimuth 258·4 schliessen lässt.

Westliche Gruppe.	Endpunkt-Höhe	Östliche Gruppe.	Endpunkt-Höhe
a)	6°	*h)*	19°
b)	20	*l)*	15
c)	6	*i)*	25
d)	10	*o)*	13
e)	12	*p)*	26
f)	10		
Mittel	10°7 ± 2°1	Mittel	19°6 ± 2°6
Mittlere Länge:	34° 0′ 16″		34° 2′ 15″

Der mittlere Fehler einer Beobachtung in der ersten Gruppe ist ± 5·2°, in der zweisen 5·8°. Der Unterschied der beiden Mittel, nahe 9°, ist, wie man sieht, viel grösser als die rechnungsmässige Unsicherheit eines jeden, ja fast noch zweimal so gross

als der mittlere Fehler einer einzelnen Beobachtung, so zwar, dass man ihn nach den Regeln der Wahrscheinlichkeit zum grossen Theile als reelles Resultat eines parallactischen Einflusses annehmen müsste, wenn eben nur diese Höhenangaben vorliegen und die Azimuthe diese Auffassung nicht entschieden verwehren würden. Da ich bei der Ermittlung der geographischen Lage des Hemmungspunktes hier überall nur die Richtungen benützt und auf die Berücksichtigung der unsicheren Höhenparallaxe verzichtet habe, ergibt es sich von selbst, dass am einfachsten alle 11 Werthe der Höhe in ein Mittel, nämlich $h = 14 \cdot 7°$, für die Länge 34° 1′ 16″ zu vereinigen sind. Allerdings erweist sich dann der mittlere Fehler einer Beobachtung $\pm 7 \cdot 3°$ und der des Mittels $\pm 2 \cdot 2°$, so dass jeder grösser ist, als bei den einzelnen Gruppen, aber diese Zahlen sind offenbar viel sicherer als die obigen, aus zufälliger Combination entstandenen. Die aus den gesammten Wiener Beobachtungen für den Endpunkt reducirten Angaben sind daher $A = 258 \cdot 4°$ $h = 14 \cdot 7°$.

Für die Ermittlung der Lage des Hemmungspunktes wurden nun überdies die unter 2., 4., 5. und 7. bis 13. angeführten Endazimuthe benützt. Dort, wo mehrere Beobachtungen vereinigt sind, wie aus Wien, Brünn und Hirm, ist das Gewicht der Anzahl der Beobachtungen entsprechend genommen worden. Auf diese Weise ergab sich der wahrscheinlichste Werth für die Lage des Hemmungspunktes:

in 35° 48·1′ östlicher Länge $\pm 7'$ mittlerem Fehler
und 48° 28·3′ nördlicher Breite $\pm 2'$ mittlerem Fehler,

d. i. über der Gegend zwischen Neutra und Gross-Tapolcsán in Ungarn.

Die grössere Sicherheit in Breite erklärt sich durch das Überwiegen jener Beobachtungen, welche eben mehr die Polhöhe als die Länge bestimmen. Im Längenmaasse ist der mittlere Fehler auf dem Parallelkreise rund 8·5 *km*, im Meridian 3·7 *km*. Der mittlere Fehler eines Azimuthes von der Gewichtseinheit stellt sich a posteriori auf $\pm 7°$ heraus, daher ebenso gross als er vorhin aus der Vergleichung der Wiener Beobachtungen unter einander gefunden wurde. Die übrigen Azimuthe sind also im Mittel von derselben Qualität, wie die in Wien gemessenen.

Zur Ermittlung der linearen Höhe des Hemmungspunktes wurden ausser dem schon angeführten Mittelwerthe für Wien 14·7° noch benützt die Angaben: Prag 5°, Kremsier 12°, Brünn 10°, Feldsberg 13³/₄°, Stein 0·5°, Mautern 18°, Ödenburg 16°, Budapest 26° und Graz 7·8°. In dem letzteren Orte wurde zwar nicht der Endpunkt beobachtet, sondern das frühere Verschwinden hinter einem Dache. Allein die aus den übrigen Beobachtungen näherungsweise geschlossene scheinbare Bahnlage für Graz gestattet die beobachtete Höhe sehr sicher auf das Endazimuth zu reduciren. In Iglau scheint zwar, wie sich hinterher ergibt, die Beobachtung von 12° für die Höhe ungefähr dem Endpunkte zu entsprechen; weil dies jedoch aus dem Berichte selbst nicht geschlossen werden kann, musste die Angabe unberücksichtigt bleiben.

Die Gewichte sind in der früher angedeuteten Weise festgesetzt worden. Der Mittelwerth für die Höhe des Hemmungspunktes über der Erdoberfläche folgt hieraus zu 36·6 *km* ± ±3·8 *km* mittlerem Fehler oder rund 5 geographische Meilen.

Aus dem Mittel der scheinbaren Höhe, 14·7°, welches den Wiener Beobachtungen entspricht, erhält man, ohne Rücksicht auf alle anderen Beobachtungen, fast dasselbe Resultat, nämlich 36·8 *km*. Man könnte nun vermuthen, dass das übergrosse Gewicht 11, mit welchem jene scheinbare Höhe in Rechnung kam, diese Übereinstimmung bewirkte. Dies ist jedoch nicht der Fall, da nach gänzlicher Hinweglassung der Höhenangaben aus Wien die übrigen den Mittelwerth 36·5 *km*, also ebenfalls nahe übereinstimmend geben.

Der mittlere Fehler einer Höhenangabe von der Gewichtseinheit stellt sich nach der Rechnung auf ±6·5°. Die einzelnen Verbesserungen an den für die Endpunktsbestimmung benützten Azimuthen (ΔA) und scheinbaren Höhen (Δh) ergeben sich aus nachstehender Zusammenstellung.

Verbesserungen am Endpunkte der scheinbaren Bahnen.

	ΔA	Δh
Wien, *a*)........	+ 7·7°	+ 8·7°
b)........	— 0·3	— 5·3

	ΔA	Δh
Wien, *c)*	+ 0·2°	+ 8·7°
d)	—11·3	+ 4·7
e)	— 8·3	+ 2·7
f)	+ 1·7	+ 4·7
h)	(—18·3)	— 4·3
i)	— 0·8	— 0·3
k)	— 8·8	—
l)	+11·7	—10·3
m)	— 5·8	—
o)	+ 0·2	+ 1·7
p)	— 0 8	—11·3
Wien (Mittel)	— 1·2	0·0
Prag	+ 0·6	+ 0·2
Brünn	+ 0·1	+ 4·4
Kremsier	+ 2·6	+ 6·8
Feldsberg	+ 9·9	+ 4·9
Stein	— 1·3	+ 9·8
Mautern	—13·0	— 7·7
Gloggnitz	+ 0·7	—
Hirm	+ 2·1	—
Ödenburg	+11·6	— 2·3
Budapest	+ 1·1	—10·8
Graz	—	— 0·5

Radiationspunkt und Bahnlage gegen die Erde.

Auch für die Bestimmung des Radiationspunktes wird das reichliche Material aus Wien zu vereinigen sein. Will man die beiden Abschätzungen der Bahnneigung unter *g)* und *n)* mitbenützen, was hier geschehen ist, weil auch die auf Messung beruhenden Bahnbogen erhebliche Unterschiede zeigen, so stehen aus Wien 12 Angaben zu Gebote. Für den Endpunkt wurde nun die aus der schliesslich ermittelten Lage hervorgehende, verbesserte scheinbare Position genommen und als wahrscheinlichste scheinbare Bahn für Wien wurde jener grösste Kreis angesehen, in Bezug auf welchen die Quadratsumme der Abstände des Punktes I aus den einzelnen Beobachtungen ein Minimum wird.

Die so erhaltene mittlere Bahn hat im grössten beobachteten Azimuth (Beobachtung Wien *f*)) $A = 305 \cdot 5°$, die zugehörige Höhe $h = 30° \pm 3 \cdot 4°$ mittlerem Fehler.

Bei den übrigen Beobachtungen wurde für Prag die mit der scheinbaren Neigung übereinstimmende Lage des Anfangspunktes und in Brünn wegen des sehr kurzen Bahnstückes die Neigung beibehalten. Für Kremsier, Mautern und Ödenburg ist überall der im Vorigen bezeichnete Punkt des Aufleuchtens mit dem verbesserten Endpunkte verbunden worden. In Budapest wurde die scheinbare Neigung gegen die Verticale im Mittel 23·5° genommen und hier, sowie in Stein, die Bahn mit der bezeichneten Neigung an den scheinbaren Endpunkt angeschlossen. Man kann ferner leicht bemerken, dass sich nun auch die Beobachtung in Austerlitz als brauchbar erweist. Es findet sich dort bemerkt, dass der Knoten der scheinbaren Bahn am Horizont in 280° Azimuth bezeichnet wurde. Der vorhin ermittelte Endpunkt musste in $A = 329 \cdot 1°$ $h = 18 \cdot 8°$ gelegen sein, durch welche beide Daten die Bahn im vorliegenden Falle ebenso gut, wenn nicht besser bestimmt ist, als durch eine rohe Abschätzung der Neigung. Da die mit einem * bezeichneten Beobachtungen nur die Bahnlage, nicht aber den Anfangspunkt geben, befindet sich bei diesen in der folgenden Übersicht unter I der Knoten am Äquator angeführt.

Die benützten scheinbaren Bahnen sind durch folgende Coordinaten bestimmt:

	I		II	
	α	δ	α	δ
1. Wien	337·5°	+ 2·2°	22·7°	+19·4°
2. Prag	333·8	−14·8	352·0	−15·7
3. Brünn	336·2	−11·8	345·9	−10·5
4. *Austerlitz	324·4	0·0	342·0	−11·0
5. Kremsier	319·0	− 2·1	325·1	−17·4
6. *Stein	347·0	0·0	17·6	+ 9·9
7. Mautern	337·9	− 3·9	18·0	+10·3
8. Ödenburg	28·8	+32·6	43·5	+35·6
9. *Budapest	298·4	0·0	166·7	+47·8

Hieraus ergab sich die Lage des **scheinbaren Radiationspunktes**

in Rectascension $= 311\cdot4° \pm 3\cdot1°$ mittlerem Fehler
Declination $= -11\cdot3° \pm 1\cdot5°$ mittlerem Fehler.

Die nothwendigen Verbesserungen am jeweiligen Anfangspunkte (I) stellen den Abstand der betreffenden beobachteten Position von dem durch den Radianten gehenden scheinbaren Bahnbogen dar, nämlich: $\Delta s = \sqrt{\Delta\alpha^2 \cos^2\delta + \Delta\delta^2}$ Sie sind aus der folgenden Übersicht zu entnehmen.

Verbesserungen am Punkte I.

	Δs
Wien, *a)*	$+10\cdot4°$
b)	$-12\cdot5$
c)	$-\ 2\cdot2$
d)	$+12\cdot5$
f)	$+10\cdot8$
h)	$+\ 3\cdot5$
i)	$-\ 8\cdot0$
l)	$-18\cdot5$
o)	$+\ 5\cdot3$
p)	$-\ 7\cdot9$
Prag	$-\ 0\cdot1$
Brünn	$+\ 6\cdot0$
Kremsier	$-10\cdot3$
Mautern	$+\ 1\cdot0$
Ödenburg	$+\ 0\cdot2$

Für die fünf scheinbaren Bahnen, bei welchen nur die Neigung gegen den Horizont benützt wurde, ist: Δi bei Wien *g)* und *n)* $-15\cdot3°$, für Budapest $+6\cdot2°$, für Austerlitz $-0\cdot5°$ und für Stein nur $-0\cdot2°$.

Die wirkliche Bahnlage gegen die Erde ergibt sich nun durch Berechnung des Azimuths, in welchem der oben berechnete Radiant zur Zeit am Endpunkte erschien. Man findet auf diese Weise, dass die Feuerkugel aus 341° Azimuth, d. i. 19° östlich von Süd her, also nahezu aus SSE, in einer Bahn von $28\cdot5°$ Neigung gegen den Horizont zum Endpunkte kam.

Das erste Aufleuchten wurde, wie immer, in den verschiedenen Orten sehr verschieden beobachtet, am frühesten von den Herren Svátek in Prag und Rosmanith in Wien. Die erstere Beobachtung gibt nicht weniger als 271 *km* Bahnlänge — welche in Prag auf den kleinen Bogen von 15° verkürzt erschienen — und 170 *km* oder rund 23 geographische Meilen für die Höhe des ersten Aufleuchtens, die zweite 221 *km* Bahnlänge und 143 *km* oder 19·3 geographische Meilen Anfangshöhe. Nach der Lage des Beobachtungsortes gegen die Bahn kann dem aus der Prager Beobachtung abgeleiteten Resultate, obwohl sie sich als eine der vorzüglichsten bewährt hat, kein grosses Gewicht für die Bestimmung der Bahnlänge beigelegt werden, weil eine Unsicherheit von nur 1° in der angegebenen scheinbaren Bahnlänge die wirkliche mit mehr als 30 *km* trifft. Anderseits ist jedoch der aus dieser Beobachtung hervorgehende Werth für die Höhe des Aufleuchtens (nämlich 23 geographische Meilen) anderweitigen Erfahrungen völlig entsprechend, und nur die geringe Dauerangabe von 3 Secunden steht mit der grossen Bahnlänge nicht recht im Einklang.

Die Wiener Beobachtung des Herrn Rosmanith hat eine günstigere Lage gegen die Bahn, denn ein Fehler von 1° bewirkt nur 10 *km* Fehler in der Bahnlänge, deren grosser Werth auch durch die relativ ziemlich lange Dauer wahrscheinlich gemacht wird.

Der Ort, in dessen Zenith nach der Prager Beobachtung das Aufleuchten stattfand, ist Hajós, südöstlich von Kalocsa in Ungarn (λ: 36° 47·5′, φ: 46° 26·5′), jener, welcher der Wiener Beobachtung entspricht, liegt 44 *km* oder 6 geographische Meilen weiter gegen NNW, oberhalb Duna Földvár. In Kremsier und Austerlitz ist sicher das Aufleuchten auch sehr früh beobachtet worden, weil die dortigen Positionen noch über den Radiationspunkt hinausgehen; aber eben desshalb ist eine Abschätzung der Bahnlänge aus diesen Angaben nicht thunlich.

Die hier entwickelte Bahn des Meteors lag also von 170 *km* über Hajós oder mindestens 143 *km* über Duna Földvár in der vorhin bezeichneten Neigung über den Gegenden westlich von Duna Pentele, Nyék, Bicske, zwischen Komorn und Gran, östlich von Szt. Miklós bis über das Gebiet zwischen Neutra und

Tapolcsán, wo das Meteor in 36·6 *km* Höhe durch den Widerstand der Atmosphäre in seinem Laufe vollständig gehemmt wurde und dann auch alsbald erlosch.

Von den meisten Beobachtern wurde die Feuerkugel erst im letzteren Theile ihres Laufes bemerkt, da sie ungefähr nur mehr 60 *km* oder etwas mehr als 8 geographische Meilen hoch, zwischen Komorn und Gran über die Donau zog. In der weiter unten bei Ermittlung der Geschwindigkeit folgenden Zusammenstellung wird man die wahren Bahnlängen für diejenigen Beobachtungen, bei welchen die Berechnung möglich und wegen der Dauerangabe nothwendig war, finden.

Gestalt, Grösse und Farbe der Feuerkugel.

Die typische birnförmige Gestalt des Meteors wird in den meisten Beobachtungen hervorgehoben. Für die Abschätzung der Grösse geben die Wiener Wahrnehmungen treffliche Anhaltspunkte, da acht Vergleichungen mit dem scheinbaren Durchmesser des Mondes vorliegen. Diesen als Einheit angenommen, geben die Beobachtungen *c)* 0·5, *h)* 0·4, *d)* und *m)* 0·25, *f)* *o)* und *p)* 0·2, endlich *n)* 0·1, woraus das Mittel 0·26 oder 7·9′±1·4′ beträgt. Der mittlere Fehler einer Abschätzung stellt sich auf 13°/₀ des Monddurchmessers.

Für die Entfernung von 135 *km*, in welcher die Feuerkugel im letzteren Theile ihrer Bahn von Wien aus gesehen wurde, ergibt sich hieraus ihr wirklicher Durchmesser zu 310 *m*±56 *m*. Die Unsicherheit (abgesehen von einseitigen Fehlern) ist also etwa 18 °/₀.

Man kann annehmen, dass sich die angeführten Grössenschätzungen zumeist auf die Queraxe an der breitesten Stelle beziehen, was bei einigen auch ausdrücklich bemerkt ist. Die Längsaxe erschien nach den vorliegenden Zeichnungen noch ½ mal länger und wird also 450—600 *m* betragen haben. An diese schloss sich der Schweif von drei- bis fünffacher Länge, woraus man ersehen kann, dass die zurückgebliebenen feinsten Theilchen und Dämpfe noch auf einer Strecke von mehr als 1 *km* hinter der Feuerkugel vertheilt waren. Nach erfolgter Abkühlung ist von diesen Residuen in der Atmosphäre keine auffällige Spur zurückgeblieben, während das Meteor vom 23. October 1887

einen Streifen zurückliess, welcher in rauchähnlicher Form noch eine halbe Stunde lang sichtbar blieb. Man wird kaum anstehen können, den Unterschied in der materiellen Beschaffenheit der betreffenden Meteoriten zu suchen, und es dürfte jedenfalls von Interesse sein, Eigenthümlichkeiten solcher Art stets hervorzuheben.

Eine seltene Übereinstimmung herrscht im gegenwärtigen Falle zwischen den verschiedenen Angaben über die Farbe des Lichtes, welches die Feuerkugel überwiegend ausstrahlte, eine Übereinstimmung, wie ich sie bisher, meines Erinnerns, sonst noch nicht getroffen habe. Man darf dabei nicht übersehen, dass die einzelnen Angaben von einander ganz unabhängig sind, da kein Beobachter den Bericht des anderen kannte. Von den 27 Angaben, welche vorn zu finden sind, bezeichnen 12 die Farbe als grün schlechtweg, als smaragdgrün oder grünlich, 4 als gelbgrün und 3 als blaugrün, daher zusammen 19 als grün im weiteren Sinne. Von den übrigen lauten 4 auf mehr oder minder intensiv gelb, anderseits 3 auf bläulich oder bläulichweiss, endlich eine auf weiss. Kein Bericht bezeichnet die Farbe des Meteors als roth. In der Skizze aus Austerlitz ist der Kern der Feuerkugel blaugrün oder bläulich, der Rand, gleichsam die Hülle, gelb dargestellt. Herr Ott (Wien, *c)*) sagte, dass sie innen gelbgrün, aussen lichtgelb war. Man kann sich recht wohl vorstellen, dass die äussere Dampfsphäre, deren Temperatur sicher eine niedrigere war als die der centralen Partien, ein mehr gelbliches Licht ausstrahlte.

Dass sich kurz vor dem Erlöschen einige kleinere Stücke gleichsam abtrennten und zurückblieben, ist in den Berichten der Herren Anderle und Dr. Engel ausdrücklich gesagt, sowie in der Zeichnung des Herrn Kostersitz deutlich zu erkennen.

Die unter Wien *p)* mitgetheilte Beschreibung, welche Herr Lecouvey von der schliesslichen Auflösung gibt, erinnert an einen ähnlichen Bericht über das grosse Meteor am 22. April 1888[1] und erscheint, obwohl die Beobachtung sonst vereinzelt ist, der Natur der Sache nach im Wesentlichen ganz wahrscheinlich.

---

[1] In meiner diesbezüglichen Abhandlung: Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums, IV. Bd., S. 80.

Geocentrische Geschwindigkeit des Meteors.

Es ist ein besonders erfreulicher Umstand, dass nicht weniger als 21 Schätzungen des Zeitintervalles vorliegen, während dessen das Meteor in seinem Laufe durch die Atmosphäre sichtbar gewesen ist. Von diesen Angaben beziehen sich 14 auf bestimmte, durch die Beobachtungen begrenzte Bahnstücke von verschiedener Länge. Bei der Ungleichheit der ersten Auffassung kann nur dann eine annehmbare Abschätzung der Geschwindigkeit erwartet werden, wenn jede einzelne Dauerangabe mit der zugehörigen beobachteten Bahnlänge in Beziehung gebracht wird. Um dieses Verhältniss für jede einzelne Beobachtung zu zeigen, habe ich im Folgenden die betreffenden Ergebnisse zusammengestellt und denselben die angenäherten Gewichtsverhältnisse beigefügt. Was die Letzteren betrifft, so dürfte wohl eine kurze Erörterung am Platze sein.

Der mittlere Fehler und daher auch das Gewicht jeder einzelnen Abschätzung der Geschwindigkeit wird abhängen von dem mittleren Fehler der Dauerangabe und jenem der gesehenen Bahnlänge. Über den ersteren lässt sich kaum ein Urtheil bilden, welches ziffermässig ausgedrückt werden könnte. Man weiss wohl, dass die Dauer gewöhnlich überschätzt wird, aber daraus folgt nur, dass die schliesslich ermittelte Geschwindigkeit aller Wahrscheinlichkeit nach etwas zu klein ausfällt; zur Gewichtsbemessung liefert diese Erfahrung nicht hinlängliche Anhaltspunkte und man wird daher jene vorläufig ohne Rücksicht auf die unvermeidlichen Fehler der Dauer vornehmen müssen. Dagegen lässt sich das Verhältniss der mittleren Fehler, welche den einzelnen beobachteten Bahnstücken von vornherein zuzuschreiben sind, allerdings ermitteln. Hierin zeigen sich grosse Verschiedenheiten. Während für die kürzeren in Wien beobachteten Bahnen eine Änderung des betreffenden Azimuthes bei Punkt I bloss eine Veränderung der linearen Bahnstrecke um $\pm 2-4$ *km* bewirkt, hat bei der langen Bahn unter *f)* dieselbe Azimuthdifferenz einen Streckenunterschied von ± 10 *km* und in Prag gar $\pm$ 32 *km* im Gefolge.

Wird nun die gesehene Bahnlänge durch die Dauer getheilt, so geschieht dies auch mit dem daran haftenden mittleren Fehler.

Wenn man also von den Gewichten der Dauerangaben absieht, weil sich über dieselben nichts Bestimmtes sagen lässt, so sind die Gewichte der einzelnen abgeleiteten Geschwindigkeitswerthe proportional den Quadraten der Quotienten aus der Dauer getheilt durch den mittleren Streckenfehler. Auf diese Weise ist wenigstens die Unsicherheit der verglichenen Bahnstrecken in Betracht gezogen.

Diejenigen Dauerangaben, welche nicht auf ein bestimmtes Bahnstück bezogen werden können, nämlich zwei von Wien (2—3^s und 5^s), dann Iglau 3^s, Kremsier 3^s, Austerlitz 8^s, Krems 2^s, Baden 5^s habe ich, zu einem Mittel 4·1^s vereinigt, auf die aus den 14 bestimmten Strecken genommene Durchschnittslänge von 97 *km* bezogen, nur als eine einzige Beobachtungsgleichung mit dem Durchschnittsgewichte in Rechnung gebracht. Es ergibt sich auf diese Weise folgende

Übersicht der beobachteten Bahnstrecken, verglichen mit der Dauer.

	Länge der Bahnstrecke in Kilometern	Dauer in Secunden	Geschwindigkeit in Kilometern	Gewicht
Wien, *a)*	173	3·0	49·0	0·3
b)	37	1·5	24·6	0·3
c)	77	2·5	30·8	0·3
d)	33	1·5	22·0	0·4
f)	221	5	44·2	0·3
h)	111	2	55·5	0·06
m)	50	2·5	20·0	0·7
n)	25	3	8·3	1·6
o)	33	2	16·5	0·7
p)	52	2·5	20·4	0·7
q)	180	4·5	40·0	0·3
Prag.........	271	3	90·3	0·01
Brünn........	50	2	25·0	1·0
Ödenburg	48	1·5	32·0	0·3
Mittel aus 7 Angaben..	97	4·1	23·7	0·5

Von allen diesen Angaben ist Wien *n)* die einzige, welche auf blosser Schätzung der Bahnlänge beruht, während sonst die betreffenden Bogen durch Messung fixirt wurden. Aus diesem Grunde ist sie eigentlich minder vertrauenswürdig als das Gewicht, bei dessen Feststellung dieser Umstand nicht berücksichtigt werden konnte, es anzeigt.

Als Gesammtmittel mit Berücksichtigung der Gewichte erhält man hieraus für die geocentrische Geschwindigkeit 22·7 *km* oder rund 3 geographische Meilen, mit einem rechnungsmässigen mittleren Fehler von nur ±3 *km*. Im Letzteren ist selbstverständlich die Unsicherheit, welche durch Überschätzung der Dauer entsteht, nicht enthalten. Im umgekehrten Sinne würde der Einfluss unbewusster Bahnverlängerung durch die Beobachter sich äussern. Dieser wird jedoch durch die Gewichtsbemessung sicher sehr vermindert, denn es haben z. B. die beiden Beobachtungen, welche besonders grosse Geschwindigkeiten liefern, Gewichte erhalten, die fast ihren Ausschluss bedingen. Der rohe Durchschnitt ohne Rücksicht auf die Gewichte würde etwas über 30 *km* für die Geschwindigkeit geben.

Kosmische Verhältnisse.

Aus der Vergleichung des leicht abzuleitenden wahren Radianten mit der Sonnenlänge erkennt man, dass vor dem Zusammenstosse Meteor und Erde sehr nahe die gleiche Bewegungsrichtung hatten und das Resultat der Beobachtungen konnte daher nur den Überschuss an Geschwindigkeit darstellen, mit welchem die Erde von dem Meteor eingeholt worden ist. Es tritt also hier der Fall ein, dass für jede Hypothese über die heliocentrische Geschwindigkeit, die kleinst möglichste geocentrische erhalten wird. Aus diesem Grunde kann der störende Einfluss der Erdschwere auf die Bahn des Meteors nicht völlig vernachlässigt werden.

Berechnet man mit der entwickelten Geschwindigkeit von 22·7 *km* und der Neigung der Bahn von 28·5° die Erdstörungen, so findet man, dass die Erdschwere einen Zuwachs an Geschwindigkeit um 2·9 *km* bewirkt und die Neigung um 4·6° erhöht hat.

Was die entstandene geringe Beschleunigung betrifft, so halte ich es wohl für illusorisch, wenn man in dieser Reduction

eine Verbesserung des abgeleiteten Werthes finden wollte, weil ja doch nicht daran zu zweifeln ist, dass die beobachtete Grösse schon wegen des Widerstandes der Atmosphäre geringer ausfallen muss, als sie in Wirklichkeit ist. Dagegen ist, wie man sieht, die abgeleitete Änderung der Neigung und daher auch des Radiationspunktes ziemlich namhaft, und weil sie nicht allzu sehr von einer kleinen Änderung des Werthes der Geschwindigkeit abhängt, habe ich sie bei Ableitung der kosmischen Bahn in Rechnung gezogen.

Hiernach muss der scheinbare Radiant die verbesserte Lage $\alpha = 312\cdot5°$ $\delta = -15\cdot7°$ oder 310·6° Länge und 2·0° nördlicher Breite erhalten.

Die Länge der Sonne war 210·5°, daher die Länge des aufsteigenden Knotens ebenso gross. Für 29·8 *km* Geschwindigkeit der Erde ergibt sich dann die heliocentrische Geschwindigkeit des Meteors zu 52·3 *km* oder beiläufig 7 geographische Meilen (d. i. $v = 1\cdot755$, wenn die Erdgeschwindigkeit als Einheit angenommen wird). Man sieht hieraus nicht allein, dass die Bahn dieses Meteors im Sonnensysteme sich auch wieder als Hyperbel ergibt, sondern es ist auch leicht, die Unmöglichkeit der Parabel zu erkennen, wenn man nicht diese Art zu beobachten und Schlüsse zu ziehen als ganz werthlos erklären will. Für eine Parabel müsste die geocentrische Geschwindigkeit nur 12 *km* gewesen sein. Das vorhin angeführte Schema zeigt aber, dass unter den 14 bestimmten Angaben nur zwei, nämlich *n)* und *o)* im Mittel dieser Annahme ungefähr günstig wären, während sechsmal so viele ihr mehr oder weniger, aber doch sehr entschieden widerstreiten. Welche ungereimte Voraussetzungen müsste man bei den meisten dieser Beobachtungen hinsichtlich der Dauer oder Bahnlänge gelten lassen, um das Resultat auf eine Geschwindigkeit von 12 *km* herabzudrücken!

Der Punkt, in welchem der eine Hyperbelast auf sehr grosse Entfernung verlängert das scheinbare Himmelsgewölbe trifft, also der siderische oder kosmische Ausgangspunkt des Meteors ergibt sich, wenn man die obige Geschwindigkeit zu Grunde legt, in Länge und Breite $l = 278\cdot0°$ $b = +0\cdot8°$. Diese Position ist jedoch sehr von der Annahme für die Geschwindigkeit abhängig, und wenn man die vorliegende Erscheinung mit anderen

Fällen vergleichen will, muss dies jedenfalls für verschiedene Geschwindigkeitshypothesen geschehen. Übrigens findet man, dass die reelle Halbaxe der Hyperbel etwas kleiner als Eins, die Neigung der Bahn gegen die Ekliptik nur 0·9°, die Bewegung direct war und das Perihel nicht weit vom absteigenden Knoten sich befand. Bestimmtere Angaben sind wohl überflüssig, weil sie eben auch sehr von der Geschwindigkeit abhängen.

Am 13. October 1879 ist um $5^h 51^m$ mittlerer Römer Zeit an vielen Orten Italiens eine grosse Feuerkugel beobachtet worden, über welche im „Bulletino meteorologico dell' osservatorio reale" in Moncalieri, Jahrg. 1879, mehrere Berichte enthalten sind. Aus diesen Wahrnehmungen habe ich versucht (Verhandlungen des naturforschenden Vereines in Brünn, 26. Bd., S. 58) den scheinbaren Radianten abzuleiten und für denselben $\alpha = 304·5°$ $\delta = -11°$ gefunden. Die Sicherheit der Bestimmung ist wohl viel geringer als in dem vorliegenden Falle am 23. October 1889, wofür vorhin $\alpha = 311·4°$ $\delta = -11·3°$ berechnet wurde. Die beiden Positionen liegen einander immerhin nahe genug, um, zumal bei dem geringen Abstande der beiden Bahnknoten von nur 10° eine Zusammengehörigkeit vermuthen zu lassen.

Viel ausgeprägter, wenn auch weniger in die Augen springend ist jedoch ein solcher Zusammenhang mit einem anderen Falle, bei welchem der Abstand des Knotens erheblich grösser ist. In jener Abhandlung habe ich nämlich (a. a. O. S. 65) auch über ein am 4. December 1885 in unseren Gegenden — besonders genau in Brünn — beobachtetes Meteor berichtet, dessen scheinbarer Radiant in $\alpha = 301·4°$ $\delta = -12·8°$ sich befand. Die Veränderung des Radianten aus der Position vom 23. October in die vom 4. December entspricht vollkommen derjenigen, welche Meteore eines und desselben Stromes (d. i. gleicher Eintrittsrichtung in das Sonnensystem und gleicher Halbaxe, beziehungsweise Geschwindigkeit) zeigen müssten. Zufällig wurde für dieses Meteor die heliocentrische Geschwindigkeit fast genau so gross gefunden wie in dem gegenwärtigen Falle, nämlich 52·8 *km*. Nachdem dann die Erdstörung angebracht und der kosmische Ausgangspunkt mit eben dieser Geschwindigkeit abgeleitet worden war, ergab sich, wie man dort (S. 67) findet, derselbe in $l = 280·0°$ $b = +1·1°$, womit der des Meteors vom

23. October 1889 ($l = 278 \cdot 0°$ $b = +0 \cdot 8°$) in solcher Übereinstimmung ist, dass man die Geringfügigkeit des Unterschiedes von nur 2° sogar als zufällig ansehen muss, weil grössere Differenzen wegen der Unsicherheit der Radiationspunkte immer zu erwarten sind.

Dass auch die Geschwindigkeiten in beiden Fällen gleich gross gefunden wurden, ist offenbar ein nicht besonders erhebliches Beobachtungsergebniss, welches nur einen sehr bedingten Schluss auf die reelle Geschwindigkeit gestattet. Letztere lässt sich bei der Lage der Radiationspunkte für die Erscheinungen, welche hier berührt worden sind, auch nicht aus dem Gesichtspunkte bestmöglichster Übereinstimmung der Ausgangspunkte hypothetisch ermitteln, denn diese Übereinstimmung ist für alle plausibeln Annahmen von der Geschwindigkeitshypothese nur sehr wenig abhängig. Sie bleibt nahe dieselbe von der parabolischen Geschwindigkeit bis zu Hyperbeln mit sehr kleinen Halbaxen, wie die folgende Zusammenstellung zeigt, in welche auch das Meteor vom 13. October 1879 einbezogen wurde. Die Einheit für die dort als Argument verwendete Grösse v ist die Geschwindigkeit der Erde in der Entfernung 1 von der Sonne und die entsprechende Hyperbelhalbaxe ist dann bekanntlich $\frac{1}{v^2-2}$.

Heliocentrischer Ort des Ausgangspunktes im Weltraume.

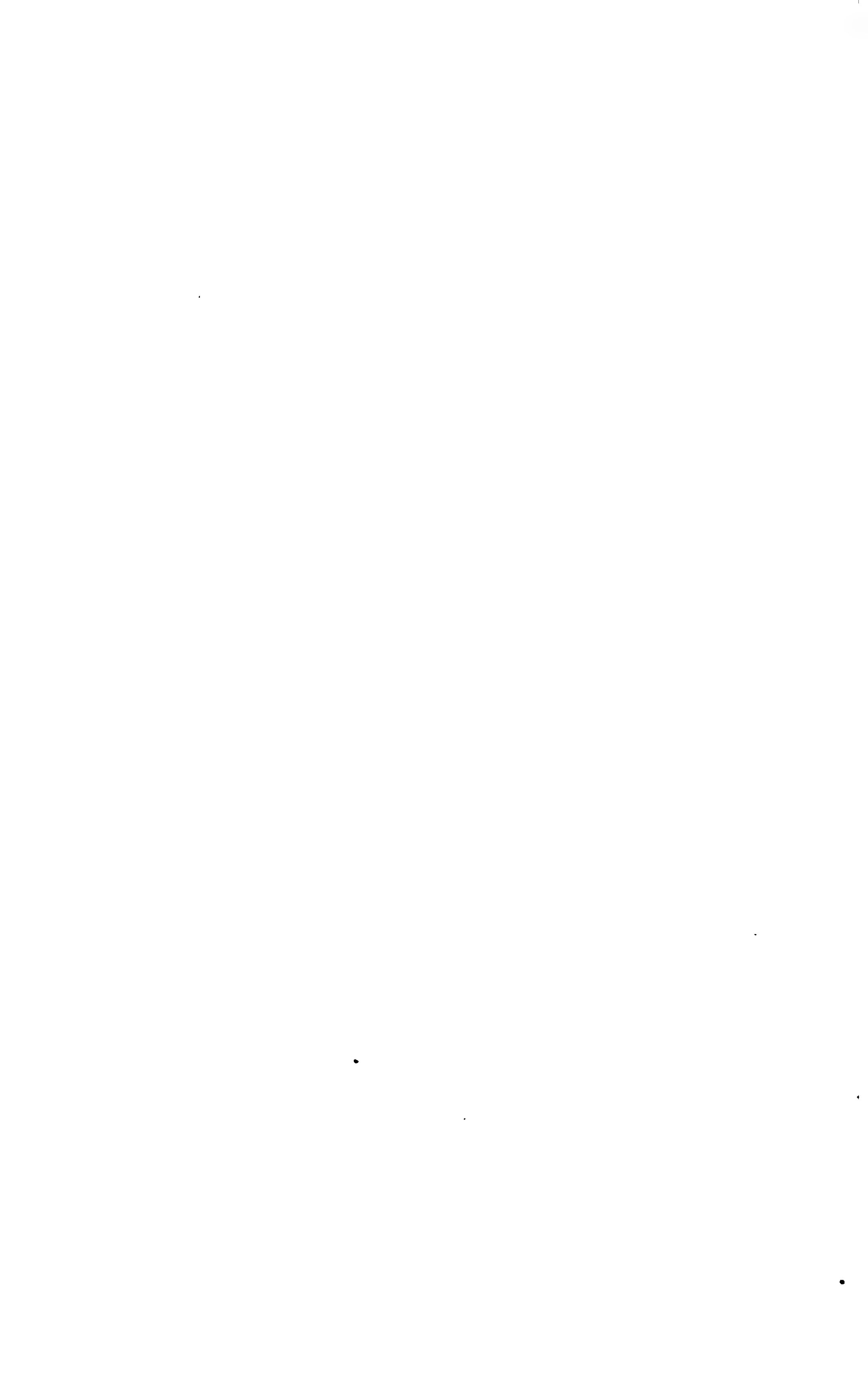
Meteor am	Für $v = \sqrt{2}$ l	b	$v = 2$ l	b	$v = 2 \cdot 5$ l	b
13. October 1879	208·5°	—0·0°	280·0°	+3·3°	288·8°	+4·6°
23. October 1889	215·9	—0·1	287·3	+2·3	296·8	+3·3
4. December 1888	217·5	+0·2	289·1	+1·9	298·8	+4·0

Die Unterschiede, welche für die beste Hypothese am kleinsten ausfallen müssten, wenn ein Schluss gestattet sein sollte, sind fast überall die gleichen. Wenn die parabolische Geschwindigkeit $v = \sqrt{2}$ nicht durch die directen Beobachtungen ausgeschlossen wäre, so würde sie nach der Übereinstimmung der Ausgangspunkte (für die Parabel; Aphele) hier nicht minder wahrscheinlich sein als jede andere. Zur sichersten

Entscheidung der Frage, um wie viel die beobachtete Geschwindigkeit, welche über dem hyperbolischen Charakter der Bahnen keinen Zweifel zulässt, von der reellen noch übertroffen wird, müsste für den vorliegenden Fall die Fortbewegung des scheinbaren Radianten analoger Meteore gegen Ende December und Anfang Jänner durch möglichst zahlreiche Beobachtungen aufgedeckt werden. Wie ich bei einer anderen Gelegenheit gezeigt habe,[1] erhebt sich der Radiationspunkt, wenn er auch sonst unweit der Ekliptik liegt, sehr rasch in hohe Breiten in der Nähe der Epoche $\odot = l$ und sinkt dann alsbald wieder herab. Es ist jedoch einleuchtend, dass es mehrerer guter Bahnbestimmungen aus dieser Epoche bedürfte, um den Zusammenhang ausser Zweifel zu stellen.

---

[1] Diese Berichte, 97. Bd., Abth. II, Juni, S. 696.



SITZUNGSBERICHTE

DER

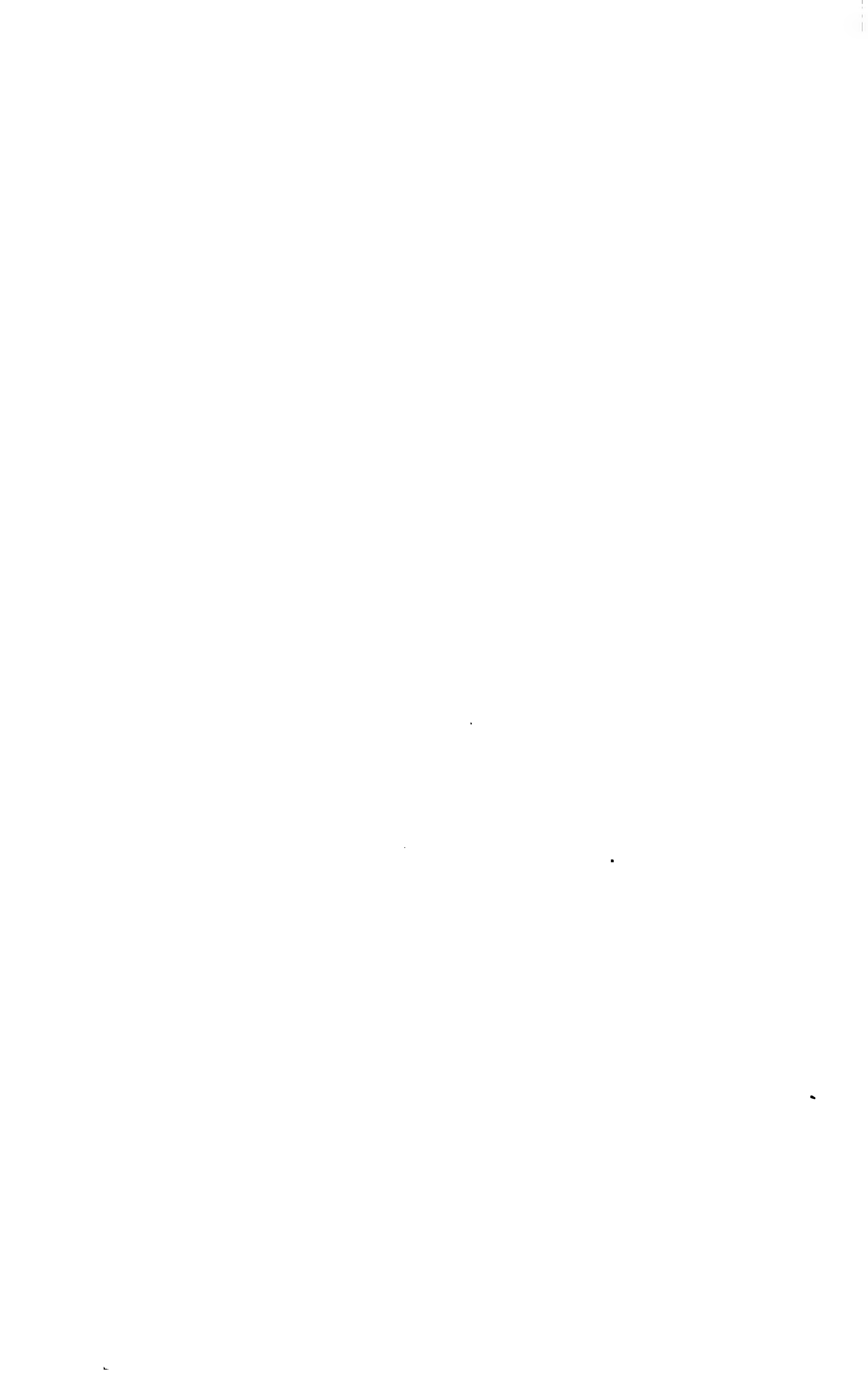
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. III. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



VI. SITZUNG VOM 6. MÄRZ 1890.

Die Nachricht über das am 24. Februar d. J. in Prag erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Hofrathes Prof. Dr. Victor Leopold Ritter v. Zepharovich wurde in der Gesammtsitzung der kaiserlichen Akademie vom 27. Februar zur Kenntniss genommen und der Theilnahme an diesem Verluste Ausdruck gegeben.

Der Secretär legt das erschienene Heft VIII—IX (October—November 1889) des 98. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr übersendet eine Abhandlung von Ottokar Ječek in Prag: „Über die Reihenumkehrung".

Das c. M. Prof. Rich. Maly in Prag übersendet eine Abhandlung von Dr. John J. Abel aus dem medicinisch-chemischen Laboratorium in Bern, betitelt: „Bestimmung des Moleculargewichtes der Cholalsäure, des Cholesterins und des Hydrobilirubins nach der Raoult'schen Methode."

Das c. M. Herr Hofrath Dr. A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz, betitelt: „Zur Kenntniss des Ammelins", von A. Smolka und A. Friedreich.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Einige Sätze über die Function $C_n^\nu(x)$."

Herr Prof. Dr. J. Puluj in Prag übersendet eine Abhandlung: „Über die Temperaturmessungen im Bohrloche zu Sauerbrunn".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über die Unzulässigkeit der Poisson'schen Theorie des Schiffsmagnetismus und über die Hypothese, welche derselben zu Grunde liegt", von Prof. V. v. Giaxa an der k. k. nautischen Schule in Lussinpiccolo.
2. „Zur Theorie der elektrischen Gasentladungen", von Dr. Friedrich Wächter in Wien.

3. „Über allgemeine Strahlencongruenzen und Normalensysteme", von Emil Waelsch, Assistent an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.
4. Über eine algebraische Theorie der Schaaren nicht-adjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören", von Wilhelm Weiss, Assistent an derselben Hochschule.
5. „Beweis einer der harmonischen Punktreihe im Kreise zukommenden Eigenschaft", von Jacob Zimels in Brody.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine Abhandlung von Dr. M. Margules in Wien: „Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft".

Herr Anton Handlirsch in Wien überreicht den fünften Theil seiner „Monographie der mit *Nysson* und *Bembex* verwandten Grabwespen".

Herr Dr. Max Mandl in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über eine das Jacobi'sche Symbol darstellende Determinante".

Herr stud. med. Alois Lode, Demonstrator am physiologischen Institute der k. k. Universität in Wien, übersendet eine von ihm an diesem Institute ausgeführte Arbeit, betitelt: „Beiträge zur Anatomie und Physiologie des Farbenwechsels der Fische".

Herr Dr. Rudolf Benedikt in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über Schmidt's Verfahren zur Umwandlung von Oxalsäure in feste Fettsäuren".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Ludwig C. Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. Jahrgang 1888 und 1889. Leipzig, 1889; 8°.

Museo Nacional de Buenos Aires: G. Burmeister, Los Caballos fosiles de la Pampa Argentina. (Suplemento.) — Die fossilen Pferde der Pampasformation. (Nachtrag.) — Text spanisch und deutsch. (Mit Taf. IX—XII.) Buenos Aires, 1889; Fol.

Zur Theorie der reellen linearen Transformationen und der Lobatschewsky'schen Geometrie

von

Dr. A. Schwarz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 23. Jänner 1890.)

I.

Die reellen linearen Transformationen

$$t = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

zerfallen, je nach dem Vorzeichen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$, in zwei Classen. Da unbeschadet der Allgemeinheit

$$|\alpha\delta - \beta\gamma| = 1$$

vorausgesetzt werden kann, so lassen sich diese zwei Classen durch die folgende Doppelgleichung charakterisiren:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Die Transformationen der ersten (dem Plus-Zeichen entsprechenden) Classe bilden eine Gruppe, insoferne man durch Iteration und Combination ihrer Operationen wiederum zu Transformationen derselben gelangt. Von der zweiten Classe gilt dies nicht, da ein Product aus n ihr angehörigen Transformationen dem ersten oder zweiten Systeme angehört, je nachdem

$$\left.\begin{array}{r} n \equiv 0 \\ \text{oder}\quad n \equiv 1 \end{array}\right\} \bmod 2$$

ist.

Die aus den Transformationen mit positiver Determinante gebildete Gruppe, die mit G bezeichnet werden möge, besitzt eine Invariante. Dieselbe lautet:

$$\operatorname{sgn} y.$$

Dabei ist y der imaginäre Bestandtheil der complexen Grösse z. Das Symbol „sgn" ist durch das folgende Gleichungssystem definirt

$$\operatorname{sgn} y = \begin{cases} +1 \\ \;\;0 \\ -1, \end{cases}$$

je nachdem

$$y \begin{cases} > \\ = 0 \\ < \end{cases}$$

ist. Man kann das letzte Gleichungssystem in eine einzige Gleichung zusammenfassen, nämlich:

$$\operatorname{sgn} y = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin yu}{u} \, du.$$

Die Feststellung von sgn y als Invariante ist ein einheitlicher Ausdruck dafür, dass durch irgend eine Transformation der Gruppe G die Achse der reellen Zahlen in der z-Ebene, sowie eine jede der Halbebenen zu beiden Seiten der genannten Achse in sich übergeführt werden.

Die Gruppe G lässt sich durch Adjunction bestimmter Operationen erweitern, ohne dass dadurch der Invariantencharakter von sgn y zerstört würde.

Die Spiegelung in Bezug auf die X-Achse, welche analytisch durch

$$v = \bar{z}$$

dargestellt ist ($\bar{z}$ bedeutet die zu z conjugirte Zahl, so dass $z . \bar{z} =$ $=$ Norm z ist) theilt nämlich mit den Transformationen der zweiten Classe die Eigenschaft, sgn y in den entgegengesetzten Werth zu verwandeln. Daraus ergibt sich, dass jede Operation, die durch irgend eine Combination von Transformationen der

ersten und zweiten Classe und der bezeichneten Spiegelung gebildet ist, den Werth von sgn y erhält oder nicht, je nachdem die Anzahl der Transformationen zweiter Classe und der Spiegelungen, die angewandt wurden, eine gerade oder eine ungerade ist.

Die Gesammtheit Γ der Operationen, für welche die letztgenannte Zahl eine gerade ist, bildet die erweiterte Gruppe, welcher sgn y als Invariante zukommt. Die Gruppe G ist in der Gruppe Γ enthalten, ist also eine Untergruppe von Γ.

In der Gruppe Γ ist die Operation der Inversion oder die Transformation durch reciproke Radienvectoren enthalten. Das Inversionscentrum ist dabei aber einer Bedingung unterworfen, es muss nämlich auf der reellen Zahlenachse liegen. Ist a die Abscisse des Inversionscentrums, R der Radius des Inversionskreises, so lautet die entsprechende Inversion:

$$t = a + \frac{R^2}{\bar{v} - a}.$$

Dieselbe lässt sich als Product aus der reellen Transformation

$$t = a + \frac{R^2}{z - a}$$

(von der Determinante -1) und der Spiegelung

$$z = \bar{v}$$

auffassen.

Die Gruppe Γ besitzt neben der Invariante sgn y noch die zweite Invariante

$$\frac{|dz|}{y},$$

denn dieser Ausdruck ist eine Invariante der Gruppe G und er ändert bei Anwendung einer Transformation von der Determinante -1 oder der Spiegelung in Bezug auf die X-Achse nur das Zeichen. Die Invarianz von $\frac{|dz|}{y}$ besagt, dass das Integral

$$L = \int \frac{|dz|}{y} = \int \frac{ds}{y}$$

erstreckt über den Umfang einer Curve, und das Doppelintegral

$$S = \int \frac{dx \, . \, dy}{y^2}$$

erstreckt über den von einer Curve umschlossenen Flächenraum, Invarianten von Γ sind.

Bezeichnet man mit Λ die Länge einer Curve, mit Σ den Flächeninhalt des von der Curve umschlossenen Gebietes, so stellen die Quotienten

$$\lambda = \frac{L}{\Lambda} = \frac{\int \frac{ds}{y}}{\int ds}, \qquad \sigma = \frac{S}{\Sigma} = \frac{\int \frac{dx \, . \, dy}{y^2}}{\int dx \, . \, dy}$$

Mittelwerthe dar, und zwar λ den Mittelwerth der reciproken aus einem beliebigen Punkte der Curve gezogenen Ordinate, σ den Mittelwerth der reciproken Quadrate der Ordinaten aller Punkte des betrachteten zweifach ausgedehnten Gebietes. Da L, S Invarianten der Gruppe Γ sind, so sind es auch die Producte $\lambda . \Lambda$ und $\sigma . \Sigma$, d. h. bei Anwendung einer Operation der Gruppe Γ ändert sich im Allgemeinen sowohl die Länge, als auch die Fläche; die Producte aus der Länge, beziehungsweise Fläche in die genannten Mittelwerthe aber bleiben ungeändert.

Herr Poincaré bezeichnet in der Abhandlung:[1] „Théorie des groupes fuchsiens“ die Integrale L, S als Länge der Curve, beziehungsweise als Fläche des umschlossenen Gebietes und bemerkt auch, dass mit diesen Definitionen die Sätze der Lobatschewsky'schen Geometrie zur Geltung kommen.

Damit die Ausdrücke L, S einen bestimmten Sinn haben, ist es nothwendig vorauszusetzen, dass die Curve oder die Fläche, über welche die Integrale L, respective S zu erstrecken sind, auf einer und derselben Seite der X-Achse liegen. Der vorliegende Fall verhält sich nämlich analog dem der hyperbolischen Geometrie auf einer geraden Punktreihe, welche durch die beiden absoluten Elemente in zwei Gebiete getheilt wird. Von einem Punkte a der geraden Punktreihe aus kann man die Distanzen nur in demjenigen von den beiden genannten Gebieten messen,

---

[1] Acta Mathematica, Bd. 1, p. 8.

in dem der Punkt a selbst liegt, weil die Distanz eines jeden Elementes von den absoluten Elementen unendlich gross ist. Aus der Definition von L wird sich ergeben, dass den beiden absoluten Elementen der geraden Punktreihe die Punkte der X-Achse und die unendlich fernen Punkte analog sind, indem die Distanz eines jeden Punktes der Ebene von irgend einem Punkte der X-Achse oder einem unendlich fernen Punkte unendlich gross ist. Desshalb müssen die beiden Halbebenen zu beiden Seiten der X-Achse gesondert betrachtet werden. Es hängt dieser Umstand auch damit zusammen, dass Integrale, deren Integrand zwischen den Integrationsgrenzen unendlich wird, im Allgemeinen unbestimmt sind. Um diesen Zusammenhang an einem Beispiele zu erläutern, betrachte man eine der Y-Achse parallele Strecke, die zu beiden Seiten der X-Achse verläuft. Die Ordinaten der Endpunkte seien a, $-b$. Die Länge L dieser Strecke ist:

$$L = \int_{-b}^{a} \frac{dy}{y} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{-b}^{-\varepsilon} \frac{dy}{y} + \lim_{\eta=0} \int_{+\eta}^{a} \frac{dy}{y} =$$

$$= \lg \frac{a}{b} + \lim \lg \frac{\varepsilon}{\eta} \cdot$$

Die Grenze des Verhältnisses $\frac{\varepsilon}{\eta}$ ist unbestimmt, daher ist die Länge L selbst unbestimmt, d. h. abhängig von der Art und Weise, wie man die Grössen ε und η gegen Null convergiren lässt.

Um ein bestimmtes Resultat zu erlangen, müsste man einen bestimmten Werth für das Verhältniss $\frac{\varepsilon}{\eta}$ festsetzen, z. B.

$$\varepsilon = \eta .$$

Dieser Festsetzung entspricht der Cauchy'sche Hauptwerth der Länge L. Für einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt, und allgemein für jede Curve, welche die X-Achse zur Symmetrieachse hat, ist der Hauptwerth des L gleich Null.

Das Doppelintegral, durch welches die Fläche S definirt wurde, lässt sich in ein Curvenintegral verwandeln, indem man nur die Integration nach der Variablen y zuerst auszuführen hat. Ist die Randcurve des Flächenstückes, über welches die Integra-

tion zu erstrecken ist, so beschaffen, dass sie von jeder der Y-Achse parallelen Geraden höchstens in zwei Punkten getroffen wird, so gilt die Gleichung

$$\int \frac{dx \,.\, dy}{y^2} = \int \frac{dx}{y},$$

wobei die Integration auf der rechten Seite in positivem Sinne über die Berandung des Flächenstückes zu erstrecken ist, d. h. so, dass beim Durchlaufen der Begrenzung die eingeschlossene Fläche zur Linken liegt. Die letzte Gleichung gilt aber nicht nur in dem speciellen Falle, sondern allgemein, wie auch das Flächenstück, über welches das Doppelintegral zu erstrecken ist, beschaffen sei, da man das Integrationsgebiet durch Einführung passender Querschnitte in eine Reihe von Theilgebieten zerlegen kann, deren jedes die geforderte Bedingung, dass seine Berandung von einem zur Y-Achse parallelen Strahle höchstens in zwei Punkten getroffen wird, erfüllt. Für jedes dieser Theilgebiete gilt die Gleichung. Bildet man die Summe aller so sich ergebenden Gleichungen, so erhält man auf der linken Seite der resultirenden Gleichung das Integral $\int \frac{dx \,.\, dy}{y^2}$ bezogen auf das Gesammtgebiet, während die rechte Seite sich auf das im positiven Sinne über den Rand dieses Gebietes erstreckte Integral $\int \frac{dx}{y}$ reducirt, weil über jeden der hinzugefügten Querschnitte zweimal, und zwar in entgegengesetzten Richtungen integrirt wird.

Die Länge L und die Fläche S ändern sich im Allgemeinen bei einer Verschiebung der Curve in der z-Ebene; nur wenn man eine Verschiebung parallel zur X-Achse vornimmt, d. h. eine Verschiebung, bei welcher alle Punkte der Curve zur X-Achse parallele und gleich lange Stücke durchlaufen, bleiben die Werthe dieser Grössen erhalten. In diesem Falle wird nämlich y durch die Verschiebung nicht geändert. Man erkennt dies übrigens auch daraus, dass eine solche Verschiebung der linearen Transformation

$$t = z + a$$

äquivalent ist, wo a jene Strecke bedeutet, um welche die Curvenpunkte parallel zur X-Achse verschoben wurden.

Wenn L und S bei einer Verschiebung ungeändert bleiben sollen, so muss im Allgemeinen die Curve deformirt werden. So bleibt z. B. die Länge L einer geradlinigen Strecke M_1M_2 ungeändert, wenn man diese Strecke parallel zu sich selbst verschiebt, aber so, dass ihre Endpunkte immer auf den Radienvectoren OM_1, OM_2 liegen, da eine solche Verschiebung der Anwendung einer linearen Transformation

$$t = \alpha z$$

äquivalent ist, worin α eine positive Constante bedeutet. Durch Anwendung derselben Transformation geht ein Dreieck in ein mit ihm perspectivisches Dreieck über, das Perspectivitätscentrum fällt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammen, während die Perspectivitätsachse die unendlich ferne Gerade ist. Es haben daher zwei Dreiecke in solcher Lage dieselbe Fläche S.

Ähnlich wie bei der geradlinigen Strecke kann man den Bogen M_1M_2 eines auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreises parallel zu sich selbst verschieben, ohne die Länge L zu ändern, wenn nur die Endpunkte des Bogens immer auf den beiden durch M_1, M_2 gehenden Radien des Kreises liegen.

II.

Eine Strecke von der wahren Länge Λ, die in einem Abstande y parallel zur X-Achse ist, hat die Länge:

$$L = \frac{\Lambda}{y} \cdot$$

Für eine Strecke, die unter einem Winkel φ gegen die X-Achse geneigt ist und deren Endpunkte die Ordinaten y_1, y_2 besitzen, ist

$$L = \frac{1}{\sin\varphi} \lg \frac{y_1}{y_2} \cdot$$

Dabei ist

$$0 < y_2 < y_1$$

vorausgesetzt.

Steht die Strecke insbesondere senkrecht auf der X-Achse, so ist

$$L = \lg \frac{y_1}{y_2} \cdot$$

Die Länge L der Strecke kann durch Verschiebung in ihrer eigenen Richtung (wobei sie beständig auf Seite der positiven y bleibt) jeden beliebigen Werth annehmen. Einem vorgeschriebenen L entsprechen folgende Werthe von y_1, y_2:

$$y_1 = \frac{A \, . \, e^L}{e^L - 1}, \quad y_2 = \frac{A}{e^L - 1}.$$

Für $y_2 = 0$ ist $L = \infty$, für $y_2 = \infty$ ist $L = 0$.

Die Forderung, die Strecke $M_1 M_2$ in n Theilstrecken von gleicher Länge $\frac{L}{n}$ zu theilen, führt auf das Gleichungssystem

$$\frac{y_1}{y'} = \frac{y'}{y''} = \ldots = \frac{y^{(n-1)}}{y_2}.$$

$y', \ldots y^{(n-1)}$ sind die Ordinaten der Theilungspunkte.

Das Gleichungssystem lehrt, dass die Ordinaten der Theilungspunkte eine geometrische Reihe bilden, während sie bei der gewöhnlichen Theilung eine arithmetische Reihe darstellen. Speciell für die Zweitheilung ergibt sich, dass die Ordinate des Halbirungspunktes die mittlere geometrische Proportionale zwischen den Ordinaten der Endpunkte der Strecke ist.

Es ist bemerkenswerth, dass die Theilung, bei welcher die Ordinaten eine geometrische Progression bilden, sich in der Physik vorfindet, nämlich in der Thermometrie. Bei der Benützung der Thermometer bestimmt man die Temperatur durch ein Volumen, und zwar lautet die Definitionsgleichung für die Temperatur:

$$v_t = v_0 (1 + \alpha t).$$

Vermöge dieser Definition entsprechen gleichen Volumänderungen gleiche Temperaturänderungen. Bekanntlich ist diese Festsetzung in gewisser Hinsicht willkürlich, indem man mit demselben Rechte eine andere Definition für die Temperatur benützen kann, gegen welche nur praktische Bedenken, nämlich die Schwierigkeit der Anfertigung der Scala, erhoben werden können.

Die andere mögliche Definition der Temperatur lautet

$$v_t = v_0 (1 + \alpha)^t$$

oder

$$t = \frac{1}{\log(1+\alpha)} \log \frac{v_t}{v_0}.$$

Dabei wird die Temperaturerhöhung um einen Grad durch die Änderung des Volumens um seinen $\frac{1}{\alpha}$ten Theil definirt.

Aus der Gleichung, die t als Function von v darstellt, ergibt sich für die Volumina, die den Temperaturen $0, 1, \ldots t$ entsprechen, die gewünschte Beziehung:

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \ldots = \frac{v_{t-1}}{v_t}.$$

Ebenso einfach wie der Ausdruck für die Länge L eines geradlinigen Gebildes gestaltet sich der Ausdruck für die Fläche S eines solchen. Die Coordinaten der Ecken eines geradlinigen Polygons seien

$$x_i, y_i \qquad (i = 1, \ldots n),$$

wobei die Bezeichnung so gewählt ist, dass, wenn man von der Ecke $(x_1 y_1)$ ausgehend den Umfang des Polygons in positivem Sinne durchlauft, die zu den Ecken gehörigen Indices wachsen. Für die Polygonfläche ergibt sich

$$S = \int \frac{dy}{y} . \cot \varphi,$$

wobei φ derjenige Winkel ist, den ein in der Richtung des Durchlaufens genommenes Element des Umfanges mit der positiven Richtung der X-Achse bildet. Er ist, so lange man sich auf derselben Polygonseite befindet, constant. Das Integral S zerfällt daher in n Integrale. Das schliessliche Resultat lautet:

$$S = \sum_{k=i}^{n+i-1} \frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} \lg \frac{y_{k+1}}{y_k}.$$

Darin ist jeder Index, der grösser als n ist, durch den kleinsten positiven Rest mod n zu ersetzen.

Die Fläche S eines Dreieckes lautet daher:

$$S = \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} \lg \frac{y_2}{y_1} + \frac{x_2 - x_3}{y_2 - y_3} \lg \frac{y_3}{y_2} + \frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1} \lg \frac{y_1}{y_3}.$$

Um die Bogenlänge L eines Kegelschnittes zu bestimmen, muss man von der allgemeinen Gleichung desselben

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

ausgehen, da L wesentlich von der Lage des Coordinatensystems abhängt. Es empfiehlt sich, das Bogenelement in der folgenden Form darzustellen:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy.$$

Für die Punkte des Kegelschnittes ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{(a_{12}^2 - a_{11}a_{12})y^2 + 2(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})y + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})} = \sqrt{Y}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = a_{22}y + a_{23} + \frac{a_{12}}{a_{11}}(\sqrt{Y} - a_{12}y - a_{13}) =$$

$$= \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\, y + (a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}) + a_{12}\sqrt{Y}}{a_{11}} =$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\frac{dY}{dy} + a_{12}\sqrt{Y}}{a_{11}}.$$

Daher:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}} = -\frac{a_{12}\sqrt{Y} - \frac{1}{2}\frac{dY}{dy}}{a_{11}\sqrt{Y}} = \frac{-a_{12} + \frac{d\sqrt{Y}}{dy}}{a_{11}}$$

$$ds = \sqrt{1 + \frac{1}{a_{11}^2}\left(\frac{d\sqrt{Y}}{dy} - a_{12}\right)^2}\, dy =$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{a_{11}^2}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\right) - a_{12}\right]^2}\, dy$$

$$L = \int\sqrt{1 + \frac{1}{a_{11}^2}\left(\frac{d\sqrt{Y}}{dy} - a_{12}\right)^2}\,\frac{dy}{y} =$$

$$= \int\sqrt{1 + \frac{1}{a_{11}^2}\left[\frac{(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})\, y + (a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})}{\sqrt{Y}} - a_{12}\right]^2}\,\frac{dy}{y}.$$

Die Coëfficienten in Y und im Zähler des Bruches unter dem Wurzelzeichen sind Unterdeterminanten der Discriminante des Kegelschnittes.

Einfache Resultate ergeben sich für den Kreis und die Ellipse, deren Achsen parallel den Coordinatenachsen sind.

Die Gleichungen des Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten α, β hat und dessen Radius r ist, lauten:

$$x = \alpha + r \cos \varphi$$
$$y = \beta + r \sin \varphi .$$

Damit sich für L ein bestimmter endlicher Werth ergebe, muss

$$\beta > r$$

sein. L ist offenbar von α unabhängig, so dass $\alpha = 0$ vorausgesetzt werden kann:

$$L = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{\beta}{r} + \sin \varphi} .$$

Durch Anwendung der Substitution

$$\sqrt{\frac{\beta - r}{\beta + r}} \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = u$$

folgt:

$$L = \frac{2r\pi}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} = \frac{2r\pi}{\sqrt{(\beta + r)(\beta - r)}} .$$

$\beta + r$ ist die grösste, $\beta - r$ die kleinste Ordinate der Kreisperipherie, daher

$$L = \frac{2r\pi}{\sqrt{y_{\max} \cdot y_{\min}}} .$$

Der Mittelwerth der reciproken Ordinate, die aus einem Punkte der Kreisperipherie gezogen werden kann, lautet:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} .$$

Er ist gegeben durch den reciproken Werth der mittleren geometrischen Proportionalen aus der grössten und kleinsten Kreisordinate und als solcher gleich dem reciproken Werthe der Ordinate desjenigen Punktes, in dem die Länge L des zur Y-Achse parallelen Kreisdurchmessers halbirt erscheint.

Die Ellipse, deren Achsen denen des Coordinatensystems parallel laufen, deren Mittelpunkt die Coordinaten (α, β) hat und deren Achsen a, b sind $(a > b)$, besitzt die Gleichungen:

$$x = \alpha + a \cos \varphi$$
$$y = \beta + b \sin \varphi.$$

Eine nothwendige Bedingung für die Bestimmbarkeit von L ist

$$\beta > b.$$

Wie beim Kreise ist auch hier L von α unabhängig:

$$L = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}}{\beta + b \sin \varphi} d\varphi.$$

Führt man die lineare Excentricität c der Ellipse ein und setzt

$$\sin \varphi = z,$$

so ist

$$L = 2 \int_{-1}^{+1} \frac{b^2 + c^2 . z^2}{\beta + bz} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(b^2 + c^2 z^2)}}.$$

$\frac{b^2 + c^2 z^2}{\beta + bz}$ lässt sich in eine gerade und eine ungerade Function zerlegen, nämlich:

$$\frac{b^2 + c^2 z^2}{\beta + bz} = \frac{\beta (b^2 + c^2 z^2)}{\beta^2 - b^2 z^2} - \frac{b (b^2 + c^2 z^2)}{\beta^2 - b^2 z^2} z.$$

Diese Zerlegung ist zweckmässig, weil das Integral

$$\int_{-1}^{+1} \frac{z . dz}{\sqrt{(1 - z^2)(b^2 + c^2 z^2)}}$$

als Integral einer ungeraden Function verschwindet.

Somit ist

$$L = 2\beta \int_{-1}^{+1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(b^2+c^2z^2)}} \frac{b^2+c^2z^2}{\beta^2-b^2z^2} =$$

$$= 4\beta \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(b^2+c^2z^2)}} \frac{b^2+c^2z^2}{\beta^2-b^2z^2}.$$

Durch die Substitution

$$z^2 = 1-t^2$$

ergibt sich die Legendre'sche Normalform

$$L = \frac{4\beta}{a} \int_0^1 \frac{a^2-c^2t^2}{\beta^2-b^2+b^2t^2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t_2)(1-\varkappa^2t^2)}}.$$

Darin ist $\varkappa$ die numerische Excentricität der Ellipse.

Durch Partialbruchzerlegung der unecht gebrochenen Function unter dem Integralzeichen ergibt sich die Darstellung des Umfanges L durch ein ganzes Integral erster und ein ganzes Integral dritter Gattung:

$$L = -\frac{4\beta c^2}{ab^2} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}} +$$

$$+ \frac{4\beta(b^4+\beta^2c^2)}{ab^2(\beta^2-b^2)} \int_0^1 \frac{1}{1+nt^2} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\varkappa^2t^2)}}.$$

n ist der Parameter des Integrals dritter Gattung. Derselbe hat den Werth

$$n = \frac{b^2}{\beta^2-b^2}.$$

Für $a = b$, was $c=0$ nach sich zieht, verwandelt sich der Werth, der für L gefunden wurde, wie es sein muss, in den für den Kreis erhaltenen Ausdruck. In der That liefert die gemachte Annahme:

$$L = \frac{4a\beta}{\beta^2 - a^2} \int_0^1 \frac{1}{1+nt^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+nt^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+n\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+n}} \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+n}} \frac{\pi}{2}$$

$$L = \frac{2a\beta\pi}{(\beta^2 - a^2)\sqrt{1+n}} = \frac{2a\pi}{\sqrt{\beta^2 - a^2}}.$$

Die Fläche S einer Ellipse in der früher angegebenen speciellen Lage besitzt den Werth:

$$S = -\frac{2a}{b} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi \,.\, d\varphi}{\frac{\beta}{b} + \sin\varphi} = -\frac{2a}{b}\pi +$$

$$+ \frac{2a\beta}{b^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\frac{\beta}{b} + \sin\varphi} = \frac{2a\pi}{b}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - b^2}} - 1\right).$$

Der Mittelwerth der reciproken Quadrate der Ordinaten, die zu den Punkten innerhalb der Ellipsenfläche gehören, lautet:

$$\sigma = \frac{2}{b^2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - b^2}} - 1\right).$$

Für den Kreis ergeben sich die Formeln:

$$S = 2\pi\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} - 1\right)$$

$$\sigma = \frac{2}{r^2}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - r^2}} - 1\right).$$

Die Werthe, die sich für den Umfang L und die Fläche S eines Kreises ergeben, sind nur von dem Quotienten $\frac{\beta}{r}$ abhängig. Daraus folgt, dass durch irgend eine Operation der Gruppe Γ

ein Kreis wieder in einen Kreis von der Art verwandelt wird, dass für das Original und das Bild $\frac{\beta}{r}$ denselben Werth besitzt.

Dies gilt in Folge der gemachten Voraussetzung $\beta > r$ zunächst nur für den Fall, dass der Originalkreis mit der X-Achse keinen reellen Punkt gemeinschaftlich hat. Wenn aber der abzubildende Kreis die X-Achse berührt oder schneidet, so ergibt sich die Richtigkeit der aufgestellten Behauptung daraus, dass die jeder Operation der Gruppe Γ entsprechende Verwandtschaft eine isogonale ist. Hat nämlich ein Kreis mit der X-Achse einen Punkt gemeinschaftlich und ist der durch diesen Punkt gehende Kreisradius unter dem Winkel φ gegen die X-Achse geneigt, so ist

$$\sin \varphi = \frac{\beta}{r} \cdot$$

Da nun φ bei Anwendung einer Operation der Gruppe Γ sich nicht ändert, so gilt dasselbe auch von $\frac{\beta}{r}$.

Die Gleichheit von $\frac{\beta}{r}$ ist also eine nothwendige Bedingung dafür, dass zwei Kreise durch eine Operation der Gruppe, also insbesondere auch durch eine lineare Transformation mit positiver Determinante in einander übergeführt werden. Dass diese Bedingung auch hinreichend ist, wird später gezeigt werden.

Wenn zwei Curven durch Operationen der Gruppe Γ in einander transformirbar sind, so sind auch die Krümmungskreise entsprechender Punkte dieser Curven durch dieselben Operationen in einander überführbar; nach dem zuletzt bewiesenen Satze wird somit das Verhältniss der Ordinate des Krümmungsmittelpunktes zum Krümmungsradius eines Curvenpunktes bei Anwendung einer Operation der Gruppe Γ nicht geändert.

Die gerade Linie hat die Eigenschaft, dass ihre Länge, von einem bestimmten Punkte an gerechnet, eine lineare Function der Abscisse ist. Es entsteht hier die analoge Aufgabe, diejenige Curve aufzusuchen, deren Länge L linear von der Abscisse abhängt. Die Differentialgleichung der gesuchten Curve lautet

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} = \text{const} = \frac{1}{c} \cdot$$

Zu derselben Differentialgleichung führt das folgende bekannte Problem der Variationsrechnung: Es soll jene Curve bestimmt werden, die durch zwei gegebene Punkte geht und bei ihrer Rotation um die X-Achse die kleinste Oberfläche erzeugt. Die Auflösung beider Aufgaben ist eine Kettenlinie mit der Gleichung:

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}}.$$

Darin hängen die Constanten A, B, c durch die Gleichung zusammen:

$$c^2 = 4AB,$$

so dass die hyperbolische Cosinuslinie

$$y = \frac{1}{2}(e^{+x} + e^{-x}) = \cos h(x)$$

eine specielle Lösung der gestellten Aufgabe darstellt.

Um die Länge L eines Bogens der gefundenen Kettenlinie in n gleiche Theile zu theilen, ist für die Projection dieses Bogens auf die X-Achse diese Theilung vorzunehmen. Errichtet man in den so gefundenen Theilungspunkten Senkrechte auf die X-Achse, so leisten diese die verlangte Theilung.

III.

Um die Linie zu finden, welche bei der früher aufgestellten Definition von L dieselbe Rolle spielt, wie in der Euclidischen Geometrie die Grade, hat man zu untersuchen, für welche unter allen Curven, die zwischen zwei gegebenen Punkten möglich sind, die Länge L ein Minimum ist. Die Curve, welche die Lösung darstellt, muss in jedem ihrer Theile der geforderten Bedingung genügen. Es ist desshalb möglich, die Aufgabe auf eine gewöhnliche Minimumsaufgabe zurückzuführen. Man betrachte drei aufeinanderfolgende unendlich benachbarte Punkte M_1, M, M_2 der gesuchten Curve, mit den Coordinaten (x_1, y_1), (x, y), (x_2, y_2). Die Länge L des unendlich kleinen Curvenstückes M_1M_2 ist:

$$L = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}}{y_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2 + (y_2-y)^2}}{y}.$$

Um die Werthe (x, y) zu finden, für welche L ein Minimum ist, ist das folgende Gleichungssystem aufzulösen:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{x-x_1}{y_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} - \frac{x_2-x}{y\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{y-y_1}{y_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}} - \frac{y_2-y}{y\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}} - \frac{\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2}}{y^2} = 0.$$

Die letzten Gleichungen nehmen mit Einführung des Winkels τ, den die X-Achse mit der Curventangente einschliesst, die folgende Gestalt an:

$$d\left(\frac{\cos\tau}{y}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{\sin\tau}{y}\right) + \frac{ds}{y^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\frac{\cos\tau}{y} = c$$

$$\frac{d\tau}{ds} + \frac{\cos\tau}{y} = 0,$$

$$\frac{d\tau}{ds} = \text{const},$$

d. h. die Krümmung der gesuchten Curve ist constant, die letztere also ein Kreis. Da $\frac{\cos\tau}{y}$ constant sein soll, so muss dieser Kreis auf der X-Achse senkrecht stehen; für einen solchen ist thatsächlich $\cos\tau = \frac{y}{r}$, wo r den Kreisradius bedeutet.

Aus bekannten Gründen kann die vorstehende Ableitung auf Strenge keinen Anspruch machen. Dazu ist es unbedingt nöthig, das Problem als eine Aufgabe der Variationsrechnung aufzufassen. Fasst man x, y als Functionen einer Hilfsvariablen t auf

und bezeichnet die dem gegebenen Anfangs- und Endpunkte entsprechenden Werthe von t mit t_0, t_1, so ist das Integral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}\, dt$$

zu einem Minimum zu machen.

Die gesuchte Curve genügt, falls sie überhaupt existirt, dem Differentialgleichungssysteme

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial F}{dy} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

wo

$$F(x, y, x', y') = \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}$$

ist. Von diesen Differentialgleichungen ist bekanntlich jede eine Folge der anderen, so dass man sich auf die Integration einer von beiden beschränken kann. Da F die Variable x explicite nicht enthält, so empfiehlt sich die erste Gleichung zur weiteren Behandlung. Dieselbe gibt

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = c.$$

Da $\frac{\partial F}{\partial x'}$ und $\frac{\partial F}{\partial y'}$ nach einem Weierstrassischen Satze längs eines frei variirbaren Theiles der Curve sich stetig ändern, so hat die Constante c längs der ganzen Curve einen und denselben Werth.

Dies würde nicht stattfinden, wenn die freie Variirbarkeit der Curve durch irgendwelche Bedingungen beschränkt würde. Ist zum Beispiel festgesetzt, dass die Curve ausser dem Anfangspunkte A und dem Endpunkte B noch eine gewisse Anzahl von Punkten $M_1, \ldots M_{\rho-1}$ in der angegebenen Reihenfolge aufnehmen soll, so nimmt die Constante c nicht längs der ganzen zwischen A und B verlaufenden Curve nur einen einzigen Werth an, sondern sie ändert sich an den Stellen $M_1, \ldots M_{\rho-1}$; aber innerhalb eines

jeden der Theilintervalle $AM_1, M_1M_2, \ldots M_{\rho-1}B$ bleibt die Constante c ungeändert; in diesem Falle besteht die Lösung aus ρ regulären Curvenstücken. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{x'}{y\sqrt{x'^2+y'^2}} = \frac{1}{y}\frac{dx}{ds}$$

ergibt sich für die gesuchte Curve die Eigenschaft:

$$\frac{dx}{ds} = cy$$

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 = 1-c^2y^2.$$

Durch Differentiation folgt:

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -c^2y = -c\frac{dx}{ds}.$$

Die Integration der letzten Gleichung gibt:

$$\frac{dy}{ds} = -c(x-\alpha).$$

Als Gleichung der gesuchten Curve ergibt sich

$$(x-a)^2+y^2 = r^2,$$

oder

$$x-a = r\cos t$$
$$y = r\sin t.$$

Wenn also überhaupt eine Lösung der Aufgabe existirt, so ist dieselbe ein Kreis, der durch die beiden gegebenen Punkte geht und seinen Mittelpunkt auf der X-Achse hat.

Um zu entscheiden, ob diese Curve das Integral I wirklich zu einem Minimum macht, ist die zweite Variation von I zu untersuchen. Sie hat den Werth:

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ F_1\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 + F_2 w^2 \right\} dt.$$

Darin sind F_1, F_2 durch das folgende Gleichungssystem definirt:

$$F_1 = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}}{y'^2} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}}{x'y'} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}}{x'^2}$$

$$F_2 y'^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - F_1 y''^2 - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x'} - F_1 y' y''\right).$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$F_1 = \frac{1}{y(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r^3 y}.$$

F_2 reducirt sich hier, da F von x unabhängig ist, auf den folgenden Ausdruck:

$$F_2 y'^2 = -F_1 y''^2 + \frac{d}{dt}(F_1 y' y'')$$

$$F_2 = 0.$$

Die zweite Variation nimmt also die einfache Gestalt an:

$$\delta^2 I = \int_{t_0}^{t_1} F_1 \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 dt.$$

Darin ist längs des ganzen zu betrachtenden Kreisbogens:

$$\operatorname{sgn} F_1 = +1.$$

Die Function unter dem Integralzeichen ist daher eine definite, und zwar eine positive quadratische Form, also ist eine nothwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums erfüllt. Diese Bedingung ist aber keine hinreichende, da die zu untersuchende Curve nicht mit sämmtlichen Variationen, sondern nur mit einer bestimmten Schaar solcher verglichen wurde. Man muss vielmehr, um sicher zu gehen, das Weierstrassische Kriterium anwenden, welches eine hinreichende Bedingung darstellt. Dasselbe lautet: Die Function

$$E(x, y, p, q, p', q') = p'\left\{\frac{\partial F(x, y, p', q')}{\partial x'} - \frac{\partial F(x, y, p, q)}{\partial x'}\right\} + $$
$$+ q'\left\{\frac{\partial F(x, y, p', q')}{\partial y'} - \frac{\partial F(x, y, p, q)}{\partial y'}\right\}$$

darf für keinen Punkt des zu betrachtenden Curvenstückes negativ sein, falls dieses Curvenstück das Integral I zu einem Minimum machen soll. p, q sind die Richtungscosinuse der Winkel, welche die Tangente in einem Punkte der zu untersuchenden Curve mit den Coordinatenachsen bildet; p', q' dagegen sind die Cosinuse der Winkel, unter denen eine beliebige Richtung gegen die Achsen geneigt ist.

Im vorliegenden Falle hat E den folgenden Werth:

$$E = \frac{p'(p'-p)+q'(q'-q)}{y} = \frac{1-(pp'+qq')}{y}$$

$$pp'+qq' = \cos\Theta,$$

darin ist Θ der Winkel, welchen die Curventangente mit der durch p', q' bestimmten Richtung bildet.

$$E = \frac{1-\cos\Theta}{y},$$

somit längs der ganzen Curve für beliebige p', q':

$$\operatorname{sgn} E \neq -1.$$

Es hätte dies auch aus dem Ausdrucke für F_1 erschlossen werden können, da, wie Herr Weierstrass gezeigt hat, zwischen E und F_1 folgende Beziehung stattfindet:

$$E(x, y, p, q, p', q') =$$
$$= (pq'-p'q)^2(1-\varepsilon)F_1(x, y, p+\varepsilon(p'-p), q+\varepsilon(q'-q))$$
$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1$$

und

$$F_1(x, y, p, q) = \frac{1}{y}$$

von den Richtungscosinusen unabhängig ist.

Unter allen Curven, die durch zwei Punkte A und B gehen, besitzt daher thatsächlich der auf der X-Achse senkrecht stehende Kreis die kleinste Länge L. Dieses Minimum der Länge L ist als Distanz der beiden Punkte A, B zu bezeichnen.

Als Corollar ergibt sich:

Sind n Punkte $M_1, M_2, \ldots M_n$ vorgelegt und man sucht die kürzeste, welche diese Punkte in der angegebenen Reihenfolge

enthält, so findet man, dass dieselbe aus $n-1$ auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreisbögen besteht, die beziehungsweise durch die $n-1$ Punktepaare M_1, M_2; M_2, M_3; $\ldots M_{n-1}, M_n$ hindurchgeben.

Ein weiteres Corollar lautet:

Von allen Linien zwischen zwei Punkten A und B, die auf einem zur Y-Achse parallelen Strahle liegen, ist die Gerade die kürzeste.

Dieser Satz ergibt sich, unabhängig von den vorangehenden Erörterungen, daraus, dass die Länge L einer Curve zum Mindesten so gross ist, wie die ihrer Projection auf die Y-Achse.

Die Distanz zweier Punkte M_1, M_2 mit den Coordinaten x_i, y_i $(i = 1, 2)$ bestimmt sich durch das Integral:

$$d = \left| \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \right| = \left| \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi_2}{2}} \right|.$$

φ_1, φ_2 sind die Winkel der zu den Punkten M_1, M_2 gehörigen Radien jenes Kreises, welcher durch diese Punkte senkrecht zur X-Achse construirt ist.

Der für d sich ergebende Werth bestätigt den früher gefundenen Satz, dass man den Bogen $M_1 M_2$ eines Kreises, dessen Mittelpunkt auf der X-Achse liegt, parallel zu sich verschieben kann, ohne seine Länge zu ändern, wenn nur die Endpunkte des Bogens immer auf den durch M_1, M_2 gehenden Radien des Kreises liegen.

Aus der Formel für d ergibt sich ferner, dass die Distanz jedes Punktes der z-Ebene von irgend einem Punkte der X-Achse unendlich gross ist. Die unendlich fernen Punkte theilen diese Eigenschaft mit den Punkten der X-Achse, da die Distanz eines Punktes (x, y) von dem unendlich fernen Punkte des Strahles $y = x \operatorname{tang}\varphi$ den Werth

$$d = \frac{1}{\sin\varphi} \lim_{(\eta=\infty)} \lg \frac{\eta}{y} = \frac{1}{\sin\varphi} \lim_{(\eta=\infty)} \lg \eta$$

besitzt.

Der Winkel $\varphi = 0$ bildet einen Ausnahmefall, indem die Distanz in diesem Falle unendlich wird wie

$$d = \lim_{\xi=\infty} \frac{\xi - x}{y} = \frac{1}{y} \lim_{(\xi=\infty)} \xi.$$

Die Distanz d der Punkte M_1, M_2 lässt sich in einfacher Weise als Function der Coordinaten dieser Punkte darstellen. Bezeichnet man nämlich mit a die Abscisse des Mittelpunktes und mit r den Radius des Kreises, längs dessen die Distanz der Punkte M_1, M_2 gemessen wird, so ist

$$\operatorname{tang} \frac{\varphi_i}{2} = \frac{y_i}{x_i - a + r}, \qquad (i = 1, 2),$$

daher

$$d = \left| \lg \frac{y_1 (x_2 - a + r)}{y_2 (x_1 - a + r)} \right| = \left| \lg \frac{r^2 + r(x_1 - x_2) - (x_1 - a)(x_2 - a)}{y_1 y_2} \right|.$$

a und r bestimmen sich aus der Kreisgleichung:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Länge L des Bogens $M_1 M_2$ eines auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreises K sei durch die Punkte $N_1, \ldots N_{n-1}$ in n gleiche Theile getheilt. Die Winkel, welche die durch M_1, M_2, N_i gehenden Radien mit der positiven X-Achse bilden, seien φ, ψ, φ_i, dann gilt unter der Voraussetzung, dass

$$\varphi > \psi$$

ist, das folgende Gleichungssystem

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi_2}{2}} = \ldots = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_{n-1}}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\psi}{2}},$$

d. h. die Reihe der Tangenten der halben Winkel

$$\tang\frac{\varphi}{2},\quad \tang\frac{\varphi_1}{2},\ldots \tang\frac{\varphi_{n-1}}{2},\quad \tang\frac{\psi}{2}$$

bildet eine geometrische Progression.

Für die Zweitheilung des Bogens ergibt sich insbesondere die einfache Gleichung

$$\tang^2\frac{\varphi_1}{2} = \tang\frac{\varphi}{2}\,.\,\tang\frac{\psi}{2}\,.$$

Die Aufgabe der Zweitheilung kann auf constructivem Wege erledigt werden. Zu diesem Behufe betrachte man die reelle lineare Substitution, welche M_1 in M_2 verwandelt und durch welche der eine von den beiden Schnittpunkten des Kreises K mit der X-Achse in den anderen transformirt wird. Dadurch ist die lineare Substitution vollkommen bestimmt; denn man kennt drei Paare einander entsprechender Elemente, von denen das eine der X-Achse angehört, das zweite von den Punkten M_1, M_2 und das dritte von den diesen Punkten conjugirten Stellen gebildet wird. Die verlangte Substitution lautet:

$$\begin{vmatrix} tz & t & z & 1 \\ x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 & 0 \\ a^2-r^2 & a-r & a+r & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Kreis K wird durch diese Substition in sich selbst transformirt, woraus folgt, dass die Schnittpunkte von K mit der X-Achse einander involutorisch entsprechen. Wenn aber ein Elementenpaar existirt, dessen Elemente einander vertauschungsfähig entsprechen, so gilt diese Vertauschungsfähigkeit für alle Paare einander entsprechender Elemente, d. h. die angegebene Transformation ist eine Involution. Das Centrum C der Involution auf dem Träger K wird gefunden, indem man den Strahl M_1N_1 mit der X-Achse zum Durchschnitte bringt.

Die Berührungspunkte der Tangenten, die sich aus dem Involutionscentrum an K legen lassen, also die Schnittpunkte von K mit der Polare von C in Bezug auf K, sind die Doppelpunkte der

involutorischen Verwandtschaft. Ist H der oberhalb der X-Achse gelegene Doppelpunkt, so entsprechen die auf Seite der positiven y gelegenen Bögen M_1H, M_2H einander involutorisch. Da aber durch eine lineare Transformation mit positiver Determinante die Länge L nicht geändert wird, so ist H thatsächlich der Halbirungspunkt des Bogens M_1M_2.

Dasselbe Resultat ergibt sich auch auf dem folgenden Wege: Man construirt durch den Halbirungspunkt H des Kreisbogens M_1M_2 senkrecht zu diesem einen Kreis K' und benützt den letzteren als Inversionskreis für eine Transformation durch reciproke Radienvectoren. Diese Inversion transformirt den Kreis K, da er ein Orthogonalkreis von K' ist, in sich selbst, und es entsprechen sich auf dem Kreise K, da für die Inversion die Länge L eine Invariante ist, die Endpunkte M_1, M_2 des zu halbirenden Bogens. Daraus folgt, dass der Strahl M_1M_2 als Verbindungslinie zweier durch Inversion aus einander entstandener Punkte durch das Centrum C des Involutionskreises geht. Da der Strahl CH den Kreis K in H berührt, so ist die Richtigkeit der angeführten Methode, den Halbirungspunkt H zu finden, von Neuem bewiesen.

Auf diesem Wege ergibt sich noch ein weiterer Satz. Da nämlich jeder Punkt von K' vermöge der angewandten Inversion sich selbst entspricht, so werden durch die letztere zwei auf der X-Achse senkrecht stehende Kreisbögen, welche irgend einen Punkt von K' (mit positiver Ordinate) mit den Punkten M_1, beziehungsweise M_2 verbinden, in einander transformirt. Jeder Punkt des oberhalb der X-Achse gelegenen Halbkreises K' ist also von den beiden Punkten M_1, M_2 gleich weit entfernt, wobei die Distanz durch die frühere Formel

$$d = \left| \lg \frac{\tang \frac{\varphi_1}{2}}{\tang \frac{\varphi_2}{2}} \right|$$

definirt ist.

Es gilt somit der folgende Satz:

Der Ort aller Punkte, welche von zwei gegebenen Punkten M_1, M_2 gleich weit entfernt sind, ist ein Halbkreis, welcher den

durch M_1, M_2 gehenden, auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreis orthogonal schneidet und den Schnittpunkt des Strahles M_1M_2 mit der X-Achse zum Mittelpunkte hat.

Da die gerade Linie als Ort eines Punktes, der von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist, definirt werden kann, so ist von Neuem dargethan, dass der geraden Linie der Euclydischen Geometrie bei der vorausgesetzten Definition von L ein auf der X-Achse senkrecht stehender Kreis entspricht.

Der gefundene Kreis, der sämmtliche Punkte enthält, die von den Punkten M_1, M_2 äquidistant sind, stellt im Vereine mit der X-Achse den Ort der Doppelpunkte aller reellen linearen Substitutionen dar, welche die Punkte M_1, M_2 in einander überführen. Zunächst ist nämlich klar, dass der Doppelpunkt einer jeden solchen Transformation dem genannten Orte angehört. Dass umgekehrt jeder Punkt des letzteren als Doppelpunkt einer linearen Transformation von der genannten Art aufgefasst werden kann, ist ein Specialfall des folgenden Satzes:

Zwei Punktepaare M, N; M', N', die so gelegen sind, dass die Distanz der Punkte M, N ebenso gross ist, wie die der Punkte M', N', sind durch lineare reelle Transformationen in einander überführbar.

Um dies zu beweisen, betrachte man die beiden auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreise K_1, K_2, von denen der eine durch M, N, der andere durch M', N' gelegt ist. Sind M_1, N_1; M'_1, N'_1 die Schnittpunkte von K_1, K_2 mit der X-Achse (wobei die Bezeichnung so gewählt ist, dass die Bögen M_1M, M'_1M$'$ die Punkte N, respective N' nicht enthalten), so transformirt die lineare Substitution, welche M in M', M_1 in M'_1 überführt, K_1 in K_2, und es entsprechen sich zufolge der gemachten Voraussetzung auf diesen Kreisen insbesondere die Punkte N, N'. Es leistet demnach die angewandte Substitution thatsächlich das Verlangte, indem sie den Bogen MN in den Bogen $M'N'$ überführt.

Der Ort der Doppelpunkte aller reellen linearen Substitutionen, welche zwei gegebene Punkte M_1, M_2 in einander überführen, kann auch durch Rechnung in einfacher Weise ermittelt werden. Die Gleichung dieses Ortes ergibt sich nämlich durch Elimination der Grössen α, β, γ, δ aus dem folgenden Gleichungssysteme:

$$\alpha(x^2-y^2)+\beta x+\gamma x+\delta=0$$
$$\alpha.2xy+\beta y+\gamma y \qquad =0$$
$$\alpha(x_1x_2-y_1y_2)+\beta x_1+\gamma x_2+\delta=0$$
$$\alpha(x_1y_2+x_2y_1)+\beta y_1+\gamma y_2 \qquad =0.$$

Das Eliminationsresultat lautet:

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x & x & 1 \\ 2xy & y & y & 0 \\ x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Die Gleichung stellt eine circulare Curve dritter Ordnung dar, welche in die X-Achse und den folgenden Kegelschnitt zerfällt:

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x & x & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 0 \\ x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Durch Addition der mit $-x$ multiplicirten Elemente der zweiten Horizontalreihe zu den gleichstelligen Elementen der ersten erhält man:

$$\begin{vmatrix} -x^2-y^2 & 0 & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 0 \\ x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Addirt man die mit x^2+y^2 multiplicirten Elemente der letzten Verticalreihe zu den gleichstelligen der ersten, so ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 0 \\ x^2+y^2+x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

oder:

$$K' \equiv \begin{vmatrix} x^2+y^2+x_1x_2-y_1y_2 & x_1 & x_2 \\ 2x & 1 & 1 \\ x_1y_2+x_2y_1 & y_1 & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$K' \equiv (y_2-y_1)(x^2+y^2) + 2x(x_2y_1-x_1y_2) + \\ + y_2(x_1^2+y_1^2) - y_1(x_2^2+y_2^2) = 0.$$

Der Mittelpunkt dieses Kreises liegt auf der X-Achse und hat die Abscisse $\frac{x_2y_1-x_1y_2}{y_1-y_2}$; derselbe ist daher identisch mit dem Schnittpunkte des Strahles M_1M_2 mit der X-Achse.

Setzt man:

$$K \equiv \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

so besteht die Identität:

$$(x_1-x_2)K' + (y_1-y_2)K \equiv \\ \equiv \begin{vmatrix} (x_2y_1-x_1y_2)x & (y_1-y_2)x+x_2y_1-x_1y_2 & y_1-y_2 \\ x_1^2+y_1^2 & 2x_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & 2x_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Die gleich Null gesetzte rechte Seite dieser Identität stellt die Polare des Mittelpunktes von K' in Bezug auf den Kreis K dar; daher durchschneiden sich die Kreise K und K' rechtwinkelig. Es kann somit der folgende Satz ausgesprochen werden:

Der Ort der Doppelpunkte aller reellen linearen Substitutionen, welche zwei gegebene Punkte M_1, M_2 in einander überführen, ist eine circulare Curve dritter Ordnung, welche in die X-Achse und einen Kreis K' degenerirt, dessen Mittelpunkt in den Schnittpunkt des Strahles $M_1 M_2$ mit der X-Achse fällt und welcher den durch M_1, M_2 gehenden, auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreis rechtwinkelig durchschneidet. Die Paare der Doppelpunkte der genannten Substitutionen bilden zwei Involutionen, deren Träger die X-Achse und der Kreis K' sind. Das Centrum der

Involution auf dem Kreise K' fällt in den unendlich fernen Punkt der Y-Achse. Unter den sämmtlichen Substitutionen der verlangten Art gibt es zwei parabolische, die zu denselben gehörigen Doppelpunkte sind die Schnittpunkte des Kreises K' mit der X-Achse.

Im Vorhergehenden wurde der Ort der Doppelpunkte aller reellen linearen Substitutionen aufgesucht, welche zwei gemeinschaftliche Paare in specieller, nämlich conjugirter Lage besitzen.

Sind die beiden gemeinsamen Paare in der X-Achse gelegen, und haben deren Abscissen die Werthe x_1, t_1; x_2, t_2, so besteht der Ort der Doppelpunkte aller Substitutionen, die diese beiden Paare gemeinschaftlich haben, aus der X-Achse und dem Kreise:

$$\begin{vmatrix} x^2-y^2 & x & x & 1 \\ 2x & 1 & 1 & 0 \\ x_1 t_1 & x_1 & t_1 & 1 \\ x_2 t_2 & x_2 & t_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante auf der linken Seite reducirt sich auf die folgende Determinante dritter Ordnung:

$$K \equiv \begin{vmatrix} x^2+y^2+x_1 t_1 & x_1 & t_1 \\ x^2+y^2+x_2 t_2 & x_2 & t_2 \\ 2x & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Es besteht die Identität:

$$K \equiv (t_1-t_2) K_1 - (x_1-x_2) K_2,$$

wobei K_1 und K_2 die folgende Bedeutung haben:

$$K_1 \equiv (x-x_1)(x-x_2)+y^2$$
$$K_2 \equiv (x-t_1)(x-t_2)+y^2.$$

$K_1 = 0$ ist die Gleichung des Kreises, der durch die beiden Punkte $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ geht und auf der X-Achse senkrecht steht. Eine ähnliche Bedeutung hat $K_2 = 0$. Die Durchmesser der beiden Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ haben die Werthe:

$$2r_1 = |x_1-x_2|$$
$$2r_2 = |t_1-t_2|,$$

daher kann die Gleichung des Kreises $K=0$ in die Form gesetzt werden:

$$\frac{K_1}{r_1} \pm \frac{K_2}{r_2} = 0,$$

wobei das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem

$$\operatorname{sgn}(x_1 - x_2)(t_1 - t_2) = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}$$

ist.

Es ergibt sich somit als Verallgemeinerung eines bekannten Satzes[1] das folgende Resultat:

Der Ort der Doppelpunkte aller reellen linearen Substitutionen, welche zwei auf der X-Achse liegende gemeinschaftliche Paare entsprechender Elemente haben, besteht aus der X-Achse und dem Kreise $K \equiv \frac{K_1}{r_1} \pm \frac{K_2}{r_2} = 0$. Die Paare der Doppelpunkte bilden zwei Involutionen, deren Träger die X-Achse und der Kreis K sind. Die Schnittpunkte des letzteren mit der X-Achse sind die Doppelpunkte der beiden parabolischen Substitutionen, die in dem genannten Systeme von Transformationen enthalten sind.

IV.

Der Ort aller Punkte, die von einem gegebenen Punkte (α, β) gleich weit entfernt sind, ist als Kreis zu bezeichnen; als Entfernung hat man dabei den Ausdruck

$$s = \left| \lg \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2}}{\operatorname{tang} \frac{\varphi_2}{2}} \right|$$

zu verstehen. Der Punkt (α, β) ist der Mittelpunkt, die unveränderliche Distanz des letzteren von den Punkten der Kreisperipherie der Radius des Kreises. Benützt man die Winkel φ_1, φ_2 als die Coordinaten eines Punktes in der Ebene und bezeichnet den Radius des Kreises mit s, so lautet die Kreisgleichung:

[1] Vergl. Em. Weyr, Die Elemente der projectivischen Geometrie, 1. Heft, Art. 107.

$$\tang \frac{\varphi_1}{2} = e^s . \tang \frac{\varphi_2}{2} .$$

Die Gleichung stellt, wenn man s von 0 bis $+\infty$ variiren lässt, ein Büschel concentrischer Kreise dar.

Die Differentialgleichung des Kreises hat die Form:

$$ds = \frac{d\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \frac{d\varphi_2}{\sin\varphi_2} = 0.$$

Sind x, y die Coordinaten eines Punktes des Kreises und ist a der Radius des durch diesen Punkt gehenden Halbmesserkreises (wobei als Halbmesser jeder durch den Punkt (α, β) gelegte, auf der X-Achse senkrecht stehende Kreis bezeichnet wird), so gelten die Gleichungen:

$$\cot\varphi_1 = \frac{\alpha - a}{\beta}$$

$$\cot\varphi_2 = \frac{x - a}{y}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\sin^2\varphi_1} = \frac{da}{\beta}$$

$$\frac{d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2} = \frac{da - dx + dy . \cot\varphi_2}{y} .$$

Wenn man vom Punkte (x, y) aus auf der Normale des durch diesen Punkt gelegten Halbmesserkreises vorschreitet, so ist

$$-dx + dy . \cot\varphi_2 = 0,$$

daher:

$$\frac{d\varphi_2}{\sin^2\varphi_2} = \frac{da}{y}$$

$$\frac{d\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \frac{d\varphi_2}{\sin\varphi_2} = da\left(\frac{\sin\varphi_1}{\beta} - \frac{\sin\varphi_2}{y}\right) = 0,$$

da

$$\sin\varphi_1 : \sin\varphi_2 = \beta : y .$$

Damit ist nachgewiesen, dass der Kreis auf jedem seiner Halbmesser senkrecht steht.

Die Halbmesserkreise bilden ein Büschel, dessen Scheitel die Punkte (α, β) und $(\alpha, -\beta)$ sind. Da die orthogonalen Trajectorien dieses Büschels wieder Kreise sind, so erhält man das Resultat:

Der Kreis, d. i. der Ort aller Punkte, deren Distanz s von einem Punkte (α, β) eine gegebene Grösse ist, ist mit einem Euclidischen Kreise identisch.

Das Büschel concentrischer Kreise

$$\operatorname{tang}\frac{\varphi_1}{2} = e^s . \operatorname{tang}\frac{\varphi_2}{2}$$

stellt die Niveaulinien einer stationären Strömung in der unendlichen Ebene dar, deren Ein- und Ausströmungspunkt die Stellen (α, β) und $(\alpha, -\beta)$ sind. Die Strömungslinien dieser Strömung sind die Halbmesserkreise des concentrischen Kreisbüschels.

Aus dem Umstande, dass

$$\frac{d\varphi_1}{\sin\varphi_1} - \frac{d\varphi_2}{\sin\varphi_2} = 0$$

die Differentialgleichung eines Kreises ist, ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

1. Die kürzeste Entfernung eines Punktes von einer Curve ist der Bogen eines die X-Achse und die gegebene Curve orthogonal schneidenden Kreises.

2. Die kürzeste Entfernung zweier Curven ist der Bogen eines die X-Achse und die beiden gegebenen Curven orthogonal schneidenden Kreises.

Ist (A, B) der Mittelpunkt, (a, b) eine Stelle auf der Peripherie eines Kreises K, so liegt jeder Punkt, in den $a+ib$ durch Anwendung einer reellen linearen Transformation mit den Doppelelementen $A \pm iB$ übergeht, auf dem Kreise K, und umgekehrt kann jeder Punkt des Kreises K aus $a+ib$ durch Anwendung einer linearen Transformation von der früher genannten Art erzeugt werden. Man kann diese Thatsache zur Ermittlung der Eigenschaften eines Kreises benützen. Auf Grund dieser Bemerkung ergibt sich nämlich für den Kreis die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ax-by+A^2+B^2 & x & a \\ bx+ay & y & b \\ 2A & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x^2+y^2-2Ax-\frac{(a-A)^2+b^2+B^2}{b}y+A^2+B^2=0.$$

Die Coordinaten des Euclidischen Mittelpunktes dieses Kreises lauten:

$$\alpha = A \qquad \beta = \frac{(a-A)^2+b^2+B^2}{2b},$$

während der Radius r sich bestimmt aus:

$$r^2 = -B^2 + \frac{\{(a-A)^2+b^2+B^2\}^2}{4b^2} = \frac{\mu.\nu}{4b^2},$$

wo zur Abkürzung

$$\mu = (a-A)^2+(b+B)^2$$
$$\nu = (a-A)^2+(b-B)^2$$

gesetzt ist.

$$\frac{\mu+\nu}{2} = (a-A)^2+b^2+B^2$$

$$\frac{\mu-\nu}{2} = 2bB$$

$$\beta = \frac{\mu+\nu}{4b}$$

$$B = \frac{\mu-\nu}{4b}$$

$$\beta^2 - B^2 = \frac{\mu\nu}{4b^2} = r^2.$$

Unter den sämmtlichen Durchmessern des Kreises K gibt es einen, der in eine geradlinige Strecke, die zur Y-Achse parallel ist, degenerirt. Die Länge L dieser Strecke wird im Punkte $(A+iB)$ halbirt. Daraus ergibt sich für den Radius s des Kreises K der Werth:

$$s = \frac{1}{2}\lg\frac{\beta+r}{\beta-r}.$$

Eine andere Schreibweise dieser Gleichung lautet:

$$\frac{\beta+r}{\beta-r} = e^{2s}$$

$$\frac{\beta}{r} = \frac{e^{2s}+1}{e^{2s}-1}$$

$$\beta = \frac{B}{2}(1+e^{-2s})$$

$$r = \frac{B}{2}(1-e^{-2s})$$

Das erlangte Resultat kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Ein Kreis mit dem Mittelpunkte (A, B) und dem Radius s (d.i. der Ort aller Punkte, deren Distanz $\int\frac{ds}{y}$ vom Punkte (A, B) gleich einer bestimmten Grösse s ist) ist mit einem Euclidischen Kreise identisch, für welchen die Mittelpunktscoordinaten und der Radius die folgenden Werthe haben:

$$\alpha = A, \qquad \beta = \frac{B}{2}(1+e^{-2s}), \qquad r = \frac{\beta}{2}(1-e^{-2s});$$

und umgekehrt kann jeder Euclidische Kreis

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2 = r^2$$

unter der Voraussetzung, dass $\beta > r$ ist, als Kreis im anderen Sinne aufgefasst werden, und zwar lauten die Bestimmungsstücke dieses Kreises:

$$A = \alpha, \qquad B = \sqrt{\beta^2-r^2}, \qquad s = \frac{1}{2}\lg\frac{\beta+r}{\beta-r}.$$

Aus dem Umstande, dass der für s gefundene Werth nur von dem Quotienten $\frac{\beta}{r}$ abhängt, folgt, dass die Gleichheit von $\frac{\beta}{r}$ für zwei Kreise die hinreichende Bedingung dafür ist, dass sich diese beiden Kreise durch lineare Transformationen in einander überführen lassen, und zwar gibt es unendlich viele Transformationen, welche dies leisten. Sind nämlich

$$K_i \equiv (x-\alpha_i)^2+(\beta_i-y)^2-r_i^2 = 0 \qquad (i = 1, 2)$$

die Gleichungen der beiden Kreise, wobei $\frac{\beta_1}{r_1} = \frac{\beta_2}{r_2}$ vorausgesetzt ist, so hat man nur der Stelle $\alpha_1 + i\left|\sqrt{\beta_1^2 - r_1^2}\right|$ und einem willkürlichen Punkte der Peripherie von $K_1 = 0$ den Punkt $\alpha_2 + i\left|\sqrt{\beta_2^2 - r_2^2}\right|$ und einen beliebigen Punkt auf dem Umfange von $K_2 = 0$ zuzuordnen.

Wegen der gemachten Voraussetzung $\beta > r$ ist die Behauptung für die Fälle $\beta \gtreqless r$ eigens zu beweisen. Im ersten Falle ist die Möglichkeit einer linearen Transformation der beiden Kreise in einander unmittelbar zu erkennen.

Man ordnet, um das Verlangte zu leisten, die Berührungspunkte der beiden Kreise mit der X-Achse einander zu und setzt ferner fest, dass zwei beliebige weitere Punkte der beiden Kreisperipherien in einander übergehen sollen. Im Falle $\beta < r$ hat man nur dafür Sorge zu tragen, dass die beiden endlichen Strecken, welche die Kreise $K_1 = 0$, $K_2 = 0$ auf der X-Achse bestimmen, durch die verlangte Transformation in einander übergehen. Dies wird erreicht, indem man den Endpunkten und einem beliebigen Punkte der einen Strecke die Endpunkte und einen beliebigen Punkt der anderen Strecke zuordnet.

Bezeichnet man einen auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreisbogen, der zwei Punkte eines Kreises verbindet, als Sehne, und den Winkel, welchen zwei durch den Mittelpunkt $A + iB$ gelegte, auf der X-Achse senkrecht stehende Kreise mit einander einschliessen, als Centriwinkel, so gelten die Sätze:

Der im Halbirungspunkte einer Sehne auf dieser und der X-Achse senkrecht stehende Kreis geht durch den Mittelpunkt $A + iB$.

Zu gleichen Centriwinkeln gehören gleiche Sehnen und umgekehrt.

Durch zwei Punkte M_1, M_2 in der Distanz $\sigma = \lg \frac{\tan \frac{\varphi_1}{2}}{\tan \frac{\varphi_2}{2}}$ lassen sich unendlich viele Kreise legen, die ein Büschel bilden; die Radien s dieser Kreise liegen zwischen den Grenzen $\frac{\sigma}{2}$ und ∞. Der Ort der Mittelpunkte $A + iB$ dieser Kreise ist ein

oberhalb der X-Achse gelegener Halbkreis, welcher die X-Achse und den Kreisbogen, längs dessen die Distanz σ gemessen wird, in dem Halbirungspunkte des letzteren rechtwinkelig schneidet. Die Euclidischen Mittelpunkte der Kreise dieses Büschels erfüllen eine geradlinige Strecke, welche die Euclidischen Mittelpunkte derjenigen beiden Kreise des Büschels verbindet, welche die X-Achse berühren. Die beiden letztgenannten Kreise haben den Radius $s = \infty$, weil ihre Mittelpunkte $A+iB$ in die Berührungspunkte dieser Kreise mit der X-Achse fallen.

Die Fläche eines Kreises K wird durch jede Substitution, die den Mittelpunkt $A+iB$ des Kreises zum Doppelpunkte hat, in sich transformirt; und umgekehrt muss jede Transformation, welche dies leistet, den Mittelpunkt zum Doppelpunkte haben.

Um den Umfang eines Kreises K in n gleiche Theile zu theilen hat man nur eine cyklische Substitution von der $n$ten Ordnung aufzusuchen, welche den Mittelpunkt $A+iB$ des Kreises zum Doppelpunkte hat. Ist

$$S^n = 1,$$

so zerfallen die sämmtlichen Punkte des Kreises K in n elementige Gruppen, und jede dieser Gruppen leistet die Theilung der Kreisperipherie in n gleiche Theile. Sind $a_1, \dots a_n$ die Punkte einer solchen Gruppe, und verbindet man dieselben mit dem Mittelpunkte $A+iB$ durch Kreisbögen, die auf der X-Achse senkrecht stehen, so wird dadurch die Fläche S des Kreises in n gleiche Theile getheilt, da die sämmtlichen Sectoren aus einem derselben durch Anwendung der Substitutionen der Gruppe

$$1, S, \dots S^{n-1}$$

hervorgehen.

Verbindet man je zwei aufeinander folgende Punkte a_k, a_{k+1} durch einen auf der X-Achse senkrecht stehenden Kreisbogen, so erhält man ein regelmässiges, d. h. gleichseitiges und gleichwinkeliges n-Eck. Der Mittelpunkt $A+iB$ des Kreises ist zugleich der Mittelpunkt dieses n-Eckes, da er von allen Ecken und auch von allen Seiten des Polygones gleich weit entfernt ist.

Wie in der Euclidischen Geometrie ist auch hier der Kreis die Lösung des isoperimetrischen Problemes: Unter allen Curven von gegebener Länge L diejenige zu finden, für welche die

Fläche S ein Maximum ist. Das Integral, das zu einem Maximum gemacht werden soll, lautet:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x'}{y}\, dt,$$

dabei ist der Bedingung zu genügen

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}\, dt,$$

wo L eine gegebene Grösse ist. Um die Curve zu finden, die der Aufgabe genügt, hat man das Integral zu bilden:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \frac{x' - \lambda\sqrt{x'^2 + y'^2}}{y}\, dt.$$

Benutzt man dieselben Bezeichnungen, wie bei der Aufsuchung der kürzesten zwischen zwei Punkten, so lautet die Differentialgleichung der gesuchten Curve:

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{1 - \lambda \frac{dx}{ds}}{y} = c$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1 - cy}{\lambda}.$$

Daraus folgt durch Anwendung derselben Mittel, wie bei der Bestimmung der Kürzesten

$$\frac{dy}{ds} = \frac{C}{\lambda}(x - a),$$

daher ist die gesuchte Curve ein Kreis:

$$x - a = b\lambda . \cos t$$

$$y - b = b\lambda . \sin t.$$

Die Grösse λ bestimmt sich daraus, dass der Umfang L vorgeschrieben ist

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{L^2 + 4\pi^2}}.$$

Um nachzuweisen, dass der Kreis thatsächlich die Lösung des isoperimetrischen Problemes ist, ist es vortheilhaft, die Weierstrassische E-Function herzustellen.

$$\frac{\partial F(x, y, p, q)}{\partial x'} = \frac{1-\lambda p}{y} \qquad \frac{\partial F(x, y, p, q)}{\partial y'} = -\frac{\lambda q}{y}$$

$$E(x, y, p, q, p', q') = \frac{\lambda}{y}(\cos\theta - 1), \qquad \operatorname{sgn} E \neq +1$$

daher findet thatsächlich ein Maximum statt.

Über die Reihenumkehrung

von

Ottokar Ježek,

Assistent der k. k. böhmischen technischen Hochschule in Prag.

Im Folgenden soll vor Allem das formale Bildungsgesetz der Coëfficienten einer zu einer gegebenen Reihe umgekehrten Reihe bestimmt werden und hierauf aus den erhaltenen Resultaten einige Folgerungen gemacht werden, die mir erwähnenswerth schienen.

I.

Gegeben sei eine Function $y = f(x)$, die sich in der Umgebung der Stelle Null regulär verhält, durch ihr Element:

$$y = \sum_{1}^{\infty} \frac{y_k(0)}{k!} x^k,$$

wobei y_k die $k$te Derivation von y nach x bedeuten soll und $y_1(0) \gtrless 0$ vorausgesetzt wird; es soll das Element

$$x = \sum_{1}^{\infty} \frac{x_n(0)}{n!} y^n, \quad x_1(0) \gtrless 0,$$

der in der Umgebung der Stelle Null ebenfalls regulären Function $x = \varphi(y)$ gefunden werden, die durch die Gleichung

$$f(\varphi(y)) = y$$

definirt ist.

Wie bekannt, ist

$$x_1 = \frac{1}{y_1}; \tag{1}$$

durch nochmalige Derivation erhält man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass y die unabhängig Veränderliche ist

$$x_2 = \frac{-y_2}{y_1^3}. \tag{2}$$

Eine weitere Derivation gibt dann

$$x_3 = \frac{3y_2^2 - y_1 y_3}{y_1^5}, \tag{3}$$

und allgemein wird die n^{te} Derivation die Form haben

$$x_n = \frac{Y_n}{y_1^{2n-1}} = \frac{y_1 Y'_{n-1} - (2n-3) y_2 Y_{n-1}}{y_1^{2n-1}}, \tag{4}$$

wenn man festsetzt, dass

$$Y_1 = 1, \quad Y_2 = -y_2$$

ist.

Hiebei ist unschwer einzusehen, dass Y_n von der Dimension $(n-1)$ und vom Gewichte $2(n-1)$ sein muss. Für Y_1, Y_2, Y_3 ergibt sich die Giltigkeit dieses Ausspruches durch blossen Anblick der Ausdrücke 1), 2), 3); setzt man somit voraus, dass dieser Ausspruch bereits für Y_{n-1} volle Giltigkeit hätte, so muss er, wie aus 4) folgt, auch für Y_n Geltung haben, er gilt somit allgemein.

Es können somit die Exponenten jedes Ausdruckes

$$y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} \ldots y_n^{\lambda_n}, \tag{α}$$

der in Y_n vorkommt, als ganzzahlige positive Lösung der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n &= n-1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n &= 2(n-1) \end{aligned} \tag{β}$$

aufgefasst werden. Wenn man nun noch nachweist, dass auch umgekehrt jede ganzzahlige positive Lösung der beiden Gleichungen β) als Exponent eines bestimmten Ausdruckes α) in Y_n vorkommen muss, so ist man im Stande, den literalen Theil des Ausdruckes Y_n anzusetzen. Dieser Beweis ist aber leicht zu

erbringen. Vorausgesetzt nämlich, es gäbe irgend eine ganzzahlige positive Lösung der beiden Gleichungen β), die einen Ausdruck liefern würde, der nicht durch Derivation erhalten werden könnte, dann dürfte auch mindestens einer der Ausdrücke, die man erhält, wenn man in

$$y_1^{\lambda_1-1} y_2^{\lambda_2} \dots y_k^{\lambda_k+1} y_{k+1}^{\lambda_{k+1}-1} \dots y_n^{\lambda_n} \qquad \gamma)$$

$k = 1, 2, \dots, (n-1)$ setzt und durch deren Derivation und Multiplication mit y^1 man bis auf einen Zahlenfactor den Ausdruck α) erhält, nicht unter den Derivationen von Y_{n-1} enthalten sein. Da aber die Exponenten in γ) nunmehr den beiden Gleichungen

$$\lambda_1' + \lambda_2 + \dots\dots\dots + \lambda_k' + \lambda_{k+1}' + \dots + \lambda_n = n-2$$
$$\lambda_1' + 2\lambda_2 + \dots + k\lambda_k' + (k+1)\lambda_{k+1}' + \dots + \lambda_n = 2(n-2)$$

genügen, so müsste man schliesslich zu einem Ausdrucke kommen, der unter den Derivationen von 3) nicht enthalten wäre. Dem ist jedoch nicht so, indem alle ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = 2$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \dots + n\lambda_n = 4$$

Ausdrücke liefern, die auch durch Derivation erhalten werden können. Da somit unsere Voraussetzung sich als fehlerhaft erwiesen hat, müssen wir die Richtigkeit unserer Behauptung als feststehend ansehen.

Es bleibt somit nur noch das Gesetz der Zahlencoëfficienten in Y_n, die wir mit $[n^{\lambda_n}\dots 2^{\lambda_2}1^{\lambda_1}]$ bezeichnen wollen, zu ergründen. Wenn man jedoch berücksichtigt, welche Glieder aus Y_{n-1}' und Y_{n-1} zu dem Coëfficienten $[n^{\lambda_n}\dots 2^{\lambda_2}1^{\lambda_1}]$ einen Beitrag leisten können, so findet man leicht die Recursionsformel:

$$[n^{\lambda_n}\dots 2^{\lambda_2}1^{\lambda_1}] = \Sigma(\lambda_k+1)[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots(k+1)^{\lambda_{k+1}-1}k^{\lambda_k+1}\dots 1^{\lambda_1}] -$$
$$-(2n-3)[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 2^{\lambda_2-1}1^{\lambda_1}].$$

Dieselbe gestattet ohne Schwierigkeit, jeden beliebigen Coëfficienten zu berechnen, wenn man nur bedenkt, dass $[3^1 1^1] = -1$ und $[2^2] = 3$ ist.

Wir haben somit das Resultat:

„Die zur Function $y = \sum_1^\infty \frac{y_k(0)}{k!} x^k$ umgekehrte und ebenfalls in der Umgebung der Stelle Null reguläre Function ist durch das Element definirt:

$$x = \sum_1^\infty \frac{x_n(0)}{n!} y^n = \sum_1^\infty \frac{\Sigma [n^{\lambda_n} \dots 2^{\lambda_2} 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1}(0) y_2^{\lambda_2}(0) \dots y_n^{\lambda_n}(0)}{n! \, y_1^{2n-1}(0)} y^n,$$

wobei die Zahlen λ_k die sämmtlichen ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_n = n-1$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots\dots + n\lambda_n = 2(n-1)$$

darstellen."

II.

Gesetzt den Fall, wir hätten x_4 zu bestimmen. Nach dem soeben Mitgetheilten würde sich die Rechnung also gestalten: Die sämmtlichen ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 3$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 6$$

sind die folgenden:

$$\lambda_1 = 0, \quad 1, \quad 2$$
$$\lambda_2 = 3, \quad 1, \quad 0$$
$$\lambda_3 = 0, \quad 1, \quad 0$$
$$\lambda_4 = 0, \quad 0, \quad 1.$$

Daher hat man:

$$[2^3] = -5[2^2] = -15$$
$$[3^1 2^1 1^1] = 2[2^2] + [3^1 1^1] - 5[3^1 1^1] = 10$$
$$[4^1 1^2] = [3^1 1^1] = -1,$$

woraus folgt:

$$x_4 = \frac{-15y_2^3 + 10y_1y_2y_3 - y_1^2y_4}{y_1^7}.$$

Ähnlich wurde auch Y_5 bis Y_8 bestimmt, so dass sich unter Heranziehung der bereits erhaltenen Y_1 bis Y_4 folgende Tabelle ergibt:

$$Y_1 = 1.$$

$$Y_2 = -y_2.$$

$$Y_3 = 3y_2^2 - y_1y_3.$$

$$Y_4 = -15y_2^3 + 10y_1y_2y_3 - y_1^2y_4.$$

$$Y_5 = 105y_2^4 - 105y_1y_2^2y_3 + 15y_4y_2y_1^2 + 10y_3^2y_1^2 - y_5y_1^3.$$

$$Y_6 = -945y_2^5 + 1260y_1y_2^3y_3 - 210y_1^2y_2^2y_4 - 280y_1^2y_2y_3^2 + \\ + 35y_1^3y_3y_4 + 21y_1^3y_2y_5 - y_1^4y_6.$$

$$Y_7 = 10395y_2^6 - 17325y_1y_2^4y_3 + 3150y_1^2y_2^3y_4 + 6300y_1^2y_2^2y_3^2 - \\ - 378y_1^3y_2^2y_5 - 1260y_1^3y_2y_3y_4 - 280y_1^3y_3^3 + 35y_1^4y_4^2 + \\ + 28y_1^4y_2y_6 + 56y_1^4y_3y_5 - y_1^5y_7.$$

$$Y_8 = -135135y_2^7 + 270270y_1y_2^5y_3 - 51975y_1^2y_2^4y_4 - \\ - 138600y_1^2y_2^3y_3^2 + 6930y_1^3y_2^3y_5 + 34650y_1^3y_2^2y_3y_4 + \\ + 15400y_1^3y_2y_3^3 - 630y_1^4y_2^2y_6 - 2520y_1^4y_2y_3y_5 - \\ - 1575y_1^4y_2y_4^2 - 2100y_1^4y_3^2y_4 + 36y_1^5y_2y_7 + \\ + 84y_1^5y_3y_6 + 126y_1^5y_4y_5 - y_1^6y_8.$$

Zum Schlusse dieses Abschnittes soll ein Ausdruck für den Quotienten $\frac{x_n}{x_{n-1}}$ abgeleitet werden, der bei den folgenden Betrachtungen sich als nützlich erweisen wird.

Wir hatten:

$$x_n = \frac{y_1Y'_{n-1} - (2n-3)Y_ny_2}{y_1^{2n-1}}.$$

$$x_{n-1} = \frac{Y_{n-1}}{y_1^{2n-3}};$$

daher

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{y_1^2}\left[y_1\frac{Y'_{n-1}}{Y_{n-1}} - (2n-3)y_2\right].$$

Da aber

$$Y_{n-1} = \Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \dots 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}$$

ist, wobei die λ_k, wie bekannt, die sämmtlichen ganzzahligen, positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\Sigma \lambda_k = (n-2), \quad \Sigma k \lambda_k = 2(n-2)$$

sind, so kann man auch schreiben:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{y_1^2}\left[y_1 \frac{\frac{d}{dx}\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \dots 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \dots 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}} - (2n-3) y_2\right].$$

Da ferner:

$$\frac{d}{dx}(y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}) = \Sigma \lambda_k y_1^{\lambda_1} \dots y_k^{\lambda_k - 1} y_{k+1}^{\lambda_{k+1}+1} \dots y_{n-1}^{\lambda_n - 1} =$$

$$= y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \Sigma \lambda_k \frac{y_{k-1}}{y_k},$$

so kann man endlich setzen:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1}{y_1^2}\left[y_1 \frac{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \dots 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}} \left(\lambda_1 \frac{y_2}{y_1} + \dots + \lambda_{n-1} \frac{y_n}{y_{n-1}}\right)}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \dots 1^{\lambda_1}] y_1^{\lambda_1} \dots y_{n-1}^{\lambda_{n-1}}} - (2n-3) y_n\right]. \quad \text{I)}$$

III.

Interessant gestaltet sich die Anwendung der erhaltenen Resultate auf die Exponentialfunction. Gesetzt den Fall, wir hätten die Exponentialfunction eingeführt auf Grund der Functionalgleichung:

$$f(x+u) = f(x) f(u) \tag{5}$$

und als Functionalelement die Reihe

$$y = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

erhalten; dann folgt für die Umkehrfunction, die Logarithmus naturalis genannt wird,

$$x = \varphi(y) \qquad u = \varphi(v),$$

daher unter Rücksichtnahme auf 5)

$$f(\varphi(y)+\varphi(v)) = y.v,$$

somit endlich

$$\varphi(y)+\varphi(v) = \varphi(y.v)$$

als Functionalgleichung dieser Function.

Um das nach den Potenzen von $(y-1)$ fortschreitende Element des Logarithmus naturalis zu erhalten, bedenke man, dass

$$y_k(0) = 1$$

ist, daher die Gleichung I) des vorigen Abschnittes ergibt:

$$\frac{x_n(0)}{x_{n-1}(0)} = \frac{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}](\lambda_1+\dots+\lambda_{n-1})}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}]} - (2n-3) =$$

$$= \frac{(n-2)\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}]}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}]} - (2n-3) =$$

$$= (n-2)-(2n-3) = -(n-1).$$

Hieraus folgt dann leicht:

$$x_n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,x_1(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

da $x_1(0) = \dfrac{1}{y_1(0)} = 1$ ist.

Als Element des Logarithmus naturalis erhält man somit die in der Umgebung der Stelle $+1$ convergirende Reihe

$$x = (y-1) - \frac{(y-1)^2}{2} + \frac{(y-1)^3}{3} - \dots .$$

Die soeben abgeleiteten Resultate liefern den Satz:

„Sucht man die sämmtlichen ganzzahligen positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\Sigma\lambda_k = (n-1), \qquad \Sigma k\lambda_k = 2(n-1),$$

so ist immer

$$\Sigma[n^{\lambda_n}\dots 1^{\lambda_1}] = (-1)^{n-1}(n-1)!\text{"}$$

Einen weiteren zahlentheoretischen Satz bekommt man, wenn man den Logarithmus naturalis zum Ausgangspunkte nimmt. Es ist nämlich

$$x_k(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!;$$

somit:

$$\frac{x_{k+1}(0)}{x_k(0)} = -k.$$

Die Formel I) des vorigen Abschnittes nimmt daher, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$ ist, die Form an:

$$\frac{y_n(0)}{y_{n-1}(0)} = \frac{-\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \ldots 1^{\lambda_1}](\lambda_1 + 2\lambda_2 \ldots + (n-1)\lambda_{n-1})}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \ldots 1^{\lambda_1}]} + (2n-3) =$$

$$= \frac{-2(n-2)\,\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \ldots 1^{\lambda_1}]}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}} \ldots 1^{\lambda_1}]} + (2n-3) =$$

$$= -2(n-2) + (2n-3) = 1;$$

woraus dann leicht folgt, dass $y_n(0) = 1$ sein muss. Da jedoch

$$y_n(0) = \Sigma[n^{\lambda_n} \ldots 1^{\lambda_1}]\, x_1^{\lambda_1}(0) \ldots x_n^{\lambda_n}(0) =$$

$$= \Sigma(-1)^{\Sigma(k-1)\lambda_k}[n^{\lambda_n} \ldots 1^{\lambda_1}](2!)^{\lambda_2} \ldots (\overline{n-1}\,!)^{\lambda_n} =$$

$$= (-1)^{n-1}\,\Sigma[n^{\lambda_n} \ldots 1^{\lambda_1}](2!)^{\lambda_2} \ldots (\overline{n-1}\,!)^{\lambda_n}$$

ist, so folgt durch Vergleichung der beiden Resultate der Satz:

„Sucht man die sämmtlichen ganzzahligen und positiven Lösungen der beiden Gleichungen

$$\Sigma\lambda_k = (n-1) \qquad \Sigma k\lambda_k = 2(n-1),$$

so gilt die Relation:

$$\Sigma[n^{\lambda_n} \ldots 1^{\lambda_1}](2!)^{\lambda_2} \ldots (\overline{n-1}!)^{\lambda_n} = (-1)^{n-1}\text{“}.$$

IV.

Die im vorigen Abschnitte vorangehenden Betrachtungen lassen sich leicht verallgemeinern, indem man eine Function bildet, für die der Quotient

$$\frac{y_n(0)}{y_{n-1}(0)} = a - b\,(n-1)$$

ist, wobei noch festgesetzt werden soll, dass $y_1(0) = 1$ sei.

Das Element dieser Function, die mit $W(a, b, x)$ bezeichnet werden soll, hat dann die Form:

$$y = x + \frac{(a-b)}{2!}x^2 + \frac{(a-b)(a-2b)}{3!}x^3 + \dots \qquad A)$$

und convergirt offenbar, so lange

$$|x| < \frac{1}{|b|}$$

ist.

Wäre $b = \mu c$, und setzt man in der Reihe $A)$ $x = \frac{z}{\mu}$, so kommt:

$$y = \frac{1}{\mu}\left[z + \frac{\left(\frac{a}{\mu} - c\right)}{2!} z_2 + \frac{\left(\frac{a}{\mu} - c\right)\left(\frac{a}{\mu} - 2c\right)}{3!} z^3 + \dots\right],$$

woraus dann folgt:

„Es ist identisch

$$W\left(a, \mu c, \frac{z}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu} W\left(\frac{a}{\mu}, c, z\right) \text{“}.$$

Durch Derivation der Reihe $A)$ erhält man ferner

$$y' = 1 + (a-b)\left[x + \frac{(\overline{a-b}-b)}{2!}x^2 + \frac{(\overline{a-b}-b)(\overline{a-b}-2b)}{3!}x^2 + \dots\right],$$

d. h.:

„Die Function $W(a, b, x)$ hat als Derivirte die Function $1+(a-b)\,W(a-b, b, x)$“.

Eine n-fache Derivation liefert dann:

$$W^{(n)}(a, b, x) = \prod_{k=1}^{n-1}(a-kb)\,[1 + (a-nb)\,W(a-nb, b, x)].$$

Es ist somit

$$W^{(n)}(a, b, 0) = \prod_{k=1}^{n-1}(a-kb),$$

was der Kürze halber mit Π_{n-1} bezeichnet werden soll.

Für $\frac{x_n(0)}{x_{n-1}(0)}$ erhält man nun:

$$\frac{x_n(0)}{x_{n-1}(0)} =$$

$$= \frac{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}]\Pi_1^{\lambda_2}\dots\Pi_{n-2}^{\lambda_{n-1}}\{(a-b)\lambda_1+(a-2b)\lambda_2\dots+(a-\overline{n-1}b)\lambda_{n-1}\}}{\Sigma[(n-1)^{\lambda_{n-1}}\dots 1^{\lambda_1}]\Pi_1^{\lambda_2}\dots\Pi_{n-2}^{\lambda_{n-1}}} -$$

$$-(a-b)(2n-3) = a(n-2)-2b(n-2)-(a-b)(2n-3) =$$

$$= b-a(n-1).$$

Das so erhaltene Resultat liefert den Satz:

„Die zur Function $y = W(a, b, x)$ umgekehrte Function hat die Form $x = W(b, a, y)$."

Durch Specialisirung der Werthe a, b erhält man bekannte Functionen, und zwar ist:

$$W(1, 0, x) = e^x-1,$$

deren Umkehrfunction

$$W(0, 1, x) = l(1+x),$$

und endlich

$$W(a, 1, x) = \frac{(1+x)^a-1}{a}.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass die allgemeine Function $W(a, b, x)$ immer auf eine der drei angeführten Functionen zurückgeführt werden kann, wobei zugleich zu jeder Function ihre Umkehrfunction abgeleitet werden soll.

1. $$y = W(a, 0, x) = \frac{1}{a} W(1, 0, ax) = \frac{e^{ax}-1}{a};$$

Die Umkehrfunction ist daher

$$x = W(0, a, y) = \frac{1}{a} W(0, 1, ay) = \frac{l(1+ay)}{a}.$$

Hätte man in 1.

$$e^{ax} = z$$

gesetzt, so wäre die Umkehrfunction

$$W\left(0, a, \frac{z-1}{a}\right) = \frac{1}{a} W(0, 1, z-1) = \frac{lz}{a},$$

wie zu erwarten war.

2. $y = W(a, \pm b, x) = \pm \frac{1}{b} W\left(\pm \frac{a}{b}, 1, \pm bx\right) = \frac{(1 \pm bx)^{\pm \frac{a}{b}} - 1}{a};$

die Umkehrfunction hat daher die Form:

$$x = W(\pm b, a, y) = \frac{(1+ax)^{\pm \frac{b}{a}} - 1}{\pm b}.$$

V.

Gegeben sei die ganze rationale Function n^{ten} Grades

$$y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n;$$

nach dem in I. Entwickelten ist

$$x = \sum_1^\infty \frac{x_n(0)}{n!} (y - a_0)^n$$

das Element der Umkehrfunction, wobei für die $y_k(0)$ in $x_n(0)$ $k!a_k$ zu setzen ist.

Setzt man nun $y = 0$, so ist

$$x' = \sum_1^\infty (-1)^n \frac{x_n(0)}{n!} a_0^n$$

eine Wurzel der Gleichung

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

und zwar die dem Werthe a_0 am nächsten gelegene.

Begnügt man sich mit dem ersten Gliede der Entwickelung, so erhält man

$$x' = -\frac{a_0}{a_1},$$

die bekannte Formel von **Newton**, zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer Gleichung.

Für den Fall, als die gegebene Gleichung eine trinomische wird, nimmt der Ausdruck für die Wurzel eine besonders einfache Form an.

Es sei

$$y = q + px + x^n,$$

so ist $y_1(0) = p$, $y_n(0) = n!$, wesshalb in $x_k(0)$ alle jene Glieder $y_k(0)$ entfallen, für die $k = 2, 3, \ldots (n-1), (n+1) \ldots$ ist.

Stellt man somit die beiden Gleichungen β) des I. Abschnittes auf, so nehmen sie für $x_k(0)$ die Form an

$$\lambda_1 + \lambda_n = k-1$$
$$\lambda_1 + n\lambda_n = 2(k-1),$$

woraus leicht folgt, dass für $k < n$, $k = 1$ ausgenommen, keine Lösung möglich ist, wogegen für $k = n$ die einzige Lösung

$$\lambda_1 = n-2, \qquad \lambda_n = 2.$$

sich ergibt; die nächste Lösung ergibt sich dann erst für $k = 2n-1$, und zwar ist

$$\lambda_1 = 2(n-2) \qquad \lambda_n = 2.$$

Im Allgemeinen wird man eine Lösung erhalten für $k = r(n-2)+1$, in welchem Falle dann $\lambda_1 = r(n-2)$ $\lambda_n = r$ ist.

Die Wurzel der trinomischen Gleichung

$$x^n + px + q = 0$$

hat daher die Form:

$$x' = \sum_0^\infty (-1)^{r(n-1)+1} \frac{[1^{r(n-2)} n^r]}{(r(n-1)+1)!} \cdot \frac{(n!)^r q^{r(n-1)+1}}{p^{rn+1}}.$$

Für den speciellen Fall $n = 2$ folgt dann:

$$x' = \sum_0^\infty (-1)^{r+1} \frac{[2^r]}{(r+1)!} \frac{2^r . q^{r+1}}{p^{2r+1}},$$

oder mit Berücksichtigung des Umstandes, dass

$$[2^r] = -(2r-1)[2^{r-1}] = (-1)^r\, 3.5\ldots(2r-1)$$

ist, weiter

$$x' = \sum_0^\infty (-1)^{2r+1} \frac{3.5.7\ldots(2r-1)}{(r+1)!} \frac{2^r q^{r+1}}{p^{2r+1}}.$$

Da aber

$$(-1)^r \frac{1.3\ldots(2r-1)}{(r+1)!} = 2^{r+1} \binom{\frac{1}{2}}{r+1}$$

ist, kann man auch schreiben:

$$x' = \frac{p}{2} \sum_0^\infty (-1)^{r+1} \binom{\frac{1}{2}}{r+1} 4^{r+1} \frac{q^{r+1}}{p^{2(r+1)}}$$

$$= -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\left[1 + \sum_0^\infty (-1)^{r-1} \binom{\frac{1}{2}}{r+1} 4^{r+1} \frac{q^{r+1}}{p^{2(r+1)}}\right] =$$

$$= -\frac{p}{2} + \frac{p}{2}\sqrt{1 - \frac{4q}{p^2}},$$

wie zu erwarten war.

Über die Schwingungen periodisch erwärmter Luft

von

Max Margules.

Die Berechnung der durch periodische Temperaturänderung entstehenden Druckschwankungen der Luft hat einiges Interesse im Zusammenhange mit einem Problem der Meteorologie, welches, wie alle dynamischen Aufgaben aus diesem Gebiete, recht umfangreiche Rechnungen erfordert.

Die von unperiodischen Einflüssen befreite tägliche Schwankung des Barometers kann man beinahe ausreichend durch die Übereinanderlagerung zweier Wellenzüge darstellen, deren einer den ganzen Tag als Periode hat, der andere den halben. Die ganztägige Welle ist zweifellos eine Wirkung der Temperaturschwankung; sie tritt an heiteren Tagen viel stärker auf als an trüben, sie ist sehr gering auf dem Meere und zeigt auf dem Lande bedeutende örtlich bedingte Ungleichheit. Die halbtägige Welle dagegen ist von einer an meteorologischen Erscheinungen ungewohnten Regelmässigkeit, sie ist in Orten gleicher Breite von nahezu gleichem Betrage und gleicher Phase in Beziehung auf die Ortszeit. Will man auch diese Welle als Folge der Temperaturänderungen ansehen, so scheint der Zusammenhang dunkel.

Der mittlere tägliche Gang der Temperatur, für irgend einen Ort durch eine Curve dargestellt, lässt sich wie jede derartige Curve in eine Reihe von Wellenzügen auflösen, ganztägige, halbtägige, achtstündige, sechsstündige Wellen. Entsteht die ganztägige Druckwelle durch die entsprechende Temperaturwelle, die halbtägige Druckschwankung durch die halbtägige Temperaturschwankung? Warum ist der Betrag der 12stündigen Druckoscillation so bedeutend im Vergleiche mit der 24stündigen,

während es sich bei der Temperatur umgekehrt verhält, woher die Regelmässigkeit der einen, die örtliche Verschiedenheit der anderen?

Diese Fragen sind wiederholt gestellt worden. In einer vor Kurzem erschienenen Abhandlung[1] hat Hann die umfassendste und eingehendste Beschreibung der täglichen Barometeroscillation gegeben, mit Benützung reichen Beobachtungsmateriales aus allen Ländern und Oceanen zu dem Zwecke, „eine Grundlage zu schaffen für eine spätere mathematisch-physikalische Theorie".

Um dies zu erreichen, müsste man vorerst die Erscheinung unter sehr vereinfachenden Annahmen analytisch behandeln. Ich glaubte, dass einige Rechnungen über die Druckänderungen periodisch erwärmter Luft dem Verständnisse der täglichen Barometeroscillation dienen könnten. Im Verlaufe der Arbeit zeigte sich, dass man die Rechnung, will man sie einigermassen brauchbar machen, nicht auf die einfachsten Fälle beschränken darf. Dadurch ist die Untersuchung zu etwas grösserem Umfange, als mir erwünscht war, angewachsen.

Den ausführlichen Rechnungen soll die Übersicht einiger Resultate vorangehen. T_0 und p_0 bezeichnen die absolute Temperatur und den Druck der Luft im Ruhestande, $T_0(1+\tau)$ und $p_0(1+\varepsilon)$ Temperatur und Druck der bewegten Luft. Wenn τ als periodische Function der Zeit t und des Ortes gegeben ist, wird auch ε als solche erscheinen.

In einer ebenen Luftschicht, auf welche keine Kräfte wirken, soll eine Temperaturwelle mit constanter Amplitude nach der Richtung $-x$ fortschreiten

$$\tau = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right).$$

Sie wird eine Druckwelle erzeugen

$$\varepsilon = A \frac{L^2}{L^2 - c^2\Theta^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right)$$

[1] Untersuchungen über die tägliche Oscillation der Barometers. Denkschriften d. k. Akad., Bd. 55, 1889. Die früheren Untersuchungen findet man in dieser Abhandlung angeführt.

(c bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer freien Schwingung, wenn sie streng isotherm erfolgt; in Luft von der Temperatur 273° ist $c = 280\ m$/sec.).

Nimmt man die Wellenlänge gleich dem Umfange des Äquators, für die Schwingungsdauer einen Tag und p_0 in Barometermass ausgedrückt 760 *mm*, so bewirkt 1° Temperaturschwankung 4·4 *mm* Druckschwankung.

Beide Schwingungen haben gleiche Phasen, wenn ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($V = L/\Theta$) grösser ist, entgegengesetzte Phasen, wenn sie kleiner ist als c. Für $V = c$ wird ε unendlich gross, wie es in einem reibungslosen Mittel eintreten muss, wenn die erzwungenen Schwingungen gleiche Periode haben wie die freien.

Anderes Beispiel: In einer ebenen Luftschicht, unter dem Einflusse der constanten Schwerkraft, schreitet eine Temperaturwelle gleich der vorher bezeichneten fort. Die Luft bewegt sich horizontal in der Richtung des Fortschreitens der Wellen und überdies vertical. Die Druckwelle am Boden ist durch eine ähnliche Gleichung wie vordem gegeben, nur ist im Zähler $c^2\Theta^2$ statt L^2 zu setzen. Für Äquator, Tag und 760 *mm* gibt eine Temperaturschwankung von 1° eine Druckschwankung von 1·3 *mm*.

Wird aber die Temperaturamplitude nicht nach der ganzen Höhe gleich gross, sondern mit der Höhe abnehmend gesetzt, so dass sie für je 1000 *m* Erhebung auf den halben Betrag sinkt, so gibt eine Temperaturschwankung von 10° am Boden daselbst nur eine Druckschwankung von 2·4 *mm*.

Mit diesem Resultate könnte man in Betreff der ganztägigen Welle für continentale tropische Gebiete zufrieden sein. Die Übereinstimmung ist jedoch nur zufällig. Die 12stündige Druckwelle auf dem Meere bliebe ganz unverständlich. Auch auf dem Lande sollte man erwarten (da ε ungeändert bleibt, wenn man $\frac{1}{2}L$ und $\frac{1}{2}\Theta$ an Stelle von L und Θ setzt), dass die Druckamplituden in der ganztägigen und halbtägigen Welle das gleiche Verhältniss haben, wie die bezüglichen Temperaturamplituden.

Die Rechnung würde für Cylinder von grossem Durchmesser ebenso gelten wie für Ebenen; unter gewissen Einschränkungen auch für ringförmig begrenzte Lufträume. Für die Atmosphäre könnte sie nur Anwendung finden, wenn die Luft durch verticale

Scheidewände den Parallelkreisen entlang in eine Anzahl von Zonen getrennt wäre. Diejenigen in der Nähe des 50. Breitegrades hätten enorme Druckschwankungen, und ebendort hätten zwei benachbarte Zonen entgegengesetzte Phasen; die Amplituden würden gegen Pol und Äquator abnehmen.

Aus den grossen Druckdifferenzen, welche man so für verschiedene Zonen erhält, ergibt sich die Nothwendigkeit, die Luft auf der ganzen Kugel ohne Scheidewände der Rechnung zu unterziehen. Ich übergehe hier die Formeln für die ruhende Kugel, um über den Theil der Rechnung zu berichten, welcher ein für das Verständniss der halbtägigen Druckwelle nützliches Resultat zu bieten scheint. Vorerst sollen einige schon von Hann citirte Sätze aus einer Abhandlung Sir W. Thomson's angeführt werden.[1]

Nachdem er das Missverhältniss zwischen ganz- und halbtägiger Temperaturschwankung einerseits, Druckschwankung anderseits betont hat, führt Thomson fort: „Man muss die Luft als Ganzes betrachten und ihre Schwingungen mit Hilfe eben jener Formeln untersuchen, welche Laplace in der Mécanique Céleste für den Ocean entwickelt hat und welche, wie er zeigt, auch auf die Atmosphäre anwendbar sind. Wenn man bei Berechnung der fluthérzeugenden Kraft den Temperatureinfluss statt der Anziehung einführt und die dem ganztägigen und halbtägigen Gliede der Temperaturcurve entsprechenden Oscillationen verfolgt, wird man vermuthlich finden, dass im ersten Falle die Periode der freien Schwingungen viel weniger nahe bei 24 Stunden liegt, als im anderen Falle bei 12 Stunden, dass darum mit verhältnissmässig kleinem Betrage der fluthérzeugenden Kraft die Schwankung im halbtägigen Gliede grösser wird als in dem ganztägigen".

Diese Voraussagung hat sich vollständig bewährt. Wenn man die Rechnung für die Atmosphäre als rotirende Kugelschale führt, in welcher sich Temperaturwellen von Meridian zu Meridian fortpflanzen, nach der Gleichung

$$\tau = C \sin \omega \sin (nt + \lambda)$$

[1] On the thermo-dynamic acceleration of the earth's rotation Proc. R. S. Edinburgh, Vol. 11, 1882.

(ω Polabstand, λ geogr. Länge, n Rotationsgeschwindigkeit der Erde), so findet man für $T_0 = 273°$ die Druckwelle:

$$\varepsilon = C \sin (nt+\lambda) \,[1 \cdot 146 \sin \omega - 0 \cdot 423 \sin^3 \omega - 0 \cdot 370 \sin^5 \omega$$
$$- 0 \cdot 106 \sin^7 \omega - 0 \cdot 018 \sin^9 \omega - 0 \cdot 002 \sin^{11} \omega - \ldots].$$

Wenn dagegen an jedem Orte die Welle sich täglich zweimal wiederholt und

$$\tau = C \sin^2 \omega \sin (2nt+2\lambda)$$

angenommen wird, so folgt

$$\varepsilon = -C \sin (2nt+2\lambda) \,[37 \cdot 99 \sin^4 \omega + 23 \cdot 06 \sin^6 \omega$$
$$+ 5 \cdot 75 \sin^8 \omega + 0 \cdot 81 \sin^{10} \omega + 0 \cdot 07 \sin^{12} \omega + \ldots].$$

Nur der leichteren Rechnung wegen ist das Gesetz, nach welchem die Temperaturamplituden vom Äquator zum Pol abnehmen, in beiden Fällen ungleich angenommen; dies ist von geringem Einflusse auf das allgemeine Resultat, wonach bei gleichen Temperaturschwankungen die Druckschwankungen in der täglich doppelten Welle viel grösser ausfallen, als in der einfachen Welle. Die Coëfficienten der ersten Sinusreihe ändern sich nur sehr langsam mit T_0 (oder mit n, wenn man mit Thomson die Periode als Variable ansieht). Anders in der halbtägigen Welle; hier springt der Factor von $\sin^4 \omega$ in der Nähe des Werthes $T_0 = 268°$ von $-\infty$ zu $+\infty$ über, ganz ähnlich wie in der vorhin betrachteten ebenen Welle, wenn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der erzwungenen Schwingung derjenigen freier Schwingungen gleich gemacht wird. Nimmt man die Temperatur der Kugelschale nahe 268° an, so genügen geringe halbtägige Temperaturwellen von kaum merklicher Amplitude, um in reibungsloser Luft grosse Druckwellen zu erzeugen.

Soweit die Rechnung. Ihre Anwendung auf die tägliche Barometerschwankung ist nur in einem Punkte klar. Die halbtägige Druckwelle kann als Folge einer ebensolchen Temperaturwelle von kleiner Amplitude angesehen werden.

Es erklärt sich wohl die relative Grösse, nicht aber die Gleichmässigkeit der halbtägigen Druckschwankung über dem Lande und dem Meere. Diese Gleichheit hat Hann veranlasst,

den Ursprung der Erscheinung in der Wärmeabsorption der höheren Luftschichten zu suchen. Die unteren Schichten haben aber auch ein halbtägiges Glied der Temperaturschwankung, und zwar ein örtlich und mit dem Bewölkungszustande veränderliches. Es fragt sich, ob die davon herrührenden Druckschwankungen neben den regelmässigen so klein sind, dass sie sich in den Mittelwerthen nicht auffällig bemerkbar machen.

Die Vernachlässigung der Reibung und der verticalen Luftbewegung in unserer letzten Rechnung, die Annahme einer in der ganzen Luftmasse constanten Mitteltemperatur und einer in gleichen Breiten gleich grossen Schwankung lassen nur vage Anwendungen zu. Eine vollständigere Rechnung mit Rücksicht auf die Vertheilung von Land und Wasser wäre ebenso schwer zu führen, wie die Berechnung der Ebbe und Fluth für einen unregelmässig gestalteten oder selbst für einen von Meridianen begrenzten Ocean.

1. Bewegung der Luft in verticalen Ebenen.

u horizontale Geschwindigkeit (nach der x-Axe), w verticale (nach der z-Axe, aufwärts), μ Dichte, p Druck, T absolute Temperatur, t Zeit, g Beschleunigung der Schwerkraft, R eine Constante.

Wir denken uns die Erde als unendliche Ebene, über welcher in allen ostwestlichen verticalen Ebenen die Bewegung der Luft in gleicher Weise stattfindet. Bei geringen Geschwindigkeiten, welche in den Bewegungsgleichungen die Glieder zweiten Grades in u, w zu vernächlässigen gestatten, sind diese Gleichungen, ferner die Continuitäts- und Zustandsgleichung der Luft:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, & \frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z} - g \\ \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial(\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial(\mu w)}{\partial z} = 0 & p = R\mu T. \end{array}\right\} \quad 1)$$

Ist die Luft in Ruhe, so haben p, μ, T die Werthe p_0, μ_0, T_0 welche nur Functionen der Höhe sind.

$$\frac{1}{p_0}\frac{dp_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0}, \quad \frac{1}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{dz} = -\frac{g}{RT_0} - \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}, \quad p_0 = R\mu_0 T_0 \quad 2)$$

Die Bewegung soll durch kleine Temperaturschwankungen entstehen. Solche werden in der Regel auch nur geringe Schwankungen der Dichte und des Druckes erzeugen. Schreibt man

$$p = p_0(1+\varepsilon), \quad \mu = \mu_0(1+\sigma), \quad T = T_0(1+\tau),$$

so sind ε, σ, τ kleine Zahlen, deren Producte und Quadrate wir vernachlässigen.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = -RT_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + g\tau \\ &\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} - w\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right) = 0, \qquad \varepsilon = \sigma + \tau. \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Aus diesen Gleichungen, welche an die Stelle von 1) treten, eliminirt man u, w, σ dadurch, dass man die erste nach x, die zweite nach z, die dritte nach t differentiirt.

Man erhält so die Differentialgleichung, in welcher τ als eine gegebene, ε als die zu bestimmende Function von x, z, t anzusehen ist:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} \\ &\qquad = \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \tau}{\partial z} - \frac{g}{RT_0}\left(\frac{g}{RT_0} + \frac{1}{T_0}\frac{dT_0}{dz}\right)\tau - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad 4)$$

Bevor wir die Gleichung für Bewegungen nach zwei Dimensionen behandeln, wollen wir den einfachsten Fall linearer Schwingungen betrachten.

2. Lineare Schwingungen. Wenn $g = 0$, τ und ε nur von t und x abhängen, geht 4) über in

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - RT_0\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \quad 4a)$$

und diese, wenn beständig $\tau = 0$, in die Newton'sche Gleichung der Schallschwingungen der Luft, welche $c = \sqrt{RT_0}$ als Fortpflanzungsgeschwindigkeit gibt.

Will man nicht die Temperaturschwankung, sondern die Wärmezufuhr als bekannt ansehen, so hat man — wobei die Änderung der kinetischen Energie als Grösse zweiten Grades in u wegzulassen ist — die Relation einzuführen

$$dQ = C_v dT + p d\left(\frac{1}{\mu}\right) = C_v T_0 d\tau - RT_0 d\sigma = C_p T_0 d\tau - RT_0 d\varepsilon$$

dQ die während dt der Luftmasse 1 zugeführte Wärme, C_v specifische Wärme der Luft bei constantem Volumen, C_p ähnlich bei constantem Drucke. $C_p = C_v + R$.

$$\tau = \frac{Q}{C_v T_0} + \frac{R}{C_v}\sigma = \frac{Q}{C_p T_0} + \frac{R}{C_p}\varepsilon.$$

Durch Verbindung der letzten Gleichung mit 4a) erhält man

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - RT_0 \frac{C_p}{C_v}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{C_v T_0}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}, \qquad 4b)$$

welche für $Q = 0$ in die Laplace'sche Gleichung übergeht. In dieser sind die durch adiabatische Verdichtung und Verdünnung bewirkten Temperaturschwankungen der Luft bei raschen Schallschwingungen berücksichtigt, und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist danach $c' = \sqrt{RT_0 C_p / C_v}$.

Für unsere Zwecke wird es bequemer sein, die Druckänderungen als Folge der Temperaturschwankungen, nicht der wechselnden Wärmezufuhr, zu betrachten. Wir kehren also zur Gleichung 4a) zurück.

3. Eine fortschreitende Temperaturwelle

$$\tau = A . \sin(nt + mx) = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right) \qquad 5)$$

bewirkt eine in gleicher Richtung fortschreitende Druckwelle

$$\varepsilon = B . \sin(nt + mx), \qquad B = \frac{L^2}{L^2 - c^2\Theta^2} A. \qquad 6)$$

$L/\Theta = V$ ist die Geschwindigkeit des Fortschreitens beider Wellen. Je nachdem V grösser oder kleiner ist als c, sind die Phasen der Wellen übereinstimmend oder entgegengesetzt. $V = c$ führt zu unendlich grossen B, ein Resultat, zu welchem man jedesmal kommen muss, wenn in einem reibungslosen Mittel die Periode der erzwungenen Schwingungen mit jener der freien übereinstimmt.

Für Luft ist $R = 10333.9 \cdot 806/273.1 \cdot 293 = 287 \cdot 0$. Als Einheiten sind hier und im Folgenden Meter, Kilogramm, Secunde

und Grad des hunderttheiligen Thermometers, bei Druckangaben gelegentlich Barometermass angenommen. Für $T_0 = 273°$ ist $c = 279 \cdot 9$.

$L = 4.10^7$ (Umfang des Äquators), $\Theta = 24.60.60$ (ein Tag) und $T_0 = 273°$ gibt eine Druckwelle, deren Maximum mit dem Maximum der Temperatur zusammenfällt und $B = 1 \cdot 576\, A$. Eine Temperaturschwankung von 1° erzeugt eine Druckschwankung $p_0 . 1 \cdot 576/273$ oder von $4 \cdot 4\, mm$ Quecksilberhöhe, wenn p_0 in diesem Masse 760 ist.

[Wenn man in einer Schicht von merklicher Höhe, ohne Vernachlässigung der Schwerkraft, rein horizontale Schwingungen erhalten wollte, wäre A, wie man aus den Gleichungen 3) ableitet, als Function der Höhe einzuführen, welche der Bedingung genügt:

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{dz} = \frac{g}{c^2}\frac{L^2 - c^2\Theta^2}{L^2}.]$$

[Für isotherme Schwingungen in einer verticalen Luftsäule ($\tau = 0$ und $\partial\varepsilon/\partial x = 0$) geht 4) über in

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} - \frac{g}{RT_0}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{1}{RT_0}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = 0.$$

Diese Gleichung oder die entsprechende Gleichung in w ist von Lord Rayleigh vor Kurzem (Phil. Mag. 1890, Febr.) ausführlich discutirt worden.]

4. Schwingungen der Luft bei Berücksichtigung der Schwerkraft, wenn eine Temperaturwelle horizontal fortschreitet. Für constantes T_0 und $\tau = A \sin(mx + nt)$ gesetzt, geht die Differentialgleichung 4) über in

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \alpha\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = -\frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \alpha^2 \tau, \qquad 4c)$$

$$[\alpha = g/RT_0].$$

Die Druckwelle ist zu suchen in der Form

$$\varepsilon = F(z)\sin(mx + nt).$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \alpha\frac{dF}{dz} + hF = \left(\frac{\alpha}{g}n^2 - \alpha^2\right)A, \qquad \left[h = \frac{\alpha}{g}n^2 - m^2\right]$$

$$F(z) = B + K_1 e^{k_1 z} + K_2 e^{k_2 z}, \qquad B = \frac{A}{h}\left(\frac{\alpha}{g}n^2 - \alpha^2\right)$$

$$k_1 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}, \qquad k_2 = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten K_1 und K_2, deren Factoren in ε freie Schwingungen darstellen, führen wir ein, dass $w = 0$ für $z = 0$ und für ein sehr grosses $z = Z$, welches einer fictiven oberen Begrenzungsebene der Atmosphäre zugehört. Aus der zweiten der Gleichungen 3) erhält man

$$w = \frac{g}{\alpha n}(K_1 k_1 e^{k_1 z} + K_2 k_2 e^{k_2 z} - \alpha A)\cos(mx + nt).$$

Die Grenzbedingungen geben danach:

$$K_1 k_1 + K_2 k_2 = \alpha A, \qquad K_1 k_1 e^{k_1 Z} + K_2 k_2 e^{k_2 Z} = \alpha A$$

$$K_1 k_1 = \alpha A \frac{e^{k_2 Z} - 1}{e^{k_2 Z} - e^{k_1 Z}}, \qquad K_2 k_2 = \alpha A \frac{1 - e^{k_1 Z}}{e^{k_2 Z} - e^{k_1 Z}}.$$

Ist nun, wie in unserem Beispiel (Wellenlänge Erdumfang, Periode ein Tag), h sehr klein gegen α^2, so ist k_1 sehr klein, k_2 nahe α. Demnach K_2 umso kleiner, je grösser Z. Will man die Schlussformel nur auf im Vergleiche mit Z geringe Höhen anwenden, so bleibt auch $K_2 e^{k_2 z}$ verschwindend klein. Mit dieser Einschränkung setzen wir $K_2 = 0$, $K_1 k_1 = \alpha A$.

$$w = A\frac{g}{n}(e^{k_1 z} - 1)\cos(mx + nt)$$

$$\varepsilon = A\left(\frac{\alpha n^2}{gh} - \frac{\alpha^2}{h} + \frac{\alpha}{k_1}e^{k_1 z}\right)\sin(mx + nt).$$

Unter der Annahme eines kleinen h/α^2 ist

$$k_1 = \alpha\left(\frac{h}{\alpha^2} + \frac{h^2}{\alpha^4}\right), \qquad \frac{\alpha}{k_1} = \frac{\alpha^2}{h} - 1$$

und wenn man von der Reihe der Exponentiellen nur die zwei ersten Glieder beibehält

$$\varepsilon = A\left(\frac{m^2}{h} + \alpha z\right)\sin(mx + nt)$$

$$= A\left(\frac{c^2\Theta^2}{L^2 - c^2\Theta^2} + \alpha z\right)\sin 2\pi\left(\frac{t}{\Theta} + \frac{x}{L}\right).$$

Für $L = 4\cdot 10^7$, $\Theta = 24.60.60$ erhält man

$$\varepsilon = A(0\cdot 576 + 0\cdot 000125\, z)\sin(mx+nt).$$

Die relative Druckschwankung wächst in der Nähe des Bodens sehr langsam mit der Höhe. Am Boden selbst fällt sie beträchtlich kleiner aus (im Verhältnisse $0\cdot 576/1\cdot 576$ kleiner), als in dem Beispiele des dritten Abschnittes, wo rein horizontale Schwingungen stattfanden. Eine tägliche Temperaturschwankung von 1° würde hier eine Druckschwankung von $1\cdot 6$ (*mm*) erzeugen. Die Phasen beider Schwingungen fallen zusammen, wenn $L > c\Theta$.

5. Ähnliche Rechnung für den Fall, dass die Temperaturschwankung mit der Höhe abnimmt.

$$\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial z^2} - \alpha\frac{\partial\varepsilon}{\partial z} - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} = \alpha\frac{\partial\tau}{\partial z} - \frac{\alpha}{g}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2} - \alpha^2\tau. \qquad 4d)$$

Der Annahme $\tau = Ae^{-sz}\sin(mx+nt)$ entspricht

$$\varepsilon = (Be^{-sz} + Ke^{kz}).\sin(mx+nt),$$

$$B(s^2+\alpha s+h) = A\left(\frac{\alpha n^2}{g} - \alpha^2 - \alpha s\right), \qquad k = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - h}.$$

h hat die gleiche Bedeutung wie vorhin. K steht statt des K_1 und K_2 entfällt unter gleicher Einschränkung wie zuvor.

Aus der Bedingung $w = 0$ für $z = 0$ folgt $Kk = Bs + A\alpha$, demnach

$$\varepsilon = \frac{A}{s^2+\alpha s+h}\left\{\left(\frac{\alpha}{g}n^2 - \alpha^2 - \alpha s\right)e^{-sz} + \frac{\alpha}{k}\left(\frac{n^2}{g}s + h\right)e^{kz}\right\}\sin(mx+nt)$$

Ist h/α^2 sehr klein, s von gleicher Grössenordnung wie α oder noch viel grösser, so geht für nicht zu grosse z die letzte Gleichung über in

$$\varepsilon = A\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}\frac{m^2}{h} + \alpha z\right)\sin(mx+nt)$$

$$= A\left(\frac{\alpha}{s+\alpha}\frac{c^2\Theta^2}{L^2 - c^2\Theta^2} + \alpha z\right)\sin 2\pi\left(\frac{x}{L} + \frac{t}{\Theta}\right).$$

Setzt man $s = 0\cdot 000693$, so ist die Temperaturschwankung in 1000 *m* Höhe halb so gross, wie am Boden. Mit diesem Werthe und denselben L, Θ, wie oben, wird

$$\varepsilon = A(0\cdot153.0\cdot576 + 0\cdot000125\,z)\sin(mx+nt).$$

Bei einer Mitteltemperatur von 273° erzeugt eine tägliche Schwankung von 10° am Boden eine Barometerschwankung von 2·45 (*mm*).

6. Umwandlung der Differentialgleichungen für Kugelcoordinaten.

Statt der geradlinigen Coordinaten x, y, z werden die Kugelcoordinaten: r Radius, ω Polabstand, λ östliche Länge von einem bestimmten Meridian eingeführt.

$$x = r\sin\omega\cos\lambda, \qquad y = r\sin\omega\;\sin\lambda, \qquad z = r\cos\omega.$$

Die Bewegungsgleichungen eines Punktes, auf welchen die Kräfte X, Y, Z nach den geradlinigen Axen wirken, $X = d^2x/dt^2, \ldots$ geben über in

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - r\sin^2\omega\,.\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\
\Omega &= r\frac{d^2\omega}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\omega}{dt} - r\cos\omega\sin\omega\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 \\
\Lambda &= r\sin\omega\frac{d^2\lambda}{dt^2} + 2\sin\omega\frac{dr}{dt}\frac{d\lambda}{dt} + 2r\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\lambda}{dt}
\end{aligned}\right\} \qquad 7)$$

wo P, Ω, Λ die Kraftcomponenten nach den Richtungen der Ordinatenelemente $dr, r d\omega, r\sin\omega d\lambda$ bezeichnen. Sind die Geschwindigkeiten so gering, dass man deren Quadrate und Producte vernachlässigen darf, so bleibt auf der rechten Seite jeder Gleichung nur das erste Glied übrig.

$$\frac{dr}{dt} = a, \qquad r\frac{d\omega}{dt} = b, \qquad r\sin\omega\frac{d\lambda}{dt} = c$$

gesetzt, hat man

$$P = \frac{da}{dt}, \qquad \Omega = \frac{db}{dt}, \qquad \Lambda = \frac{dc}{dt}.$$

Die Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit, auf welche nur die constante Schwerkraft in der Richtung des abnehmenden Radius wirkt, sind danach:

$$-g - \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial a}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{r\partial\omega} = \frac{\partial b}{\partial t}, \quad -\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{r\sin\omega\partial\lambda} = \frac{\partial c}{\partial t}. \qquad 8)$$

Diese Gleichungen sind für die Bewegung auf einer ruhenden Kugel anzuwenden. Um die relative Bewegung auf der rotirenden Erdkugel zu untersuchen, formt man die Gleichung 7) noch um, indem man $\nu t+\lambda$ an Stelle von λ setzt; ν Rotationsgeschwindigkeit der Erde. $\nu+d\lambda/dt$ tritt statt des früheren $d\lambda/dt$ in 7) ein. Setzt man wieder c für das neue $r\sin\omega\, d\lambda/dt$, behält die Producte νa, νb, νc bei, lässt dagegen die Glieder mit ν^2, welche nur eine geringfügige Änderung der Schwerkraft bedeuten, fallen, so erhält man die Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit auf einer rotirenden Kugel. Auf der rechten Seite der Gleichung 8) treten der Reihe nach $-2\nu c\sin\omega$, $-2\nu c\cos\omega$ und $+2\nu a\sin\omega + 2\nu b\cos\omega$ hinzu.

Die Continuitätsgleichung hat für die ruhende wie für die rotirende Kugel die gleiche Gestalt

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial(\mu r^2 a)}{r^2\partial r}+\frac{\partial(\mu b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega}+\frac{\partial(\mu c)}{r\sin\omega\,\partial\lambda}=0. \tag{9}$$

Nach Einführung der oben angewandten Bezeichnungen

$$p=p_0(1+\varepsilon),\qquad T=T_0(1+\tau)$$

erhält man für die durch kleine Temperaturschwankungen τ auf der rotirenden Kugel eintretenden Bewegungen der Luft folgende Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
g\tau-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial r}&=\frac{\partial a}{\partial t}-2\nu\sin\omega.c\\
-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{r\,\partial\omega}&=\frac{\partial b}{\partial t}-2\nu\cos\omega.c\\
-RT_0\frac{\partial\varepsilon}{r\sin\omega\,\partial\lambda}&=\frac{\partial c}{\partial t}+2\nu\sin\omega.a+2\nu\cos\omega.b\\
\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial\tau}{\partial t}+\left(\frac{2}{r}-\frac{g}{RT_0}\right)a+\frac{\partial a}{\partial r}+\frac{\partial(b\sin\omega)}{r\sin\omega\,\partial\omega}&+\frac{\partial c}{r\sin\omega\,\partial\lambda}=0
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

$\nu=0$ gesetzt, gibt die entsprechenden Gleichungen für die ruhende Kugel.

7. Luft in einer ruhenden Kugelschale. Einfache und doppelte tägliche Wellen. Ähnlich wie bei der ersten Rechnung für die Ebene im zweiten Abschnitte werden nur horizontale Bewegungen

angenommen. Überdies wird der Radius der Kugel S sehr gross gegen die Höhe der Luftschicht gesetzt. Führt man S statt r, $a = 0$ und $\nu = 0$ in die Gleichung 10) ein, eliminirt b, c aus den drei letzten, so folgt:

$$\frac{S^2}{RT_0}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega}\sin\omega\right) + \frac{\partial^2\varepsilon}{\sin^2\omega\,\partial\lambda^2} = 0. \qquad 11)$$

Die Temperaturwelle $\tau = A \sin\omega \sin(nt+\lambda)$ erzeugt eine Druckwelle $\varepsilon = B \sin\omega \sin(nt+\lambda)$

$$B\left(\frac{n^2 S^2}{RT_0} - 2\right) = A\,\frac{n^2 S^2}{RT_0}.$$

Mit $T_0 = 273°$, $n = 2\pi/(24.60.60)$, S Erdradius und $p_0 = 760\,mm$ gibt eine Temperaturschwankung von 1° am Äquator daselbst eine Druckschwankung von $10\cdot 4\,mm$. B wird ebenso gross wie bei einer ebenen Welle gleicher Periode, wenn man als Wellenlänge im letzteren Falle den Umfang des Parallelkreises in 45° Breite nimmt.

Für $\tau = A.\sin^2\omega \sin(2nt+2\lambda)$ erhält man die Druckwelle $\varepsilon = B\sin^2\omega.\sin(2nt+2\lambda)$

$$B\left(\frac{4n^2 S^2}{RT_0} - 6\right) = A\,\frac{4n^2 S^2}{RT_0}.$$

Mit denselben Constanten gibt 1° Temperaturschwankung am Äquator $6\cdot 2\,mm$ Druckschwankung.

Dass die particulären Integrale, welche wir als Lösung der Differentialgleichung 11) in beiden Fällen gegeben haben, die vollständige Lösung für die ganze Kugelschale enthalten, wird noch bei Gelegenheit der Rechnung für die rotirende Kugel zu erörtern sein.

Nennt man Θ_1 die Schwingungsdauer, für welche bei der einfachen Welle B unendlich gross wird, ähnlich Θ_2 für die doppelte Welle, so ist

$$\Theta_1 = \frac{2\pi}{n_1} = \frac{2\pi S}{\sqrt{2RT_0}}, \qquad \Theta_2 = \frac{2\pi}{2n_2} = \frac{2\pi S}{\sqrt{6RT_0}}.$$

Das sind die Werthe für die Perioden freier Schwingungen einer Kugelschale. Lord Rayleigh (l.c.) untersucht nur solche und

findet, indem er statt $\sqrt{RT_0}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{RT_0 C_p/C_v}$ einführt, für die Atmosphäre auf der ruhenden Erde $\Theta_1 = 23\cdot8$ Stunden, $\Theta_2 = 13\cdot7$ Stunden, also die erste viel näher bei 24, als die zweite bei 12 Stunden. Er bemerkt jedoch, es sei zweifelhaft, ob man für Schwingungen von so langer Dauer die Laplace'sche Fortpflanzungsgeschwindigkeit annehmen dürfe. Immerhin bleibe die relative Grösse der halbtägigen Barometerschwankung ein Räthsel. Das gilt jedoch nur, so lange man die Rechnung auf die ruhende Kugel beschränkt.

8. Rechnung für die rotirende Kugel. Ganztägige Welle. Auch in diesem Falle wird die Rechnung nur für Luft in einer Kugelschale geführt, deren Dicke gering ist im Vergleiche mit dem Radius der Kugel S; ferner unter der Annahme horizontaler Bewegungen, $a = 0$. [Diese Annahme und das Weglassen der ersten der Gleichung 10) sind durchaus nicht tadellos; sie sind dem analogen Verfahren in der Theorie der Gezeiten nachgeahmt.] Der Unterschied zwischen Sterntag und Sonnentag wird nicht berücksichtigt und $\nu = n$ gesetzt.

$$\left.\begin{aligned} -\frac{RT_0}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2n\cos\omega . c, \\ -\frac{RT_0}{S}\frac{\partial\varepsilon}{\sin\omega\,\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2n\cos\omega . b \\ S\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial\tau}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right\} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad 10a)$$

Wenn $\tau = A(\omega).\sin(nt+\lambda)$, so sind ε, b, c in folgender Form zu suchen:

$$\varepsilon = E(\omega).\sin(nt+\lambda),\quad b = \varphi(\omega).\cos(nt+\lambda),\quad c = \psi(\omega).\sin(nt+\lambda),$$

wodurch die letzte der Gleichungen $10a$) übergeht in:

$$nS(E-A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega} + \psi\right\} = 0,$$

während die zwei ersten geben:

$$\varphi = \frac{RT_0}{nS}\cdot\frac{\dfrac{dE}{d\omega} + E.\dfrac{2\cos\omega}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega},\quad \psi = -\frac{RT_0}{nS}\,\frac{\dfrac{dE}{d\omega}2\cos\omega + \dfrac{E}{\sin\omega}}{1-4\cos^2\omega}.$$

Diese Werthe in die vorhergehende Gleichung eingesetzt führen zu einer Beziehung zwischen E und A allein oder zwischen ε und τ. Für die weitere Rechnung ist es bequem, eine Hilfsfunction $\Phi(\omega)$ zu benützen:

$$\Phi(\omega) = \frac{nS}{RT_0} \varphi(\omega).\sin\omega, \qquad (1-4\cos^2\omega)\Phi = \frac{1}{\sin\omega}\cdot\frac{d(E\sin^2\omega)}{d\omega}$$

$$E = \frac{1}{\sin^2\omega}\int\Phi(\omega).\sin\omega.(4\sin^2\omega-3)\,d\omega$$

$$\frac{n^2S^2}{RT_0}(E-A) + \frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d\Phi}{d\omega} - \Phi\frac{2\cos\omega}{\sin\omega} - \frac{E}{\sin\omega}\right\} = 0. \qquad 11)$$

Nimmt man Φ in folgender Form an:

$$\Phi(\omega) = \cos\omega(a_1\sin\omega + a_3\sin^3\omega + a_5\sin^5\omega + \ldots),$$

so folgt:

$$E(\omega) = b_1\sin\omega + b_3\sin^3\omega + b_5\sin^5\omega + \ldots$$

$$b_1 = -a_1, \quad b_3 = \frac{4a_1-3a_3}{5}, \quad b_5 = \frac{4a_3-3a_5}{7}, \ \ldots$$

Wenn man die Temperaturamplitude vom Äquator zum Pol nach dem Cosinus der Breite abnehmen lässt,

$$A(\omega) = C.\sin\omega$$

und zur Abkürzung $k = n^2S^2/RT_0$ setzt, so erhält man zur Bestimmung der Constanten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\left(1+\frac{3}{5}\right)a_3 - \left(k+\frac{4}{5}\right)a_1 - kC &= 0\\
\left(3+\frac{3}{7}\right)a_5 - \left(\frac{3}{5}k+\frac{4}{7}+2\right)a_3 + \frac{4}{5}ka_1 &= 0\\
\left(i-2+\frac{3}{i+2}\right)a_i - \left(\frac{3}{i}k+\frac{4}{i+2}+i-3\right)a_{i-2} + \frac{4}{i}ka_{i-4} &= 0\\
i = 5,\,7,\,9,\,\ldots&
\end{aligned}\right\} \quad 11a)$$

a_1 bleibt scheinbar unbestimmt. Zur Berechnung der anderen schreibt man nach dem Vorgange von Laplace

$$\frac{a_{i-2}}{a_{i-4}} = \frac{4k(i+2)}{3k(i+2)+(i-2)i(i+2)-(i-1)i(i+1)\frac{a_i}{a_{i-2}}}.$$

Indem man nun durch Vertauschung von i mit $i+2$ einen ähnlichen Ausdruck für a_i/a_{i-2} bildet, dann ebenso für a_{i+2}/a_i u.s.f. und diese Werthe in die obige Gleichung einsetzt, erhält man einen unendlichen, sehr rasch convergirenden Kettenbruch.

$$q_3 = \frac{a_5}{a_3} = \frac{4k.9}{N_3 - \frac{Z_5}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7 - \dots}}} \qquad q_5 = \frac{a_7}{a_5} = \frac{4k.11}{N_5 - \frac{Z_7}{N_7 - \frac{Z_9}{N_9 - \dots}}}$$

$$N_1 = 3k.7+3.5.6,\ N_3 = 3k.9+5.7.8,\ N_5 = 3k.11+7.9.10,\dots$$
$$Z_3 = 4k.4.5.6.9 \quad Z_5 = 4k.6.7.8.11,\dots$$

Setzt man nun in die zweite der Gleichungen 11*a*) $a_5 = q_3 a_3$ ein, so ist auch a_3/a_1 bestimmt, und der Quotient hat den gleichen Werth, als wäre er aus dem Kettenbruche

$$q_1 = \frac{a_3}{a_1} = \frac{4k.7}{N_1 - \frac{Z_3}{N_3 - \frac{Z_5}{N_5 - \dots}}}$$

gerechnet worden. Durch die erste der Gleichungen 11 *a*) bekommt man auch den Werth von a_1, folglich $a_3 = q_1 a_1$, $a_5 = q_1 q_3 a_1$ u. s. f. Nimmt man bei Berechnung von q_1 eine genügende Anzahl von Brüchen (bis N_{19} etwa), so hat man damit auch den grössten Theil der numerischen Rechnung für q_3, q_5, q_7 geleistet.

Diese merkwürdige Art der Constantenbestimmung hat Laplace in der Theorie der Ebbe und Fluth angewendet. Ihre wahre Bedeutung erkannte erst wieder Sir W. Thomson, welcher sie gegen Airy vertheidigt hat. (On an alleged error in Laplace's theory of tides, Phil. Mag. (4), Bd. 50, 1875, S. 227.) Ohne den Commentar wäre die Rechnung nicht leicht zu verstehen. In unserem Falle stellt sich die Sache ganz ähnlich dar. Die Differentialgleichung 11) ist, wenn man Φ durch E ersetzt, von der zweiten Ordnung und soll ein Integral mit zwei willkürlichen Constanten haben. Diese könnte man bestimmen, wenn an zwei beliebigen Parallelkreisen Bedingungen zu erfüllen sind, z. B. $\varepsilon = 0$ oder $b = 0$. Eine Constante entfällt, wenn man den einen

Parallelkreis mit dem Pol zusammenfallen lässt, die andere wird hier so bestimmt, wie wenn der zweite Kreis der Äquator selbst wäre. Am Äquator muss nämlich der Symmetrie wegen $b = 0$ sein. Seine Ebene ist wie eine feste Scheidewand anzusehen.

(Die Rechnung hat zur Voraussetzung, dass a_i/a_{i-2} mit wachsendem i gegen Null convergirt. Nimmt man für a_1 nicht den Werth, welcher sich aus der Kettenbruchrechnung ergibt, sondern einen beliebigen andern und rechnet damit $a_3, a_5, \ldots$ aus 11 a), so erhält man eine Reihe, welche für $\sin\omega = 1$ divergirt.)

Ich habe die Constanten mit zwei Werthen von k berechnet. $k = 2\cdot5$, d. i. bei $n = 2\pi/(24.60.60)$, $S = 4.10^7/(2\pi)$ und $R = 287\cdot0$ für $T_0 = 298\cdot7°$ und für $k = 2\cdot7352$ oder $T_0 = 273°$. Wenn man noch $\alpha_1 C, \alpha_3 C, \ldots$ statt $a_1, a_2, \ldots$ und $\beta_1 C, \beta_3 C, \ldots$ statt $b_1, b_3, \ldots$ schreibt, findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \tau = C\sin\omega . \sin(nt+\lambda), \quad \Phi = C\cos\omega(\alpha_1\sin\omega + \alpha_3\sin^3\omega + \ldots) \\ \varepsilon = C\sin(nt+\lambda).[\beta_1\sin\omega + \beta_3\sin^3\omega + \beta_5\sin^5\omega + \ldots] \end{array}\right\} \quad 12)$$

	α_1	α_3	α_5	α_7	α_9
$k = 2\cdot5$	$-1\cdot119$	$-0\cdot745$	$-0\cdot232$	$-0\cdot040$	$-0\cdot004$
$k = 2\cdot7352$	$-1\cdot146$	$-0\cdot823$	$-0\cdot279$	$-0\cdot053$	$-0\cdot006$

	β_1	β_3	β_5	β_7	β_9
$k = 2\cdot5$	$1\cdot119$	$-0\cdot448$	$-0\cdot326$	$-0\cdot090$	$-0\cdot013$
$k = 2\cdot7352$	$1\cdot146$	$-0\cdot423$	$-0\cdot370$	$-0\cdot106$	$-0\cdot018$

Mit dem Werthe $k = 2\cdot7352$ erhält man als Summe der Sinusreihe in ε am Äquator 0·23, in 30° Breite 0·50, in 45° 0·58, in 60° Breite 0·51. Die Druckschwankung hat ein Maximum in der Nähe von 45°, wenn man die Temperaturschwankung dem Cosinus der Breite proportional annimmt. Für $2C = 1/273$, d. i. für eine Temperaturschwankung von 1° am Äquator ergibt sich die Druckschwankung daselbst 0·64 *mm*, in 45° dagegen 1·6 *mm*.

Die Rechnung soll noch für einen anderen Fall durchgeführt werden, um zu untersuchen, wie sich die Resultate ändern, wenn man die Temperaturamplitude vom Äquator zum Pol rascher abnehmen lässt.

$$A(\omega) = C\sin^3\omega$$

gibt zur Bestimmung der a die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(1+\frac{3}{5}\right)a_3-\left(k+\frac{4}{5}\right)a_1=0\\
&\left(3+\frac{3}{7}\right)a_5-\left(2+\frac{4}{7}+\frac{3}{5}k\right)a_3+\frac{4}{5}ka_1=kC\\
&\left(5+\frac{3}{9}\right)a_7-\left(4+\frac{4}{9}+\frac{3}{7}k\right)a_5+\frac{4}{7}ka_3=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad 11b)$$

Das Verhältniss a_3/a_1 ergibt sich aus der ersten Gleichung, $q_3, q_5 \ldots$ jedoch behalten die gleichen Werthe wie zuvor. Den Werth von a_1 bestimmt die zweite Gleichung.

$$\left.\begin{aligned}
\tau &= C\sin^3\omega.\sin(nt+\lambda)\\
\varepsilon &= C\sin(nt+\lambda)\,[\beta_1\sin\omega+\beta_3\sin^3\omega+\beta_5\sin^5\omega+\ldots]
\end{aligned}\right\} \quad 12b)$$

$$k=2\cdot7352,\quad \beta_1=0\cdot601,\quad \beta_3=0\cdot316,\quad \beta_5=-0\cdot566,$$
$$\beta_7=-0\cdot172,\quad \beta_9=-0\cdot030,\quad \beta_{11}=-0\cdot003,\ \ldots$$

Die Summe der Sinusreihe in ε ist am Äquator 0·15, in 30° Breite 0·38, in 45° 0·42, in 60° 0·32. Wieder findet man ein Minimum am Äquator, das Maximum der Druckamplitude liegt zwischen 30° und 45°, die Abnahme in höheren Breiten ist stärker als im vorigen Beispiel, aber doch langsam im Vergleiche mit der Abnahme der Temperaturamplitude. Grösster Druck und höchste Temperatur sollten den Gleichungen 12) und 12*b*) zufolge gleichzeitig eintreten.

9. Rotirende Kugel: Halbtägige Welle. Setzt man in die Differentialgleichungen 10*a*) für die horizontalen Bewegungen auf einer rotirenden Kugel

$$\tau = A(\omega).\sin(2nt+2\lambda),\qquad \varepsilon = E(\omega)\sin(2nt+2\lambda)$$
$$b = \varphi(\omega)\cos(2nt+2\lambda)\qquad c = \psi(\omega)\sin(2nt+2\lambda)$$

so folgt:

$$\varphi=\frac{RT_0}{2nS}\frac{\dfrac{dE}{d\omega}+E\dfrac{2\cos\omega}{\sin\omega}}{\sin^2\omega},\qquad \psi=-\frac{RT_0}{2nS}\frac{\dfrac{dE}{d\omega}\cos\omega+\dfrac{2E}{\sin\omega}}{\sin^2\omega}$$

$$2nS(E-A)+\frac{1}{\sin\omega}\left\{\frac{d(\varphi\sin\omega)}{d\omega}+2\psi\right\}=0.$$

Nach Eliminirung von φ und ψ bleibt, wenn man wieder $n^2 S^2/(RT_0) = k$ setzt,

$$\frac{d^2E}{d\omega^2}\sin^2\omega - \frac{dE}{d\omega}\sin\omega\cos\omega + E(4k\sin^4\omega + 2\sin^2\omega - 8) \\ = 4k.A(\omega).\sin^4\omega. \qquad 13)$$

Nimmt man noch $A(\omega) = C\sin^2\omega$ an, so hat man es mit der gleichen Aufgabe zu thun, wie bei Berechnung der halbtägigen Ebbe und Fluth in einem Ocean von constanter Tiefe.

$$E(\omega) = a_0 + a_2\sin^2\omega + a_4\sin^4\omega + a_6\sin^6\omega + \ldots$$

gesetzt, gibt $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, a_4 scheinbar unbestimmt,

$$\left.\begin{aligned}&(4.6-8)a_6 - (3.4-2)a_4 - 4kC = 0\\ &(i^2+6i)a_{i+4} - (i^2+3i)a_{i+2} + 4ka_i = 0, \quad i = 4,6,8\ldots\end{aligned}\right\} \quad 13a)$$

$$q_i = \frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{4k}{i(i+3) - i(i+6)\dfrac{a_{i+4}}{a_{i+2}}}.$$

Daraus entwickelt man die Kettenbrüche wie vorhin und berechnet die Verhältnisse der Constanten. Dann bleibt auch a_4 nicht unbestimmt, sondern sein Werth ergibt sich gleich $-Cq_2$; demnach $a_6 = -Cq_2q_4$, $a_8 = -Cq_2q_4q_6$, ...

$$\left.\begin{aligned}&\tau = C\sin^2\omega.\sin(2nt+2\lambda)\\ &\varepsilon = C\sin(2nt+2\lambda)[\alpha_4\sin^4\omega + \alpha_6\sin^6\omega + \alpha_8\sin^8\omega + \ldots]\end{aligned}\right\} \quad 14)$$

Für $4k = 40, 10, 5$ hat Laplace die Constanten berechnet. Nur der mittlere Werth ist für unsere Aufgabe von Interesse. Ich habe noch für einige benachbarte Werthe von k die Rechnung ausgeführt.

	$4k=10$ $T_0=298°7$	$4k=10·94$ $T_0=273°0$	$4k=11$ $T_0=271°5$	$4k=11·1$ $T_0=269°1$	$4k=11·2$ $T_0=266°7$	$4k=12$ $T_0=248°9$
α_4	—6·196	—37·99	—55·00	—247·8	101·8	8·270
α_6	—3.247	—23·06	—33·68	—154·2	64·3	5·919
α_8	—0·724	— 5·75	— 8·46	— 39·2	16·5	1·662
α_{10}	—0·092	— 0·81	— 1·20	— 5·6	2·4	0·260
α_{12}	—0·008	— 0·07	— 0·11	— 0·5	0·2	0·026

Diese Zahlen bestätigen Thomson's Vermuthung, dass die Periode freier Schwingungen dieser Art in einer rotirenden Luftkugelschale (von gewöhnlicher Temperatur) sehr nahe bei 12 Stunden liegt. Statt die Rotationsgeschwindigkeit der Erde so zu bestimmen, dass die Periode gerade mit einem halben Tage zusammenfällt, können wir die Temperatur demgemäss wählen. Sie liegt nahe bei 268°. Dort geht α_4 von $-\infty$ zu $+\infty$ über. In der Nähe dieses Werthes müssen erzwungene Schwingungen zu ungemein grossen Amplituden führen. Es würde danach eine ganz geringe, halbtägige Temperaturwelle genügen, um eine sehr grosse Druckwelle derselben Periode zu erzeugen. Die Phasen beider sind übereinstimmend bei Temperaturen unter 268°, andernfalls entgegengesetzt.

Mit $4k = 10$ oder $T_0 = 298 \cdot 7$ erhält man am Äquator

$$\varepsilon = -10 \cdot 26\, C . \sin(2nt + 2\lambda).$$

Eine Temperaturamplitude von 0·038° = 298·7/(760.10·26) würde genügen, um eine Druckamplitude von 1 (*mm*) zu erzeugen.

Die Vergleichung der Atmosphäre mit einer Kugelschale von der constanten Temperatur 298·7° gibt, wie wir sehen werden, die Mondfluth am Äquator viel grösser, als sie sich aus den Beobachtungen ableiten lässt. Demgemäss müsste man auch entsprechend grössere Temperaturamplituden bei der halbtägigen Welle fordern, um die beobachteten Druckamplituden von 1 (*mm*) am Äquator zu erzeugen. Den Zahlenwerthen kommt, angesichts der grossen Unvollkommenheit der Voraussetzungen, keine Bedeutung zu. Das einzige, was aus dieser Rechnung folgt, ist, dass zur Erzeugung halbtägiger Druckschwankungen, von gleichem Betrage wie die ganztägigen, viel kleinere Temperaturschwankungen genügen.

10. Ebbe und Fluth der Atmosphäre. Um den Vergleich der in den Abschnitten 8 und 9 behandelten Aufgaben mit den für die Ebbe und Fluth geführten Rechnungen zu erleichtern, erlaube ich mir noch Einiges hinzuzufügen, was nicht eigentlich zum Gegenstande dieser Untersuchung gehört. Die folgenden Formeln unterscheiden sich von den gebräuchlichen nur in der Bezeichnung und darin, dass statt der Verschiebungen die Geschwindigkeiten

beibehalten sind. (Man vergleiche z. B. die concise Darstellung von G. H. Darwin in Encycl. Brit. Artikel Tides.)

In der rotirenden Kugelschale vom Radius S und der constanten Temperatur T erzeugt die Anziehung der Sonne Bewegungen, für welche die folgenden aus 7) und 10a) abzuleitenden Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial(V-RT\varepsilon)}{S\partial\omega} &= \frac{\partial b}{\partial t} - 2n\cos\omega . c \\ \frac{\partial(V-RT\varepsilon)}{S.\sin\omega.\partial\lambda} &= \frac{\partial c}{\partial t} + 2n\cos\omega . b \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{S\sin\omega}\left(\frac{\partial(b\sin\omega)}{\partial\omega} + \frac{\partial c}{\partial\lambda}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 15)$$

V bezeichnet das Potential der Sonne im Punkte ω, λ der rotirenden Kugelschale. Wenn die Sonne im Äquator steht, ihre Entfernung von der Erde mit P, ihre Masse mit M, die Attractionsconstante mit $\varkappa$ bezeichnet ist, so hat man für das Potential

$$\varkappa M[P^2 - 2PS\sin\omega.\cos(nt+\lambda) + S^2]^{-\frac{1}{2}}$$

Entwickelt man nach Potenzen von S/P, so erhält man zunächst Glieder, welchen für die Ebbe und Fluth keine oder nur geringe Bedeutung zukommt; dann solche, die abzuziehen sind, wenn man die Bewegung der Flüssigkeit nur relativ zum Schwerpunkt der Erde betrachtet. Denjenigen Theil des Potentials, welcher die halbtägige Fluth veranlasst, bezeichnen wir mit V, um ihn in die Gleichungen 15) einzuführen.

$$V = \frac{3}{4}\frac{\varkappa MS^2}{P^3}\sin^2\omega.\cos(2nt+2\lambda) = H(\omega).\cos(2nt+2\lambda).$$

Setzt man noch

$$\varepsilon = E(\omega).\cos(2nt+2\lambda),\ b = \varphi(\omega).\sin(\quad),\ c = \psi(\omega).\cos(\quad),$$

ferner $H - RT.E = G(\omega)$, und eliminirt φ, ψ aus den Gleichungen 15), so erhält man:

$$\frac{d^2G}{d\omega^2}\sin^2\omega - \frac{dG}{d\omega}\sin\omega\cos\omega + G(4k.\sin^4\omega + 2\sin^2\omega - 8) = 4k.H.\sin^4\omega. \quad 16)$$

Das ist die Gleichung 13) des vorigen Abschnittes, nur steht G statt E und H statt $A(\omega)$.

$$G = \frac{3}{4}\frac{\varkappa MS^2}{P^3}(\alpha_4 \sin^4\omega + \alpha_6 \sin^6\omega + \ldots)$$

$$E = \frac{1}{RT}\cdot\frac{3\varkappa MS^2}{4P^3}(\sin^2\omega - \alpha_4 \sin^4\omega - \alpha_6 \sin^6\omega - \ldots). \quad 17)$$

$\alpha_4, \alpha_6, \ldots$ sind für einen gegebenen Werth von T die gleichen Constanten wie im 9. Abschnitte.

m Masse der Erde; $\varkappa m/S^2 = g$. — $M = 355000\, m, P = 24000\, S$.

$$\frac{3}{4}\frac{\varkappa MS^2}{P^3} = 1\cdot 203.$$

Über dem Äquator hätte man danach, wenn $4k = 10$ oder $T = 298\cdot 7$

$$760\,\varepsilon = \frac{760}{287.298\cdot 7}.1\cdot 203.11\cdot 26.\cos(2nt+2\lambda)$$
$$= 0\cdot 12\,(mm)\cos(2nt+2\lambda).$$

Durch die Sonne würde eine halbtägige Barometerschwankung von 0·24 (*mm*) am Äquator entstehen, durch den Mond eine dreimal grössere, etwa 0·7 *mm*.

(Laplace berechnet Méc. Cél. livre IV, ch. 5, die atmosphärische Fluth mit dem gleichen Werth von k, jedoch für die Atmosphäre über einem Ocean von constanter Tiefe, dessen Gezeiten diejenigen der Luft beeinflussen, während hier nur die Atmosphäre über einer starren Erde betrachtet wird. Für unsern Fall gelten dieselben Formeln, wie für ein Meer von überall gleicher Tiefe l. In den Gleichungen 15) u. f. ist nur gl statt RT und gy statt $RT\varepsilon$ zu setzen, wenn y die Erhebung der Meeresoberfläche über das mittlere Niveau bezeichnet.)

Die aus der Gleichung 17) mit irgend einem zulässigen T berechneten Mondfluthen sind im Vergleich mit den aus Barometerbeobachtungen abgeleiteten viel zu gross.[1] Man kann sich darüber

[1] Ausser den in der Méc. Cél., livre XIII, erwähnten Beobachtungen Bouvard's, welche, nach Syzygien und Quadraturen geordnet, kaum einen Unterschied der täglichen Barometerschwankung erkennen liessen (nur

kaum wundern, wenn man bedenkt, dass alle in die Rechnung eingeführten Annahmen: die Vernachlässigung der verticalen Bewegung, der Reibung, endlich des Unterschiedes zwischen einem Tage und dem Intervall zweier Mondculminationen zur Vergrösserung der berechneten Fluth beitragen. Mit Beziehung auf den letztgenannten Unterschied möchte ich noch bemerken, dass er sich leicht in die Rechnung einführen lässt. Das von Laplace angenommene Verhältniss 3 : 1 zwischen Mondfluth und Sonnenfluth gilt nur, so lange der Werth $4k$ (in welchen die Tiefe des Oceans, beziehungsweise die Temperatur der Luft eingeht) weit entfernt ist von einem kritischen Betrage, wie er zwischen 11·1 und 11·2 eintritt.

Mit $4k = 10$ wird das erwähnte Verhältniss schon 2·2 : 1, mit $4k = 11 \cdot 1$ wird es jedoch 1 : 5. Die Rechnung führe ich hier nicht an, weil es doch zu gewagt scheint, die Atmosphäre mit einer Kugelschale von ganz bestimmter Temperatur zu vergleichen und unter dieser Annahme die halbtägigen Druckschwankungen als Folge der Sonnenattraction anzusehen. Viel wahrscheinlicher ist es noch, dass sie durch einen regelmässigen Bestandtheil der halbtägigen Temperaturschwankungen entstehen.

---

die Beobachtungen von 9^h Früh und 3^h Nachmittags wurden verwendet), liegen aus späterer Zeit Bearbeitungen stündlicher Beobachtungsreihen von einigen tropischen Stationen vor, welche mir Herr Prof. Hann bezeichnet hat.

Barometerschwankung durch Mondfluth:

Singapore (1° 11′ Breite) 0·16*mm*. Elliot, Fortschr. d. Ph. 1852, S. 703;

Batavia (6° 11′ Breite) 0·115*mm*. Bergsma, Amsterdamer Akad. 1870 und van der Stok: Batavia Obs. Bd. VI, 1885, 16 Jahre ganz übereinstimmend;

St. Helena (15° 57′ Breite, 540*m* Höhe) 0·10*mm*. Sabine, Fortschr. d. Ph. 1848, S. 402.

Die Resultate von Singapore und St. Helena sind dadurch merkwürdig, dass die Maxima genau zur Zeit der Mondculminationen eintreten; in Batavia verspätet sich die Fluth um 50 Minuten.

VII. SITZUNG VOM 13. MÄRZ 1890.

Der Secretär legt das eben erschienene Heft VIII—X (October—December 1889) des 98. Bandes, Abtheilung I der Sitzungsberichte, ferner das Heft I (Jänner 1890) des 11. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Die fürstl. Liechtenstein'sche Hofkanzlei in Wien macht mit Zuschrift vom 3. März l. J. die Mittheilung, dass Seine Durchlaucht der regierende Fürst Johann von und zu Liechtenstein, Ehrenmitglied der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, zur Förderung der wissenschaftlichen Durchforschung Kleinasiens für die nächsten sechs Jahre von diesem Jahre angefangen einen Beitrag von jährlich fünftausend Gulden ö. W. zu widmen und der kaiserlichen Akademie zur Verfügung zu stellen beabsichtigt, wobei Seine Durchlaucht dem besonderen Wunsche Ausdruck gibt, dass diese Widmung den österreichischerseits bereits mit glücklichem Erfolge begonnenen archäologischen Forschungen in Kleinasien zugewendet werden möge.

Das c. M. Herr Hofrath A. Bauer übersendet eine Arbeit aus dem Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien: „Zur Analyse der Harze und Balsame", von Max Bamberger.

Herr Dr. Josef Schaffer, Privatdocent und Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht

eine Abhandlung: „Über das Verhalten fossiler Zähne im polarisirten Lichte."

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Voyage of H. M. S. Challenger 1873—1876. Reports on the results. Published by Order of Her Majesty's Gouvernment. Physics and Chemistry. Vol. II. — Zoology. Vol. XXXII. London, 1889; 4°.

Zur Theorie der elektrischen Gasentladungen

von

Dr. **Friedrich Wächter.**

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1890.)

Vergleicht man die Erscheinung des geschichteten elektrischen Lichtes in Vacuumröhren mit jenen Staubfiguren in Glasröhren, welche man bei der Kundt'schen Methode zur Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen erhält, so ist eine merkwürdige Analogie beider Erscheinungen unleugbar. Dieser Umstand führte mich schon vor elf Jahren, als ich mich in dem Laboratorium des Professors Reitlinger zum erstenmale mit dem Studium der elektrischen Entladungsvorgänge in verdünnten Gasen beschäftigte, zu der Vermuthung, die Schichtung des elektrischen Lichtes in sogenannten Geisslerröhren könne ihren Grund in einer wellenförmigen Fortbewegung des elektrischen Stromes durch das Gas haben und die leuchtenden Schichten seien nichts anderes, als elektrische Schwingungsknoten.

Gerade diese naheliegende Analogie und die fast übereinstimmenden Dimensionen der durch Bärlappsamen fixirten Schallwellen und der, wie Wellenknoten aussehenden Büschellichtschichten, veranlassten mich jedoch, die Ähnlichkeit beider Erscheinungen bisher nur als eine äusserliche anzusehen, und liess Zweifel aufkommen, ob letztere Vorgänge sich in Wirklichkeit auch auf eine Wellenbewegung zurückführen liessen.

In der That sprechen mancherlei Gründe dagegen. Bei den Kundt'schen Schallfiguren hat man es mit einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit von etwa 260 bis 1300 Meter pro Secunde und Schwingungszahlen von 40 bis 5000 zu thun, welche überdies

Schwingungen grösserer, körperlicher Massen sind, während für elektrische Schwingungen weder ein bestimmter Anhaltspunkt über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit derselben in verschiedenen, verdünnten Gasen, noch über die Schwingungszahlen der Elektricitätsquellen vorlag; man hätte daher ganz willkürliche Annahmen in dieser Beziehung machen müssen. Überdies war von vornherein klar, dass sich elektrische Schwingungen nicht auf grössere körperliche Massen, sondern höchstens auf Molecular- oder Ätherbewegungen zurückführen liessen.

Da nun gegenwärtig durch die Versuche von Hertz aber erwiesen ist, dass die elektrische Induction sowohl in dem leeren Raume, wie auch in metallischen Leitern sich in Wellenform fortpflanzt und anderseits eben hiedurch die Möglichkeit geboten ist — unter Zugrundelegung einer bestimmten Fortpflanzungsgeschwindigkeit — die Schwingungszahlen elektrisch erregter Körper wenigstens annähernd ihrer Grössenordnung nach zu bestimmen, so erscheint die Wahrscheinlichkeit um so grösser, dass auch der, die ponderable Materie durchfliessende elektrische Strom als eine Wellenbewegung angesehen werden könne und sind — wenn man zusammengehörige Schwingungszahlen und Wellenlängen ermitteln könnte — Anhaltspunkte gegeben, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des elektrischen Stromes in ponderablen Leitern — mindestens in gewisser Annäherung — zu bestimmen.

Es erschien mir daher nicht unbegründet zu sein, die Frage: ob man die elektrischen Schichtungen in Vacuumröhren als Anzeichen einer Wellenbewegung erachten könne? neuerdings experimentell zu prüfen und meine diesbezüglich schon vor Jahren angefertigten Apparate nochmals vorzunehmen und womöglich in eine Form zu bringen, welche den angestrebten Zweck erreichen liesse.

Die erste Bedingung für den Nachweis einer Wellenbewegung ist unstreitig das Zustandebringen von Interferenzerscheinungen. Wenn daher die geschichteten elektrischen Entladungen einer Wellenbewegung entspringen, so müsste eine Interferenz derselben nachweislich sein, man müsste zeigen können, dass nicht nur gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität, sondern auch gleiche Mengen positiver und positiver

oder negativer und negativer Elektricität sich gegenseitig aufheben können.

Es ist nun allerdings viel leichter, diese Anforderung theoretisch aufzustellen, als derselben praktisch durch das Experiment Genüge zu leisten.

Speciell bei den elektrischen Lichterscheinungen in verdünnten Gasen hat man es zweifelsohne mit sehr complicirten Verhältnissen zu thun. Einerseits lassen sich die alternirenden Entladungen fast niemals gänzlich ausschliessen, dann sind die Entladungsvorgänge an den beiden Elektroden wesentlich von einander verschieden; die Widerstände der Fortleitung und des Überganges aus den Elektroden in das Gas, wie nicht minder die Dichte und chemische Beschaffenheit des Gases und der Elektroden wirken bestimmend auf die Entladung ein und modificiren die Art und Quantität des Zuflusses von den Elektricitätsquellen, welch' letztere überdies stets elektrische Schwingungen verschiedenster Wellenlänge gleichzeitig aussenden.

Diese Schwierigkeiten der Versuchsbedingungen mögen es rechtfertigen, wenn ich im Nachstehenden einige Versuche zur Mittheilung bringe, welche zwar die Deutung zulassen, dass man es daselbst mit Interferenzerscheinungen und folglich mit Schwingungsbewegungen des vom elektrischen Strome durchflossenen verdünnten Gases zu thun habe, ohne jedoch den Anspruch eines entscheidenden Beweises für diese Behauptung machen zu können.

§. 1. Es muss zunächst beachtet werden, dass hochgespannte elektrische Ströme, welche im Stande sind, Gasschichten zu durchbrechen, nicht den bekannten Gesetzen des gewöhnlichen Stromes minderer Spannung gehorchen. Während der Strom einer, aus wenigen Elementen bestehenden, galvanischen Batterie sich in unbeschränkt viele, ihm gleichzeitig gebotene Parallelwege gemäss des Kirchhoff-Ohm'schen Gesetzes zertheilt, wählt ein hochgespannter Entladungsstrom oder Entladungsschlag, wie bekannt, von zwei oder mehreren, ihm gleichzeitig gebotenen Parallelwegen, häufig nur e i n e n Weg des geringsten Widerstandes, auf welchem Principe viele Blitzschutzapparate und andere Instrumente basiren.

Bei den nachstehend beschriebenen Versuchen haben wir aber eben mit dieser Erscheinung zu rechnen und müssen dieselbe daher etwas näher erörtern.

Erzeugt man aus zwei oder mehreren Glasröhren von gleichem Durchmesser, aber verschiedener Länge durch Einschmelzen von Drahtelektroden an den Enden der Röhren und gleichzeitiges Evacuiren aller Röhren auf einen gleichen Grad der Luftverdünnung sogenannte Vacuum- oder Geisslerröhren, so zeigt sich, dass bei Parallelschaltung dieser Röhren der Strom eines Rhumkorff' Inductors oder einer Elektrisirmaschine, stets nur die kürzeste Röhre leuchtend durchfliesst (vorausgesetzt, dass die Differenz der Röhrenlängen der Stromintensität der angewendeten Stromquelle entspricht). Der Widerstand der zu passirenden Gassäule wächst somit mit der Länge derselben, ist jedoch der Länge der Gassäule nicht direct proportional.

Bei Parallelschaltung mehrerer Vacuumröhren von gleicher Länge und gleichstark verdünntem, gleichartigem Gase, aber verschiedenem Durchmesser oder bei gleicher Röhrenlänge und gleichem Durchmesser, jedoch verschiedenem Gasdrucke wird gleichfalls nur die Röhre des geringsten Widerstandes von dem Strom leuchtend durchflossen.

Wendet man dagegen mehrere Vacuumröhren, von verschiedenen Längen- und Querschnitts-Dimensionen, sowie verschieden starkem Verdünnungsgrade des eingeschlossenen Gases an, so gelingt es, bei passend gewählten Verhältnissen gleichzeitig zwei und auch mehrere parallel geschaltete Röhren durch den Strom leuchtend durchfliessen zu erhalten.

Auf diesen Umstand gründen sich jene Versuche, die ich in der Absicht machte, eine Interferenz zweier, eine Gasschicht gleichzeitig passirender Entladungsströme herbeizuführen.

§. 2. Es wurden zunächst zwei gerade, cylindrische Glasröhren von genau gleichen Längs- und Querschnittsdimensionen und gleicher Länge und Stärke der eingeschmolzenen Drahtelektroden an eine Quecksilberluftpumpe angesetzt und das in denselben enthaltene Gas (atmosphärische Luft) in beiden Röhren successive bis 0·01 *mm* Quecksilberdruck verdünnt.

Es zeigte sich hiebei, dass die Entladung bei gleicher Luftverdünnung stets beide Röhren gleichzeitig durchfliesst, soweit

dies durch einfache Beobachtung ohne rotirenden Spiegel oder sonstige Hilfsmittel zu constatiren möglich ist. Die Entladung in der einen Röhre scheint dabei ohne Rückwirkung auf die Entladung in der zweiten, parallel dazu geschalteten Röhre zu sein, insoferne man die Vorsicht beobachtet, beide Röhren durch symmetrisch angebrachte Glashähne, vor der Einleitung der Entladung von einer Communication des Gases aus einer Röhre in die andere abzuschliessen.

Communiciren dagegen die Röhren untereinander, oder auch noch mit den übrigen Theilen der Luftpumpe, so treten unter Umständen Störungen in der Entladung ein, indem entweder nur eine der beiden Röhren von einer leuchtenden Entladung durchsetzt wird, während die zweite Röhre dunkel bleibt, oder es findet von der näher gelegenen Elektrode der zweiten Röhre eine Rückentladung in die nicht in den Stromkreis einbezogene Luftpumpe statt. Dies letztere geschieht mitunter selbst dann, wenn die mit Quecksilber gefüllten Theile der Luftpumpe durch Glashähne von den beiden Entladungsröhren isolirt sind.

§. 3. Es entsteht nun die Frage, auf welche Ursachen diese Erscheinung zurückzuführen ist? Zum Studium dieser Vorgänge verwendete ich zunächst verschiedene Vacuumröhren mit je vier eingeschmolzenen Drahtelektroden von der in Fig. 1 dargestellten Form und Schaltungsweise.

Bei Röhren dieser Gestalt hängt es wesentlich von den Längs- und Querschnittsdimensionen des Röhrenstückes *a, e, d* ab (Fig. 1), ob die Entladung in den beiden Theilen *ab* und *cd* so ruhig und ungestört vor sich geht, als ob dies zwei ganz getrennte, hintereinander geschaltete Röhren wären, oder ob anderseits eine Beeinflussung in der Weise stattfindet, dass nur die eine der beiden Röhren zum Leuchten gebracht wird, während die zweite dunkel bleibt.

Untersucht man den letzteren Fall, wo eine Störung, d. h. ein Nichtleuchten einer der beiden parallel geschalteten Röhren eintritt, genauer, so findet man, dass dies dadurch hervorgebracht wird, dass die Entladung in der Röhre I nicht nur zwischen Elektrode *a* und *b* stattfindet, sondern sich auch nach Elektrode *d* und *c* hin erstreckt, — wie man erkennt, wenn letztere beiden

Elektroden nicht in den Funkenstrom eingeschaltet sind. In gleicher Weise bewirkt die Entladung in Röhre II auch Seitenentladungen nach Elektrode *a* und *b* hin und diese sich gegenseitig durchkreuzenden Nebenentladungen wirken offenbar störend auf einander ein.

Besonders deutlich lässt sich dies in geraden, cylindrischen Röhren erkennen, welche (wie Fig. 2 *A* und *B*) mit 4 oder 3 Elektroden versehen sind, wobei vorausgesetzt ist, dass die mittleren Elektroden (*b* und *c* in Fig. 2 *A* und *b* in Fig. 2 *B*) aus dünnen Drähten bestehen.

Bei Zusammenschaltung der symetrisch liegenden Elektroden (*a* und *d*, *b* und *c*) bieten solche Röhren beim Durchgange eines Rhumkorff-Stromes die verschiedenartigsten Erscheinungen dar.

Bald leuchtet nur die eine Röhrenhälfte ungewöhnlich intensiv auf, bald springt die leuchtende Entladung in raschem Wechsel aus einer Röhrenhälfte in die andere über und wieder zurück, bald wieder findet gleichförmige Entladung in beiden Röhrentheilen statt, ohne dass wissentlich und absichtlich irgend eine Änderung in der Versuchsanordnung getroffen wird.

Eine längere Zeit sich gleichbleibende Entladungsform tritt meistens erst nach einer, mehrere Minuten währenden Dauer des Stromdurchganges ein. Ändert man nun die Versuchsbedingungen etwa durch Parallelschaltung einer Leydnerflasche, oder einer zweiten parallel geschalteten Vacuumröhre oder durch langsameren oder rascheren Unterbrechungsgang des Wagner'schen Inductorhammers, so findet wieder ein lebhaftes Hin- und Herspielen in den Röhrentheilen statt, um sich dann nach einiger Zeit in dem früheren oder einem anderen Zustande dauernd zu erhalten.

Bei stärker evacuirten Doppelröhren kömmt es auch vor, dass manchmal beide Röhren dunkel bleiben, als ob dieselben von keiner Entladung durchsetzt würden, während eine gleichzeitig eingeschaltete Funkenstrecke oder eine sonst noch eingeschaltete Vacuumröhre in gleicher Weise den Durchgang eines Stromes anzeigt, wie bei der leuchtenden Entladung.

Dieses Hin- und Herspringen der leuchtenden Entladung in einer Doppelröhre, sowie überhaupt die angedeuteten ungewöhnlichen Erscheinungen finden jedoch nicht statt, wenn an Stelle

der Drahtelektrode *b* in Fig. 2 *B* ein grösseres Metallstück als Elektrode angebracht wird, welches annähernd den gesammten Querschnitt der Glasröhre erfüllt, ohne jedoch die Communication des Gases gänzlich zu hindern.

Desgleichen verhalten sich die beiden Röhrentheile I und II in Fig. 1 genau so, wie zwei gänzlich getrennte Vacuumröhren, wenn im Punkte *e* der verbindenden Röhre *aed* ein Pfropf aus Staniol eingeführt wird.

§. 4. Da einerseits durch die vorbeschriebenen Versuche thatsächlich der Beweis erbracht scheint, dass zwei, von entgegengesetzten Seiten, eine Vacuumröhre gleichzeitig durchsetzende Entladungen störend auf einander wirken und anderseits überhaupt die Vermuthung naheliegt, dass die bei derartigen Entladungen stets auftretenden Schichtungen einer Wellenbewegung zuzuschreiben seien, so versuchte ich es nunmehr direct eine Erscheinung von Interferenz herbeizuführen.

Zu diesem Behufe wurde zunächst eine Röhrenform von genau gleicher Art, wie man selbe zum Nachweise der Interferenz von Schallschwingungen benützt und wie in Fig. 3 dargestellt ist, versucht.

In der That zeigt sich bei Röhren dieser Form — wenn deren Dimensionen passend gewählt sind — dass die leuchtende Entladung stets nur die rechte oder linke Röhrenhälfte durchsetzt. Trotzdem ist dieser Versuch nicht beweiskräftig, denn es lässt sich einwenden, dass eine eventuelle Interferenzerscheinung nur dann eintreten könnte, wenn die beiden Röhrenhälften ungleich lang sind und die Differenz ihrer Längen dem einfachen oder mehrfachen Masse einer halben Wellenlänge entspricht. Ist dies aber der Fall, dann ergibt sich, eben durch die verschiedene Röhrenlänge, ein ungleicher Leitungswiderstand der beiden Röhrenhälften und es erscheint dieser Grund ausreichend, um das einseitige Auftreten der leuchtenden Entladung in dem Röhrentheile mit geringerem Widerstande zu erklären.

Es könnte weiters gesagt werden, dass eine eventuelle Interferenz der elektrischen Wellen in einer Röhre dieser Form nicht nur einen einseitigen Stromdurchgang bewirken, sondern vielmehr die gänzliche Aufhebung des Stromes hervorbringen müsse, um als Beweis für das Auftreten von Interferenz angesehen werden zu können.

Gegen diesen letzteren Einwand lässt sich allerdings erwidern, dass auch bei den analog geformten Interferenzröhren für Schallschwingungen die Schallfortpflanzung nicht gänzlich aufgehoben wird, da die Interferenzwirkung nur den Grundton, nicht aber gleichzeitig auch die Obertöne alteriren kann. Es unterliegt aber, nach den bisherigen Erfahrungen, keinem Zweifel, dass auch die, von elektrisch geladenen Körpern ausgehenden elektrischen Wellen nicht stets nur mit ein und derselben Schwingungszahl ausgesendet werden, sondern dass im Gegentheile Schwingungen der verschiedensten Art und Wellenlänge gleichzeitig ausgesendet werden, insbesondere dann, wenn man sich als Electricitätsquelle eines Inductionsapparates bedient, dessen Entladungsweise in hohem Grade von den jeweilig eingeschalteten Widerständen beeinflusst wird.

Man kann daher nicht erwarten, dass ein elektrischer Entladungsvorgang, welcher möglicherweise aus Einzelwellen verschiedenster Schwingungszahl besteht, durch Interferenz einer oder einiger Arten dieser Einzelwellen gänzlich in seinem Verlaufe zurückgehalten werde. Eine mindestens theilweise Entladung ist daher jedenfalls wahrscheinlich.

Da sich die vorbeschriebene Röhrenform aber auch zu dem Nachweise einer eventuellen, theilweisen, Interferenz nicht eignet, so musste zu diesem Behufe eine andere Versuchsanordnung ersonnen werden.

§. 5. Es wurde nunmehr eine Röhre in Form eines Kreuzes erzeugt, wie Fig. 4 veranschaulicht. Die Elektroden bei *a* und *b* bestanden hiebei aus fast eingeschmolzenen, dünnen Drähten; die mittlere Elektrode *c* hingegen wurde durch ein massives Eisenstückchen von nahezu dem Durchmesser der Röhre gebildet und war beweglich, d. h. in dem verticalen Rohrtheil *c d* verschiebbar angeordnet. Die Beweglichkeit der Elektrode wurde in der Weise bewirkt, dass das Eisenstückchen an das eine Ende eines dünnen, spiralförmig gewundenen, und isolirten Drahtes angelöthet war, während das zweite Ende des Spiraldrahtes an den in das Glasrohr bei *F* eingeschmolzenen Platindraht angelöthet war. Mittelst eines Magnetes oder durch einfaches Schütteln der Röhre konnte nun das Eisenstück *c* in der Röhre *dF*

auf- und abbewegt werden, ohne den metallischen Contact mit der äusseren Zuleitung zu unterbrechen.

Diese Röhre zeigte nun folgende Erscheinungen: Befindet sich die bewegliche Elektrode in Punkt *d*, so findet stets nach beiden Richtungen *da* und *db* gleichzeitig leuchtende Entladung statt, gleichviel ob die Elektroden *a* und *b* positiv oder negativ sind, wie schon bei den in §. 3 beschriebenen Versuchen mit massiven mittleren Elektroden gefunden wurde.

Befindet sich die bewegliche Elektrode in dem Seitenrohre bei Punkt *c*, so findet — wenn *a* und *b* negative, *c* positive Elektrode ist — gleichfalls leuchtende Entladung nach beiden Richtungen *cda* und *cdb* statt. Es findet jedoch bei Umkehrung des Stromes (wenn *a* und *b* positiv sind) nur einseitige Entladung statt, welche entweder constant nach der rechten oder linken Röhrenhälfte gerichtet ist, oder beständig zwischen den beiden Röhrenhälften abwechselt.

Ich glaube nun, dass die Erklärung dieser Erscheinung in einer Interferenzwirkung erblickt werden könne.

Geht nämlich die positive Entladung von der in Punkt *c* befindlichen, beweglichen Elektrode aus, so ist leicht begreiflich, dass sich die elektrischen Wellen, im Punkte *d* angelangt, nach rechts und links gleichmässig theilen und daher beiderseitige leuchtende Entladung veranlassen.

Ist dagegen die bewegliche Elektrode *c* negativ, so theilen sich die von *a* kommenden Wellen gleichfalls im Punkte *d* nach *c* und *b* hin; ebenso theilen sich die von *b* kommenden Wellen im nämlichen Punkte *d* nach *c* und *a* hin. Langen nun diese, von entgegengesetzten Seiten kommenden Wellen[1] im Punkte *d* mit ungleicher Phase an, so muss eine gänzliche oder theilweise Interferenz eintreten, deren Wirkung sich in gleicher Weise äussern kann, als ob der Theil des Zuleitungsdrahtes *ag* oder *bg* für diese interferirenden Wellen unterbrochen wäre, was dann

[1] Da man es hier stets nur mit dem geschichteten elektrischen Lichte zu thun hat und die Schichtung nur von der positiven Elektrode ausgeht und ausschliesslich als Theil der elektropositiven Entladung anzusehen ist, so kann auch nur eine Bewegung von der positiven zur negativen Elektrode hin angenommen werden.

eine einseitige Entladung durch die rechte oder linke Röhrenhälfte veranlasst.

Eine Bestätigung dieser Annahme glaube ich auch in nachstehender Erscheinung erblicken zu können. Bei Röhren der in Fig. 1 dargestellten Form und Schaltungsweise kömmt es nämlich manchmal — unter mir noch nicht näher bekannten Bedingungen — vor, dass die Elektrode *c* (in Fig. 1) als negative Elektrode, mit blauem Glimmlichte umhüllt, erscheint, während die Elektrode *b* als positiv sich charakterisirt, von welcher die röthlichen Büschellichten sich gleichmässig nach *c* hin verbreiten, ohne durch die Anwesenheit der Elektroden *a* und *d*, welche mit dem zweiten Pole des Inductoriums verbunden sind, im geringsten beeinflusst zu werden. Es macht hiebei den Eindruck, als ob die Elektroden *a* und *d* überhaupt gar nicht vorhanden wären, sondern bloss von dem einen Pole des Inductoriums gleichzeitig positive und negative Entladungen ausgingen.

Diese Erscheinung ist aber nicht wohl anders erklärlich, als durch die Annahme, dass bei solchen anormalen Entladungsformen schon in den metallischen Zuleitungsdrähten eine Störung des gewöhnlichen Stromlaufes eintritt.

§. 6. Es war nun zu vermuthen, dass die einseitige Entladung bei den in Kreuzform gestalteten Röhren (Fig. 4) sich auch in einer Widerstandsänderung der gesammten Röhre äussern müsse, insofern diese einseitige Entladung einer Interferenzwirkung zuzuschreiben wäre. Es hätte dabei voraussichtlich in jenem Falle, wo Interferenz, respective einseitige Entladung eintrat, ein grösserer Widerstand für die Stromleitung auftreten müssen, als in dem anderen Falle der beiderseitigen Entladung, da doch zwei parallele Stromwege zusammengenommen weniger Widerstand darbieten sollten, als jeder dieser beiden Wege für sich allein.

Zur Prüfung dieser Frage wurde nun noch eine zweite Vacuumröhre (*F—g* in Fig. 5) parallel zugeschaltet, welche gleichsam als Indicator diente. Es zeigte sich auch in der That, dass diese Indicatorröhre bei einer bestimmten Stromrichtung aufleuchtete, bei Commutirung des Stromes hingegen dunkel blieb. Hiebei ist natürlich vorausgesetzt, dass diese Röhre genau symmetrische Elektroden besitzt und deren Widerstand der zu prüfenden Kreuzröhre nahezu gleichkömmt.

Das Aufleuchten und Dunkelbleiben der Indicatorröhre trat jedoch gerade in entgegengesetzter Weise auf, als erwartet wurde. Die Indicatorröhre leuchtete auf, wenn beiderseitige Entladung in der Kreuzröhre stattfand und blieb dunkel bei der einseitigen Entladung. Der Widerstand in der Kreuzröhre erwies sich daher als geringer, wenn nur einer der beiden Stromwege passirt wurde, als wenn beide Stromwege gleichzeitig leuchtend durchflossen wurden.

Bei einiger Überlegung liess sich die Ursache dieser Erscheinung aber leicht erklären. Die drei Elektroden der Kreuzröhre in Fig. 4 sind nämlich ungleich gross und zwar bieten die beiden Drahtelektroden *a* und *b* zusammengenommen weit weniger metallische Oberfläche dar, als die massive Mittelelektrode *c* sammt dem zugehörigen Spiraldrahte.

Da aber bekanntlich der grösste Übergangswiderstand aus Metallen in Gase an der negativen Elektrode auftritt, dieser Übergangswiderstand überhaupt grösser ist, als der Widerstand kurzer Gasschichten selbst und endlich der Übergangswiderstand an der negativen Elektrode mit der Vergrösserung der Oberfläche der Elektrode abnimmt, so ist selbstverständlich, dass der Gesammtwiderstand der kreuzförmigen Röhre kleiner sein muss, wenn die grossflächige Elektrode *c* negativ ist, als bei umgekehrter Stromrichtung.

Wenn daher durch eine eventuelle theilweise Inferferenz ein erhöhter Gesammtwiderstand herbeigeführt würde, so hätte sich derselbe bei der beschriebenen Versuchsanordnung nur dann documentiren können, wenn derselbe seinem Werthe nach grösser gewesen wäre, als die durch Vergrösserung der Kathode bewirkte Widerstandsverminderung. Dies ist jedoch, wie es scheint, nicht der Fall.

§. 7. Um sonach den Einfluss des Übergangswiderstandes an der negativen Elektrode zu eliminiren, wurden in einer zweiten kreuzförmigen Röhre (Fig. 5) die Elektroden nicht aus Platindrähten, sondern aus Messingröhren angefertigt und derart bemessen, dass die, untereinander ganz gleichen, Elektroden *a* und *b* zusammengenommen genau die nämliche Oberfläche darboten, wie die bewegliche Elektrode *c*.

Wurde nun zu dieser Röhre gleichfalls eine Indicatorröhre *Fg* parallel geschaltet, so leuchtete dieselbe bei einseitiger Entladung auf und blieb dunkel bei beiderseitiger Entladung, verhielt sich also gerade entgegengesetzt, wie früher.

Es liess sich weiter zeigen, dass die Indicatorröhre stets dunkel blieb (also grösseren Widerstand als die Kreuzröhre anzeigte) wenn die Elektrode *c* — ohne Vergrösserung ihrer Oberfläche — an den Punkt *d* gebracht wurde, so dass also in der That der Oberflächenwiderstand der negativen Elektrode bei dieser Versuchsanordnung nicht in Betracht kömmt.

Der vorbeschriebene Versuch scheint mir sonach thatsächlich für das Auftreten von Interferenz zu sprechen.

§. 8. Immerhin sind diese Versuche nicht conform jenen, welche man in der Optik und Akustik gewohnt ist, als Nachweise für Interferenz zu erachten, da bei den vorbeschriebenen Experimenten von zwei Wellenzügen stets nur einer in seinem Verlaufe gestört wurde, während der zweite ungeändert blieb, während bei vollkommener Interferenz doch beide, mit einander interferirende Wellenzüge gestört werden sollten.

Ich versuchte daher noch eine andere Schaltungsweise in Anwendung zu bringen. Hiezu diente eine viertheilige Röhre von der in Fig. 6 perspectivisch dargestellten Form. Die drei Elektroden *abc* waren hiebei durch einen Metalldraht unter einander verbunden, bildeten daher stets gleiche Pole, während die vierte Elektrode *k* als zweiter Pol fungirte.

Bei einem bestimmten Drucke des eingeschlossenen Gases und bei einer bestimmten Entladungsform zeigt eine Röhre dieser Form folgendes Verhalten: Sind die Elektroden *abc* negativ, *k* positiv, so geht eine leuchtende Entladung gleichmässig durch *kma* und *kmb*, während die Röhre *kc* dunkel bleibt, oder doch nur zeitweilig aufleuchtet. Kehrt man nun den Strom um, so findet die leuchtende Entladung fast ausschliesslich nur durch das Rohr *kc* statt; zeitweilig blitzen zwar auch Entladungen in *amk* und *bmk* auf, aber nie in beiden letztgenannten Rohren gleichzeitig.

Verändert man jedoch nur um ein geringes den Druck des eingeschlossenen Gases oder die Entladungsform (etwa durch Einschaltung einer Funkenstrecke), so geht sofort bei jeder

Stromrichtung durch alle Zweige des Rohres gleichzeitig leuchtende Entladung hindurch. Auch wird die Entladung durch das Rohr *ck* aufgehoben, wenn man die Elektrode bei *k* in einem voluminöseren, bis in das Rohr *ab* reichenden Metallstückchen enden lässt.

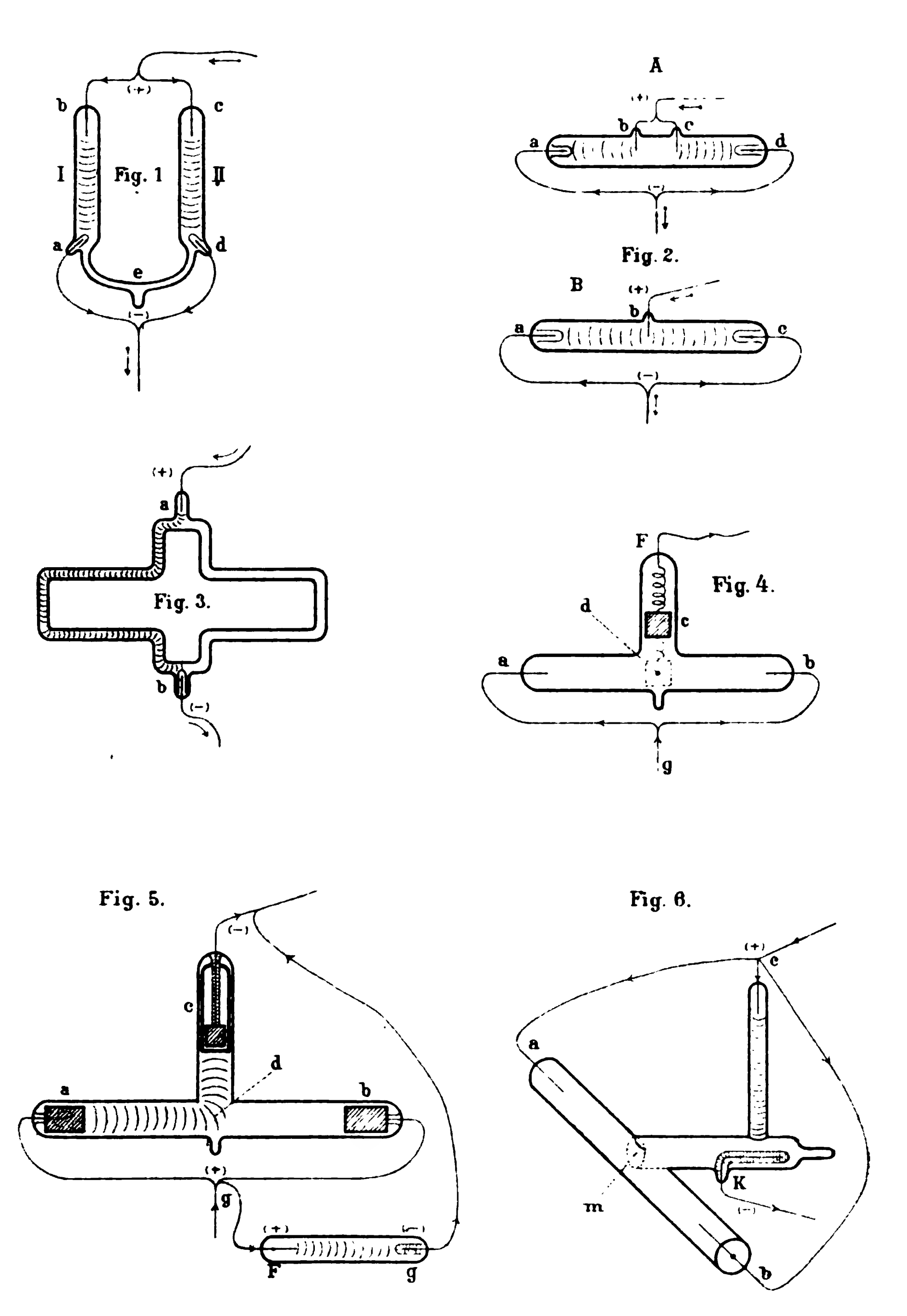
Als Erklärung dieses Versuches wäre dieselbe Annahme einer Interferenz, wie bei dem vorigen Experimente zu machen, da hier der Theil *ck* des Rohres ebenso nur als Indicator dient, wie früher die abgetrennte Röhre *Fg*.

§. 9. Zum Schlusse vorliegender Studie mögen noch einige allgemeine Bemerkungen über die Natur der elektrischen Schichtungen in Vacuumröhren Platz finden. Zunächst steht ausser Frage, dass diese Schichten aus ponderablen Gasmolekülen bestehen und durch den directen, geleiteten Strom hervorgebracht werden; wenn daher diese Schichten wirklich elektrische Wellen darstellen, so sind dieselben nicht zu verwechseln und nicht identisch mit den durch Hertz für den leeren, nur von Äther erfüllten Raum nachgewiesenen, elektrischen Inductionsschwingungen. Diese beiderlei elektrischen Schwingungen würden sich vielmehr etwa so zu einander verhalten, wie die fortschreitende körperliche Wärmebewegung der Gasmoleküle zu den transversalen Ätherschwingungen der strahlenden Wärme.

Weiters gehört die Schichtenbildung in Vacuumröhren ausschliesslich nur der Fortbewegung der positiven Entladung an, während die negative Entladung in einer ganz anderen Form vor sich geht. Wenn Plücker u. A. behaupten, dass zuweilen auch das negative Licht geschichtet sei, so beruht dies entschieden auf einem Irrthum, hervorgerufen durch alternirende Entladung.

Was die bisherigen Erklärungen der Schichtenbildung anbelangt, so stimmen die meisten, wie de la Rive, Bückmann, W. Spottiswoode und J. F. Moulton, Quet und Seguin[1] darin überein, dass die leuchtenden Schichten und deren dunkle Zwischenräume Verdichtungen und Verdünnungen des durchströmten Gases entsprächen, für welche Anschauungen verschiedene experimentelle Belege beigebracht wurden und welche Annahme auch mit der Erklärung der Schichten als Wellenknoten in Übereinstimmung stände.

[1] Siehe G. Wiedemann: Die Lehre von der Elektricität, 4. Bd.



Lith. Anst. J. Barth. Wien, Funfhaus.



Andere Hypothesen, wie jene von Reitlinger und Zerjan, dann Van der Willigen,[1] wonach das durchströmte Gas sich in besser und schlechter leitende Theile zerlegen soll, sind jedoch durch seitherige Versuche mit möglichst chemisch reinen, elementaren Gasen unwahrscheinlich geworden, so dass in der That die Annahme einer Wellenbewegung als Ursache der Schichtenbildung des positiven Lichtes zum mindesten mit den bisherigen äusserst mannigfachen und zahlreichen Versuchen auf diesem Gebiete nicht in Widerspruch steht. Ich beabsichtige übrigens noch weitere experimentelle Belege für diese hier vermuthungsweise ausgesprochene Erklärung der Schichtenbildung aufzusuchen.

---

[1] G. Wiedemann. Die Lehre von der Elektricität, 4. Bd., S. 582, 1885 und Dr. v. Urbanitzky. Die Schichtung des elektr. Lichtes, Dissertation, Wien, 1877.

VIII. SITZUNG VOM 20. MÄRZ 1890.

Der Secretär legt das Autoren- und Sachregister zu Bd. X. der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. C. Claus überreicht die erschienenen Fortsetzungen des Werkes: „Arbeiten aus dem zoologischen Institute der k. k. Universität in Wien und der zoologischen Station in Triest". Bd. VIII, Heft I. (1888) und Heft II und III (1889).

Ferner theilt Herr Hofrath Claus die Ergebnisse seiner Untersuchungen: „Über die Organisation der Cypriden" mit.

Das w. M. Herr Hofrath L. v. Barth überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium des k. und k. Militär-Sanitäts-Comités in Wien, von Oberarzt Dr. Ladislaus Niemiłowicz, unter dem Titel: „Glycerinbromal und Tribrompropionsäure."

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Director J. Stefan, überreicht eine im k. k. physikalischen Institute der Wiener Universität ausgeführte Arbeit von Dr. Gustav Jäger: „Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Salzlösungen."

Über die Wärmeleitungsfähigkeit der Salzlösungen

von

Dr. Gustav Jäger.

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Wien.

Das grosse Interesse, welches man in jüngster Zeit den Salzlösungen entgegengebracht hat, hat mich bewogen, deren Wärmeleitungsfähigkeit zu untersuchen. Wir haben nämlich in dieser Beziehung noch sehr wenige stichhältige Resultate, indem mit Ausnahme der Kochsalz-, Kupfervitriol- und Zinkvitriollösung, deren Wärmeleitungsvermögen Herr H. F. Weber[1] bestimmt hat, wohl kaum eine einwurfsfreie Beobachtung vorliegt.

Allerdings sind die Schwierigkeiten, welche die Salzlösungen in dieser Beziehung darbieten, sehr mannigfacher Art. Abgesehen von den Vorsichtsmassregeln, welche jede Flüssigkeit, deren Wärmeleitungsfähigkeit man bestimmen will, für sich verlangt, kommt bei den Salzlösungen noch hinzu, dass die Vertheilung des Salzes in einer Lösung eine Function der Temperaturvertheilung in derselben ist. Der Umstand, dass wir nur durch Herstellung von Temperaturunterschieden die Wärmeleitungsfähigkeit bestimmen können, macht es unmöglich, gesättigte Lösungen in Betracht zu ziehen. Eine derartige Lösung muss nämlich sofort ihren Charakter ändern, wenn ihre einzelnen Theile Temperaturänderungen erfahren, indem die abgekühlten Stellen Salz ausscheiden, die erwärmten ihre Sättigung einbüssen. Damit ist aber eine weitere Untersuchung illusorisch gemacht.

---

[1] Wied. Ann., X, S. 103 ff.

Von den bereits bekannten Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitungsfähigkeiten von Flüssigkeiten liefert jene von Herrn H. F. Weber, wie sich durch eine Wiederholung seiner Messungen gezeigt hat, wohl die besten Resultate. Ich erhielt nämlich sowohl für Wasser als auch für Glycerin, auf welche Flüssigkeiten sich meine Prüfungen erstreckten, Werthe, welche nicht um 1% von den Weber'schen abwichen; nichtsdestoweniger zog ich es doch vor, die Methode wesentlich abzuändern, indem es sich mir weniger um absolute, als hauptsächlich um relative Bestimmungen der Wärmeleitungsfähigkeit handelte. Ich richtete mein Augenmerk vor Allem darauf, möglichst geringe Temperaturdifferenzen herzustellen, und alle störenden Einflüsse nach Thunlichkeit zu eliminiren.

Bezüglich des Temperaturcoëfficienten der Wärmeleitungsfähigkeit ist zu bemerken, dass derselbe mit Hilfe des von mir angewendeten Apparates nicht zu bestimmen ist, da ich die Wärmeleitungsfähigkeiten der Flüssigkeiten im Vergleich zu jener einer Glasplatte bestimmte. Der Zusammenhang der Wärmeleitungsfähigkeit des Glases mit der Temperatur ist aber völlig unbekannt. Speciell bei Salzlösungen dürfte die Bestimmung des Temperaturcoëfficienten vorderhand überhaupt noch mit sehr grossen Schwierigkeiten zu kämpfen haben, da man mit grossen Temperaturdifferenzen nicht arbeiten darf, und bei Anwendung kleiner Temperaturunterschiede die Fehler der Messung allzusehr ins Gewicht fallen.

Der Apparat, mit Hilfe dessen ich meine Untersuchungen machte, war folgendermassen zusammengestellt. Das Wesentlichste waren drei Kupferplatten von 12 *cm* Durchmesser und 2 *mm* Dicke. Ich will dieselben mit I, II und III bezeichnen. Zwischen II und III wurde eine Glasplatte von gleichem Durchmesser und ungefähr $1^1/_2$ *mm* Dicke mit einem Kitt, bestehend aus Wachs und Colophonium, luftdicht eingekittet. I und II waren dazu bestimmt, zwischen sich die zu untersuchende Lösung aufzunehmen. Zu diesem Zwecke wurden auf II drei kleine Glasklötze von ungefähr 2 *mm* im Geviert und $1^1/_2$ *mm* Dicke gelegt, auf welchen I ruhte. Zur Einführung der Flüssigkeit erhielt I in der Mitte ein Loch von 1 *mm* Durchmesser. Da die Capillarität der Flüssigkeit nicht immer hinreichte, ein Ausfliessen zu ver-

hindern, wurde über II ein Hartgummiring gezogen, der den Rand der Kupferplatte um etwa $^1/_2$ *mm* überragte. Zur Erlangung einer bestimmten Temperaturdifferenz zwischen I und III wurde III durch Bespülung mit kaltem Wasser auf constanter Temperatur erhalten. Bei I hingegen wurde folgendermassen verfahren. Auf der oberen Seite der Kupferplatte waren zwei Reifen aus dünnem Kupferblech von ungefähr 3 *cm* Höhe concentrisch aufgelöthet. Der Grössere hatte den Durchmesser der Platte, der Kleinere einen Durchmesser von 2 *cm*. Das auf diese Weise gebildete ringförmige Gefäss wurde mit warmem Wasser angefüllt. Ein Quecksilberthermometer zeigte die jeweilige Temperatur des Wassers. Um eine chemische Einwirkung der Lösung auf die Kupferplatten zu vermeiden, wurden die mit der Flüssigkeit in Berührung kommenden Stellen stark versilbert und die Silberschichte ausserdem noch vergoldet. Da es sich mir darum handelte, mit möglichst geringen Temperaturdifferenzen zu arbeiten, ohne aber die Genauigkeit der Messung dadurch zu schädigen, wandte ich Thermoelemente, bestehend aus Neusilber und Eisen an. Dies wurde dadurch erreicht,

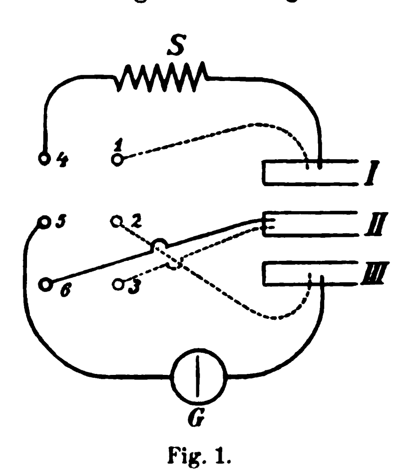


Fig. 1.

dass sowohl auf die Platte I als auch III in der Nähe der Mitte derselben je ein Neusilberdraht und ein Eisendraht aufgelöthet wurden. Die Platte II hingegen erhielt einen ungefähr 3 *cm* tiefen, radialen Einschnitt; durch denselben wurden die beiden Drähte isolirt eingeführt und am inneren Rande desselben in die Platte eingelöthet. Um nun in möglichst kurzer Zeit die Temperaturdifferenzen zwischen den einzelnen Platten messen zu können, wurde eine Anordnung getroffen, wie sie die beigefügte Zeichnung am einfachsten erläutern dürfte. In derselben bezeichnen I, II und III die drei Kupferplatten. Die punktirten Linien, welche von denselben ausgehen, sollen die Eisendrähte, die voll ausgezogenen die Neusilberdrähte versinnlichen. Die mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichneten

kleinen Kreise entsprechen den sechs Quecksilbernäpfen einer Poggendorf'schen Wippe. Dieselbe verbindet in der einen Lage 1 mit 2 und 4 mit 5 elektrisch leitend, in der andern Lage 2 mit 3 und 5 mit 6. Die Lagen der Wippe sollen mit *a* und *b* bezeichnet werden. Durch die Lage *a* werden die Löthstellen der Platten I und III, durch die Lage *b* jene der Platten II und III zu einem Thermoelemente vereinigt. *S* ist ein Siemens'scher Stöpselrheostat, welcher gestattet, Widerstände, von Einheit zu Einheit weitergehend, bis zu 2000 *S.-E.* einzuschalten. Der Zweck desselben wird später ersichtlich werden. *G* ist ein empfindliches Spiegelgalvanometer mit Fernrohrablesung, welches ungefähr 110 *S.-E.* Widerstand besass. Diese Anordnung hat hauptsächlich den Zweck, jede Einwirkung, welche eine elektromotorische Kraft des Plattenpaares I—II auf das Galvanometer geltend machen könnte, auszuschliessen. Es hat sich nämlich, wie zu erwarten war, gezeigt, dass bei Einführung von Lösungen und Säuren zwischen I und II elektromotorische Kräfte entstanden, die den Thermostrom nicht nur störten, sondern ihn häufig um mehr als das Hundertfache überwogen. Da nun bei der Lage *a* der Wippe die Quecksilbernäpfe 3 und 6 der Platte II, bei der Lage *b* hingegen die Näpfe 1 und 4 der Platte I ohne jede leitende Verbindung mit dem Galvanometer *G* sind, da ferner die Platten II und III durch die dazwischen liegende Glasplatte vollständig von einander isolirt sind, so geht bei der Lage *a* nur der Thermostrom, welchen die Temperaturdifferenz zwischen I und III bewirkt, bei der Lage *b* jener der Platten II und III durchs Galvanometer. Damit ist eine rasch aufeinanderfolgende Messung der Stärke beider Thermoströme ermöglicht.

Der Verlauf einer jeden Messung war folgender. Das Plattensystem II—III wurde horizontal aufgestellt, die Platte I, unterstützt von den drei Glasklötzchen, centrisch darübergelegt, die Flüssigkeit zwischen I und II derart eingefüllt, dass sie den Rand der Platten etwas überragte, und sodann das Ringgefäss der oberen Platte mit Wasser von ungefähr 50° gefüllt; gleichzeitig wurde die Platte III von unten mit kaltem Wasser bespült, welches die Temperatur dieser Platte auf ungefähr 15° constant erhielt. Die Temperatur des Wassers im oberen Gefässe sank, wie leicht zu begreifen, sehr rasch auf etwa 45° herab nahm

aber in ihrem Gefälle dann bedeutend ab, so dass von 40° angefangen, jede weitere Temperaturerniedrigung um 1° ungefähr eine Minute in Anspruch nahm. Bis das Thermometer diesen Punkt erreicht hatte, waren auch gewöhnlich sämmtliche Unregelmässigkeiten im Temperaturgefälle innerhalb des Plattensystems so ausgeglichen, dass die Messung ihren Anfang nehmen konnte.

Zu diesem Zwecke wurde der Widerstand *S* so lange verändert, bis die beiden Thermoströme, welche bei den verschiedenen Lagen der Wippe durchs Galvanometer geschickt wurden, denselben Ausschlag lieferten. Diese Einstellung war sehr rasch und mit genügender Genauigkeit auszuführen, indem man bloss darauf zu achten hatte, ob bei rascher Umschaltung der Wippe die Lage der Galvanometernadel geändert wurde oder nicht. Dabei war die Empfindlichkeit derart, dass man eine Verschiedenheit der Stromstärken von 1% noch sehr deutlich wahrnehmen konnte. Der Widerstand *w*, welchen der Rheostat *S* angab, wurde hierauf notirt. Derartige Messungen wurden nun im Laufe der Zeit, während welcher das Thermometer von 40° auf 35° sank, fünf vorgenommen, und zwar die erste zwischen 40° und 39°, die zweite zwischen 39° und 38° u. s. w. Die fünf Werthe innerhalb des bewussten Intervalles waren gewöhnlich um 1—2% von einander verschieden, was hauptsächlich von der Änderung der Wärmeleitungsfähigkeit der Flüssigkeit und des Glases mit der Temperatur herrührte. Der Mittelwerth sämmtlicher wurde sodann zur weiteren Rechnung benützt.

Die Wärmeleitungsfähigkeit einer Flüssigkeit im Vergleiche zu der des Wassers ergibt sich nun folgendermassen. Wegen der grossen Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers gegenüber derjenigen der in Betracht kommenden Flüssigkeiten und des Glases können wir annehmen, dass eine jede Kupferplatte in allen ihren Punkten dieselbe Temperatur besitzt. Wegen der langsamen Temperaturerniedrigung der Platte I ist es erlaubt, den jeweiligen Wärmezustand als einen stationären anzusehen, und schliesslich ist es ein unerheblicher Fehler, wenn wir bei den geringen Temperaturdifferenzen von circa 10° innerhalb der Flüssigkeit und der Glasplatte ein lineares Temperaturgefälle voraussetzen. Die den Platten I, II und III entsprechenden Temperaturen seien u_1, u_2 und u_3; die Wärmeleitungsfähigkeit der

Flüssigkeit sei k, die der Glasplatte K, die Dicke der Flüssigkeitsschichte δ_1, die der Glasplatte δ_2, der Widerstand des Galvanometers W, der Widerstand des Rheostaten w. Es besteht die Gleichung

$$k\frac{u_1-u_2}{\delta_1}=K\frac{u_2-u_3}{\delta_2}$$

oder

$$k=K\frac{\delta_1(u_2-u_3)}{\delta_2(u_1-u_2)}. \qquad 1)$$

Da die elektromotorischen Kräfte der Thermoelemente den Temperaturdifferenzen proportional sind, so besteht für unseren speciellen Fall, indem wir durch das entsprechende w zwei gleiche Stromstärken hergestellt haben, die Gleichung

$$\frac{u_1-u_3}{W+w}=\frac{u_2-u_3}{W}.$$

Diese Gleichung ist erlaubt, da der Widerstand der Thermoelemente und der Zuleitungsdrähte gegenüber W, welches, wie bereits erwähnt, ungefähr 110 *S.-E* betrug, vernachlässigt werden kann. Die letzte Gleichung lässt sich ohne Schwierigkeit in folgende umwandeln

$$\frac{u_1-u_2}{u_2-u_3}=\frac{w}{W}.$$

Mit Benützung derselben lässt sich dann Gleichung 1) folgendermassen schreiben:

$$k=K\frac{\delta_1 W}{\delta_2 w}.$$

Hat sich nun für das Wasser ergeben

$$k'=K\frac{\delta_1 W}{\delta_2 w'},$$

so erhalten wir für das Verhältniss zwischen der Leitungsfähigkeit einer Flüssigkeit und der des Wassers die einfache Gleichung

$$\frac{k}{k'} = \frac{w'}{w}.$$

Damit ist die Einfachheit und Leichtigkeit unserer Methode wohl am deutlichsten charakterisirt.

Bei der praktischen Anwendung derselben wurde so vorgegangen, dass der Werth w' für das Wasser nicht etwa ein für allemal, sondern bei der Untersuchung einer jeden neuen Flüssigkeit von Neuem bestimmt wurde, indem ja nicht zu erwarten war, dass die eingekittete Glasplatte durch den fortgesetzten Gebrauch keine Störung erleide. Es war auch in der That im Verlauf der Untersuchungen einigemal nothwendig, das Plattensystem II—III auseinander zu nehmen und die Glasplatte von Neuem einzukitten. Was die Genauigkeit der einzelnen Resultate betrifft, so liess dieselbe bei sorgfältiger Handhabung des Apparates nichts zu wünschen übrig. Es wichen die einzelnen Werthe selten um mehr als 1°/₀ vom Mittelwerthe ab, so dass bei den meisten Flüssigkeiten drei Messungen genügten, um von der Richtigkeit des gefundenen Werthes überzeugt zu sein.

Es fragt sich nun, ob der störende Einfluss der Temperatur der Umgebung, der Unregelmässigkeiten des Wärmestromes an der Peripherie der Platten, der Glasklötzchen, der Strahlung innerhalb der Flüssigkeit und der Glasplatte auch ohneweiters vernachlässigt werden kann. Würde es sich um die Bestimmung der absoluten Wärmeleitungsfähigkeit handeln, so wäre dieser Einwurf allerdings gerechtfertigt, indem diese Störungen das Resultat nicht selten um mehr als 1°/₀ ändern würden. Vollständig vernachlässigen können wir aber dieselben bei relativen Messungen, da sie hier nur als Glieder höherer Ordnung auftreten, mithin innerhalb des Beobachtungsfehlers liegen.

Untersucht wurden Lösungen von KHO, KCl, $NaCl$, $BaCl_2$, $SrCl_2$, $CaCl_2$, $MgCl_2$, $ZnCl_2$, KNO_3, $NaNO_3$, $Sr(NO_3)_2$, $Pb(NO_3)_2$, K_2SO_4, Na_2SO_4, $MgSO_4$, $CuSO_4$, $ZnSO_4$, ferner HCl und H_2SO_4 in verschiedenen Concentrationen. Dabei beziehen sich die Messungen auf eine mittlere Temperatur von 32°.

Die Ergebnisse sind in folgender Tabelle zusammengestellt. In derselben enthält die erste Spalte den Procentgehalt der Lösung an wasserfreiem Salze, die zweite das Wärmeleitungs-

vermögen im Vergleich zu dem des Wassers, welches gleich 100 gesetzt ist.

Substanz		k	Substanz		k
	H_2O	100	22 %	$NaNO_3$	94·1
42 %	KHO	90·6	36	$Sr(NO_3)_2$	92·3
21	„	95·5	36	$Pb(NO_3)_2$	92·8
20	KCl	92·0	10	K_2SO_4	99·3
25	NaCl	93·9	10	Na_2SO_4	99·8
12·5	NaCl	96·8	22	$MgSO_4$	97·5
21	$BaCl_2$	96·3	18	$CuSO_4$	95·1
25	$SrCl_2$	94·6	32	$ZnSO_4$	91·5
30	$CaCl_2$	90·7	16	„	95·3
15	„	95·4			
22	$MgCl_2$	89·0	38	HCl	72·6
11	„	94·9	25	„	79·4
35	$ZnCl_2$	83·7	12·5	„	87·0
17·5	„	91·5	90	H_2SO_4	58·4
20	KNO_3	92·2	60	„	72·2
10	„	97·4	30	„	85·8
44	$NaNO_3$	90·4			

Diese Tabelle ergibt erstens das wichtige Resultat, dass sämmtliche Lösungen die Wärme schlechter leiten als das Wasser, zweitens können wir die Leitungsfähigkeit als eine lineare Function des Salzgehaltes darstellen, indem die vorkommenden Abweichungen alle innerhalb des Beobachtungsfehlers liegen, u. zw. ist die Verminderung der Leitungsfähigkeit dem Salzgehalte direct proportional. Wir können daher die Leitungsfähigkeit einer Lösung in folgende Formel fassen:

$$k = k'(1-\alpha p),$$

wobei k' die Leitungsfähigkeit des Wassers, p den Procentgehalt der Lösung darstellt, während α eine von der Natur des Salzes abhängige Constante ist. In folgender Tabelle sind die Werthe von α für die verschiedenen Salze zusammengestellt.

Salz	$\alpha.10^5$	Salz	$\alpha.10^5$
KHO	221	$SrCl_2$	216
KCl	400	$CaCl_2$	309
NaCl	248	$MgCl_2$	488
$BaCl_2$	176	$ZnCl_2$	473

Salz	$\alpha.10^5$	Salz	$\alpha.10^5$
KNO_3	347	$MgSO_4$	144
$NaNO_3$	235	$CuSO_4$	272
$Sr(NO_3)_2$	214	$ZnSO_4$	275
$Pb(NO_3)_2$	200	H_2SO_4	464

Das Kalium- und Natriumsulfat, sowie die Salzsäure wurde in dieser Tabelle weggelassen, u. zw. die ersten beiden Salze desshalb, weil sie sich nur in so geringer Menge lösen, dass das α nicht sicher bestimmt werden kann. Bei der Salzsäure hingegen sind die Abweichungen der Wärmeleitungsfähigkeit von einer linearen Function des Procentgehaltes so beträchtlich, dass sie den Beobachtungsfehler bei Weitem überschreiten.

Es ist vielleicht bemerkenswerth, dass für alle Salze das α von derselben Grössenordnung ist.

Bekanntlich hat Herr H. F. Weber[1] folgenden Satz aufgestellt: Durchsichtige, nichtmetallische Flüssigkeiten haben bei gleicher Temperatur nahezu die gleiche Temperaturleitungsfähigkeit. Zur Prüfung dieses Gesetzes war es vorerst nöthig, die specifischen Wärmen der untersuchten Lösungen zu bestimmen. Das Material dazu entnahm ich den „Physikalisch-chemischen Tabellen von Landolt und Börnstein“ und der Arbeit des Herrn J. C. Marignac „Sur les chaleurs spécifiques des solutions salines“.[2] Es wurde für die specifische Wärme die Näherungsformel

$$c = 1 - \gamma p$$

aufgestellt, wobei p wieder den Procentgehalt der Lösung an wasserfreiem Salze bezeichnet. Folgende Tabelle ist derart zusammengestellt, dass die erste Spalte die Menge des Salzes und Wassers der Lösung in Äquivalenten angibt, die zweite die specifische Wärme, die dritte den der ersten Spalte entsprechenden Procentgehalt der Lösung an wasserfreiem Salze und die vierte das γ.

Lösung	c	%	γ
KHO + 30 H_2O	0·876	9·4	0·0132
KCl + 15	0·761	21·6	0·0111
NaCl + 10	0·791	20·2	0·0103

[1] Wied. Ann., X, S. 317.

[2] Ann. d. chim (5), VIII, 1876, p. 410ff.

Lösung		c	%	γ
$BaCl_2$	+ 50 H_2O	.......0·780	18·8	0·0117
$SrCl_2$	+ 50	.......0·815	15·0	0·0123
$CaCl_2$	+ 50	.......0·851	11·0	0·0135
$MgCl_2$	+ 50	.......0·864	9·6	0·0142
$ZnCl_2$	+ 50	.......0·8842	13·2	0·0088
KNO_3	+ 25	.......0·833	18·4	0·0091
$NaNO_3$	+ 10	.......0·769	32·1	0·0072
$Sr(NO_3)_2$	+ 50	.......0·8169	19·0	0·0096
$Pb(NO_3)_2$	+ 50	.......0·750	26·9	0·0093
Na_2SO_4	+ 65	.......0·892	10·8	0·0100
K_2SO_4	+ 100	.......0·900	8·8	0·0114
$MgSO_4$	+ 20	.......0·744	25·1	0·0102
$CuSO_4$	+ 50	.......0·850	10·5	0·0143
$ZnSO_4$	+ 50	.......0·842	15·2	0·0104
HCl	+ 10	.......0·749	20·9	0·0120

Für die Schwefelsäure ist die Annahme einer linearen Function zwischen specifischer Wärme und Concentration nicht gestattet. Es wurden daher die Werthe

	c	%
H_2SO_4	0·3363	100
„ + 5 H_2O.........	0·5833	52·1
„ + 50 „	0·9155	9·8

zur Ableitung folgender zwei Formeln benützt:

$$c = 1-0\cdot00948\ p+0\cdot0000284\ p^2,$$
$$c = 1-0\cdot0088\ \ p+0\cdot0000146\ p^2.$$

Dabei gilt die erste Formel für eine Concentration zwischen 52·1% und 100%, die zweite zwischen 9·8% und 52·1%.

Wir haben nun den nöthigen Stoff, um folgende Tabelle zusammenstellen zu können. In derselben bedeutet k das Wärmeleitungsvermögen, ρ das specifische Gewicht der Lösung, die übrigen Bezeichnungen sind bereits bekannt.

	Lösung	k	ρ	c	$\rho.c$	$\eta = \frac{k}{\rho.c}$
	H_2O............	100	1	1	1	100
10%	KHO	97·8	1·083	0·868	0·939	104
10	KCl	96·0	1·066	0·889	0·974	101
20	„	92·0	1·136	0·778	0·883	104

	Lösung	k	ρ	c	$\rho.c$	$\eta = \frac{k}{\rho.c}$
10	NaCl	97·5	1·073	0·897	0·961	101
20	„	95·0	1·151	0·794	0·914	104
10	$BaCl_2$	98·2	1.094	0·883	0 965	102
20	„	96·5	1·205	0·766	0·923	105
10	$SrCl_2$	97·8	1·093	0·877	0·957	102
20	„	95·7	1·199	0·754	0·903	106
10	$CaCl_2$	96·9	1·087	0·865	0·940	103
10	$MgCl_2$	95·1	1·086	0·858	0·931	102
10	$ZnCl_2$	95·3	1·091	0·912	0·995	96
10	KNO_3	96·5	1·064	0·909	0·967	100
20	„	93·1	1·135	0·818	0·928	100
10	$NaNO_3$	97·7	1·067	0·928	0·989	99
20	„	95·3	1·141	0·856	0·977	98
30	„	93·0	1·223	0·784	0·959	97
10	$Sr(NO_3)_2$	97·9	1·085	0·904	0·981	100
20	„	95·7	1·181	0·808	0·954	100
10	$Pb(NO_3)_2$.........	98·0	1·087	0·907	0·985	99
20	„	96·0	1·190	0·814	0·968	99
30	„	94·0	1·314	0·721	0 947	99
10	K_2SO_4	99·3	1·083	0·886	0·958	104
10	Na_2SO_4	99·8	1·092	0·900	0·983	102
10	$MgSO_4$...........	98·6	1·105	0·898	0·992	99
20	„	97·1	1·221	0·796	0·972	100
10	$CuSO_4$...........	97·3	1·103	0 857	7·945	103
10	$ZnSO_4$...........	97·3	1·108	0·896	0·992	98
20	„	94·5	1·236	0·792	0·978	97
10	HCl	89·6	1·049	0·880	0 922	97
20	„	82·4	1·100	0·760	0·836	99
10	H_2SO_4	95·4	1·068	0·913	0·975	98
20	„	90·7	1·143	0·830	0·948	96
30	„	86·1	1·223	0·749	0·916	94
40	„	81·4	1·307	0·671	0·876	93
50	„	76·8	1·399	0·597	0·834	92
60	„	72·2	1·503	0·533	0·792	91
70	„	67·5	1·616	0·476	0·769	88
80	„	62·9	1·734	0·423	0·734	86
90	„	58·2	1·820	0·377	0·686	85

Es bestätigt sich also das Weber'sche Gesetz so gut, als man nur erwarten kann. Während bei Herrn H. F. Weber die Werthe des η für die verschiedenen Flüssigkeiten zwischen

0·0769 und 0·0545 schwanken, liegen unsere Werthe zwischen 106 und 85. Die Verschiedenheit der Grössenordnung in den Zahlen rührt daher, weil Herr Weber für k die absoluten, während wir bloss relative Werthe setzten. Auch bezüglich des Einflusses der inneren Reibung auf die Wärmeleitungsfähigkeit sind unsere Resultate, wie das Beispiel der Schwefelsäure zeigt, jenen analog. Doch dürfte, wie schon Herr Weber bemerkt, die innere Reibung nicht die einzige störende Ursache des η sein, da bei verschiedenen Lösungen, welche sich ebenfalls durch grosse Zähigkeit auszeichnen, wie die Lösungen von $NaNO_3$, $Pb(NO_3)_2$, $ZnSO_4$ u. s. w. keine merkbare Störung des η vorhanden ist.

Ausser solchen Lösungen, die nur ein Salz enthielten, untersuchte ich auch einige Lösungsgemische. Es ergab sich dabei folgendes Gesetz:

Ein in Wasser gelöstes Salzgemenge erniedrigt die Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers um einen Betrag, welcher gleich ist der Summe der Verminderungen, die jedes einzelne Salz für sich bewirkt.

Zur Verdeutlichung und Bestätigung dieses Gesetzes sind in folgender Tabelle die gemessenen und berechneten Wärmeleitungsfähigkeiten einiger Mischungen zusammengestellt.

				Beobachtet	Berechnet
10%	$NaCl$	+ 10%	KCl	94·7	93·5
12	$CaCl_2$	+ 7	$BaCl_2$	94·7	95·1
10	KNO_3	+ 20	$NaNO_3$	92·8	91·8
16	$Pb(NO_3)_2$	+ 18	$Sr(NO_3)_2$	92·9	92·9
8	$CuSO_4$	+ 12	$ZnSO_4$	93·8	94·5

Wie man sieht, stimmen die Zahlen sehr gut überein.

Bevor ich zu jener Art der Messung schritt, wie sie im Vorhergehenden beschrieben ist, machte ich eine Reihe von Untersuchungen derart, dass ich die Ausschläge des Galvanometers, welche die Thermoströme verursachten, ablas, daraus die Temperaturdifferenzen der Platten und weiters die Leitungsfähigkeit der Lösung wie oben berechnete. Auch waren bei diesen Untersuchungen die Kupferplatten nicht vergoldet, sondern mit einer dünnen Schellackschichte überzogen. Es wurde jede Lösung drei-

mal untersucht und daraus der Mittelwerth der Wärmeleitungsfähigkeit bestimmt. Die einzelnen Messungen wichen ebenfalls selten um mehr als 1% vom Mittelwerthe ab. In folgender Tabelle sind die Resultate, welche ich auf diese Art erhielt, zusammengestellt.

Substanz		k	Substanz		k
	H_2O	100	14·5%	$MgCl_2$	91·7
40 %	KBr	81·1	20	KNO_3	92·8
60	KJ	65·1	10	„	97
40	„	77·8	40	$NaNO_3$	92·7
20	„	86·8	20	„	94·9
25	NaCl	92·3	40	$Sr(NO_3)_2$	92·8
12·5	„	96·4	20	„	96·4
40	NaBr	88·9	10	Na_2SO_4	99·2
20	„	93	22	$MgSO_4$	97·5
30	$CaCl_2$	89·4	20	K_2CO_3	94·7
15	„	95·4	10	Na_2CO_3	96·8
29	$MgCl_2$	85·4			

Auch diese Tabelle enthält nach meinem Dafürhalten keine Angaben, welche über 1% vom wahren Werthe abweichen, wie schon jene Lösungen zeigen, welche auch nach der früher genannten Methode untersucht wurden. Auszunehmen sind bloss das Bromkalium, Jodkalium und Bromnatrium. Es wurden nämlich bei der Herstellung der Lösungen dieser Salze, die bekanntlich sehr hygroskopisch sind, die entsprechenden Salzmengen abgewogen, ohne hinterher zur Controle das specifische Gewicht der Lösung zu bestimmen. Es dürfte daher der angegebene Procentgehalt genannter Lösungen nicht richtig sein. Immerhin hielt ich es für erlaubt, diese Lösungen mit anzuführen, weil sie ebenfalls als Belege für die Ansicht gelten können, dass alle Salzlösungen die Wärme schlechter leiten als das Wasser.

Der Tabelle auf Seite 254 können wir jetzt noch folgende Werthe hinzufügen:

Lösung		k	ρ	c	$\rho.c$	$\eta = \frac{k}{\rho.c}$
10%	K_2CO_3	97·4	1·093	0·887	0·968	101
10	Na_2CO_3	96·8	1·106	0·910	1·006	96

Auch diese Werthe bilden keine Ausnahme von der Regel.

Zur Ergänzung des bereits Erwähnten erlaube ich mir, noch eine Reihe von Resultaten anzufügen, die ich anfangs, als ich oben genannte Messungen noch nicht gemacht hatte, gar nicht zu veröffentlichen gedachte. Im Februar und März des Jahres 1889 wiederholte ich nämlich im physikalischen Institute zu Berlin die Weber'schen Messungen der Wärmeleitungsfähigkeit von Flüssigkeiten und knüpfte daran die Untersuchung einer Reihe von Lösungen nach einer ziemlich ähnlichen Methode, welche in Folgendem beschrieben werden soll.

Bei der Weber'schen Methode erregte mir hauptsächlich folgende Thatsache Bedenken. Es ist kaum zu vermeiden, dass sich die obere Kupferplatte, aus deren Temperaturänderungen die Wärmeleitungsfähigkeiten bestimmt werden, mit Wasser beschlägt, sobald ihre Temperatur unter den Thaupunkt herabgesunken ist, was natürlich den regelmässigen Verlauf der Untersuchung beträchtlich stört. Ein genaues Resultat lässt sich also nur dann erwarten, wenn man die Temperaturänderungen der oberen Platte nicht weiter als bis zum Thaupunkt verfolgt. Dadurch wird aber die Beobachtungszeit ganz bedeutend abgekürzt, indem das Intervall zwischen Zimmertemperatur und Thaupunkt sehr rasch durcheilt ist.

Um mich dieses Übelstandes zu entledigen, machte ich folgende Anordnung. Auf drei in einer horizontalen Ebene befindliche Holzspitzen wurde eine Kupferplatte von 1 *cm* Dicke und 10 *cm* Durchmesser gelegt. In dieselbe war ein dünner Kupfer- und Eisendraht eingelöthet. Auf diese Platte wurden drei kleine Glasstückchen von 2 *cm* Dicke gelegt, darauf kam dann eine zweite Kupferplatte, welche in ihrer Beschaffenheit und ihren Dimensionen der ersten vollkommen gleich war und in der Mitte zur Einfüllung der Flüssigkeit ein kleines Loch hatte. Die Drähte der oberen und der unteren Platte waren mit einem Spiegelgalvanometer mit Fernrohrablesung zu einem Thermoelemente verbunden.

Jeder Versuch wurde nun so durchgeführt, dass zuerst die untere Platte auf ungefähr 10° abgekühlt, die obere auf ungefähr 45° erwärmt wurde. Nachdem dann die Flüssigkeit eingefüllt war, wurde der Gang des Galvanometers beobachtet.

Bei der Berechnung des Beobachtungsmaterials ging ich nun folgendermassen vor. Es sei Δ die Dicke, F die Grundfläche,

k das Wärmeleitungsvermögen der Flüssigkeitslamelle, F_1 die freie Oberfläche, P das Gewicht einer Kupferplatte, C die specifische Wärme des Kupfers, u sei allgemein die Temperatur an einem beliebigen Punkte der Flüssigkeit, u_1 die Temperatur der oberen, u_2 die der unteren Kupferplatte, u_0 jene der Umgebung, schliesslich sei h eine Constante. Nach unserer Annahme gehe die Wärmebewegung bloss in der Richtung der Achse des Plattensystems vor sich, so dass dieselbe durch die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = m \frac{d^2u}{dx^2} \tag{1}$$

charakterisirt ist, wobei die Buchstaben die bekannte Bedeutung haben. Da die Wärmeleitungsfähigkeit des Kupfers im Vergleich zu jener der in Betracht kommenden Flüssigkeiten bedeutend überwiegt, so können wir die Temperatur an sämmtlichen Stellen einer Kupferplatte für gleichwerthig ansehen und gelangen daher zu folgenden Bedingungsgleichungen. Für $x = 0$ ist $u = u_1$ und

$$PC\frac{du_1}{dt} = hF_1(u_0 - u_1) + kF\frac{du}{dx_{=0}}\,. \tag{2}$$

Für $x = \Delta$ ist $u = u_2$ und

$$PC\frac{du_2}{dt} = hF_1(u_0 - u_2) - kF\frac{du}{dx_{=\Delta}}\,. \tag{3}$$

Ein particuläres Integral der Gleichung 1) ist

$$u = e^{-\gamma t}\left[A \cos x\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right], \tag{4}$$

daher

$$u_1 = Ae^{-\gamma t} \tag{5}$$

$$u_2 = e^{-\gamma t}\left[A \cos \Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin \Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right]. \tag{6}$$

Ferner ist

$$\frac{du}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}\left[A \cos x\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B \sin x\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right] \tag{7}$$

$$\frac{du_1}{dt} = -\gamma Ae^{-\gamma t} \tag{8}$$

$$\frac{du_2}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t}\left[A\cos\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B\sin\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right]. \qquad 9)$$

Weiters ist

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\, e^{-\gamma t}\left[-A\sin x\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B\cos x\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right], \qquad 10)$$

also

$$\frac{du}{dx_{=0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\, e^{-\gamma t} B, \qquad 11)$$

$$\frac{du}{dx_{=\Delta}} = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}\, e^{-\gamma t}\left[-A\sin\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + B\cos\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right]. \qquad 12)$$

Setzen wir nun der Einfachheit halber

$$u_0 = 0, \qquad \frac{hF_1}{PC} = a, \qquad \frac{kF}{PC} = b,$$

so können wir die Gleichungen 2) und 3) einfacher so schreiben:

$$\frac{du_1}{dt} = -au_1 + b\frac{du}{dx_{=0}}, \qquad 13)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -au_2 - b\frac{du}{dx_{=\Delta}}. \qquad 14)$$

Setzen wir in diese Gleichungen jene Werthe ein, welche aus den Gleichungen 5), 6), 8), 9), 11) und 12) folgen, so gestaltet sich Gleichung 13) folgendermassen:

$$-\gamma A e^{-\gamma t} = -aAe^{-\gamma t} + b\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\, e^{-\gamma t} B,$$

woraus wir nach leichter Reduction erhalten

$$A = \frac{b\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{a-\gamma} B. \qquad 15)$$

Unter Annahme dieses Werthes von A wird aus Gleichung 6)

$$u_2 = Be^{-\gamma t}\left[\frac{b\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{a-\gamma}\cos\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}} + \sin\Delta\sqrt{\frac{\gamma}{m}}\right],$$

aus Gleichung 9)

$$\frac{du_2}{dt} = -\gamma e^{-\gamma t} B \left[\frac{b\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{a-\gamma} \cos \Delta \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + \sin \Delta \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right]$$

und aus Gleichung 12)

$$\frac{du}{dx_{=\Delta}} = B\sqrt{\frac{\gamma}{m}} e^{-\gamma t} \left[-\frac{b\sqrt{\frac{\gamma}{m}}}{a-\gamma} \sin \Delta \sqrt{\frac{\gamma}{m}} + \cos \Delta \sqrt{\frac{\gamma}{m}} \right].$$

Diese Werthe, in Gleichung 14) eingesetzt, ergeben dann eine Gleichung, aus welcher sich γ bestimmen lässt. Dieselbe lautet in ihrer einfachsten Form

$$-\frac{2b}{\Delta} y = \frac{a^2 - \frac{b^2 + 2am}{\Delta^2} y^2 + \frac{m^2}{\Delta^4} y^4}{a - \frac{m}{\Delta^2} y^2} \operatorname{tg} y,$$

wobei

$$y = \Delta \sqrt{\frac{\gamma}{m}}.$$

Setzen wir hier überall die numerischen Werthe ein, so sind die Wurzeln durch Näherungsmethoden leicht zu bestimmen. Für unseren besonderen Fall der Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers z. B. erhalten wir

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_1 = 0\cdot00349, \quad \gamma_2 = 20\cdot1, \quad \gamma_3 = 87.$$

Das rasche Wachsen der γ hat zur Folge, dass wir für alle Zeiten, welche nicht unmittelbar bei $t = 0$ liegen, die höheren Glieder vernachlässigen können und einfach erhalten

$$u = A_0 + e^{-\gamma_1 t} \left[A_1 \cos x \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} + B_1 \sin x \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} \right].$$

Nun ist der grösste Werth von x gleich Δ, also abermals eine kleine Grösse, so dass wir

$$\cos x \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = 1 \quad \text{und} \quad \sin x \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}} = x \sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}$$

setzen können. Es wird daher

$$u = A_0 + e^{-\gamma_1 t}\left[A_1 + B_1 x\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}\right] = f + gx,$$

wenn

$$A_0 + A_1 e^{-\gamma_1 t} = f \quad \text{und} \quad B_1\sqrt{\frac{\gamma_1}{m}}\,e^{-\gamma_1 t} = g$$

gesetzt wird. Für $x = 0$ ist $u = u_1$, für $x = \Delta$ ist $u = u_2$, woraus folgt:

$$u = u_1 - \frac{u_1 - u_2}{\Delta}\,x,$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx_{=0}} = \frac{du}{dx_{=\Delta}} = -\frac{u_1 - u_2}{\Delta}.$$

Mit Benützung dieses Werthes gestalten sich nun die Gleichungen 2) und 3) folgendermassen:

$$\frac{du_1}{dt} = -a(u_1 - u_0) - b\,\frac{u_1 - u_2}{\Delta} \qquad 15)$$

$$\frac{du_2}{dt} = -a(u_2 - u_0) + b\,\frac{u_1 - u_2}{\Delta}. \qquad 16)$$

Subtrahiren wir 16) von 15), so

$$\frac{d(u_1 - u_2)}{dt} = -\left(a + \frac{2b}{\Delta}\right)(u_1 - u_2). \qquad 17)$$

Setzen wir

$$u_1 - u_2 = z \quad \text{und} \quad a + \frac{2b}{\Delta} = c,$$

so gibt die Gleichung 17) integrirt

$$lz = -ct + c_1,$$

wenn c_1 eine Constante.

Für $t = t_1, t_2, t_3$ habe z die Werthe z_1, z_2, z_3.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt dann

$$\left.\begin{aligned} l\frac{z_1}{z_2} &= -c(t_1 - t_2),\\ l\frac{z_2}{z_3} &= -c(t_2 - t_3). \end{aligned}\right\} \qquad 18)$$

Wählen wir nun die t so, dass

$$t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \tau$$

ist, so ist

$$l\frac{z_1}{z_2} = l\frac{z_2}{z_3} = c\tau,$$

folglich auch

$$l\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = c\tau.$$

Diese Gleichung benützte ich zur Berechnung der Wärmeleitungsfähigkeit des Wassers. Die z bedeuten die Temperaturdifferenzen, welche zu den entsprechenden Zeiten zwischen den beiden Kupferplatten vorhanden sind. Das Galvanometer zeigt dieselben proportionalen Werthe, und da nur Differenzen der z vorkommen, so ist es obendrein gleichgiltig, welches die Ruhelage des Galvanometers ist, vorausgesetzt, dass sie sich während des Versuches nicht ändert.

Es ist also zur numerischen Bestimmung des c alles gegeben. Da ferner

$$c = a + \frac{2b}{\Delta} = \frac{hF_1\Delta + 2kF}{PC\Delta},$$

so kann daraus k, d. i. die Wärmeleitungsfähigkeit der betreffenden Flüssigkeit leicht bestimmt werden.

Ich fand auf diese Weise für das Wärmeleitungsvermögen des Wassers bei einer mittleren Temperatur von 28° den Werth

$$k = 0\cdot090,$$

wenn *cm*, *g* und Minute als Einheiten gewählt werden.

Nach Herrn Weber's Untersuchungen würde dieser Temperatur eine Leitungsfähigkeit des Wassers von 0·0881 entsprechen. Dabei ist letzterer Werth allerdings durch eine vielleicht nicht gestattete Anwendung der Formel

$$k = k_0(1 + \alpha t)$$

berechnet worden, indem das α nur für ein Temperaturintervall von 4—25° bestimmt worden ist.

Da ich mich bei den übrigen untersuchten Flüssigkeiten begnügte, deren relative Leitungsfähigkeit im Vergleich zu jener

des Wassers zu bestimmen, so konnte ich die Methode noch bedeutend vereinfachen. Angenommen, wir hätten für das Wasser die Gleichung

$$l\frac{z_1}{z_2} = c\tau,$$

für eine andere Flüssigkeit

$$l\frac{z_1}{z_2} = c'\tau',$$

so folgt

$$\frac{c}{c'} = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{hF_1\Delta + 2kF}{hF_1\Delta + 2k'F} = \frac{p+q}{p+q'},$$

wenn

$$hF_1 + \Delta = p, \quad 2kF = q, \quad 2k'F = q'$$

gesetzt wird. Nun ist aber

$$\frac{p+q}{p+q'} = \frac{q}{q'} + \frac{p(q'-q)}{q'(q'+p)}.$$

Das zweite Glied dieser Summe ist im Vergleiche zum ersten sehr klein. Es beträgt z. B. bei allen von mir untersuchten Fällen nicht $^1/_5\,^0/_0$ des ersten Gliedes, so dass sein Werth innerhalb des Beobachtungsfehlers liegt und vernachlässigt werden kann. Wir können somit setzen

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{q}{q'} = \frac{k}{k'},$$

oder in Worten ausgedrückt: Es verhalten sich die Wärmeleitungsfähigkeiten zweier Flüssigkeiten wie umgekehrt die Zeiten, welche das Galvanometer braucht, um eine bestimmte Strecke der Scala zu durchlaufen.

Um bei der Benützung von Salzlösungen galvanische Ströme, welche durch Potentialdifferenzen der beiden Kupferplatten mit der Lösung hervorgerufen werden können, zu vermeiden, erhielten die Platten einen dünnen Schellacküberzug, der auf die Resultate keinen wahrnehmbaren Einfluss hatte.

In folgender Tabelle sind die Werthe der Leitungsfähigkeiten der untersuchten Lösungen zusammengestellt.

Lösung			k
H_2O			100
10 g KCl	+	100 g H_2O	98·8
20 „	+	„	94·3
30 „	+	„	92·3
10 NaCl	+	„	98·8
20 „	+	„	97·3
30 „	+	„	94·5
10 KNO_3	+	„	98·1
20 g KNO_3	+	100 g H_2O	94·0
30 „	+	„	92·7
20 $NaNO_3$	+	„	98·0
40 „	+	„	94·3
60 „	+	„	91·7
15 $NaC_2H_3O_2$	+	„	97·1
30 „	+	„	95·3

Da für jede Lösung mindestens drei Messungen gemacht wurden, und nur bei genügender Übereinstimmung derselben der richtige Werth für ermittelt galt, so glaube ich annehmen zu dürfen, dass keine der vorliegenden Zahlen um mehr als 1% vom wahren Werthe abweicht.

Um eine leichte Übersicht zu gewinnen, in wie weit die Werthe, welche nach den drei verschiedenen Methoden gefunden wurden, untereinander übereinstimmen, stellte ich folgende Tabelle zusammen. In derselben bezeichnen die Ziffern I, II, III die verschiedenen Methoden, in der Reihenfolge, wie sie oben angeführt wurden. Die letzte Spalte enthält Herrn Weber's Resultate, in entsprechender Weise umgerechnet.

Lösung	I	II	III	Weber
20% KCl	92·0	—	93·3	—
20 NaCl	95·0	94·0	95·2	93·9
30 $CaCl_2$	90·7	89·4	—	—
20 $MgCl_2$	90·2	89·5	—	—
20 KNO_3	92·2	92·8	93·7	—
40 $NaNO_3$	90·6	92·7	91·2	—
40 $Sr(NO_3)_2$	91·4	92·8	—	—
10 Na_2SO_4	99·8	99·2	—	—
22 $MgSO_4$	97·5	97·5	—	—
10 $CuSO_4$	97·3	—	—	96·9
30 $ZnSO_4$	91·8	—	—	92·3

Wie man sieht, stimmen die Resultate trotz der verschiedenen Messmethoden sehr gut überein.

Es ist uns zu zeigen gelungen, dass alle untersuchten Flüssigkeiten, wie verschieden sie auch in ihren chemischen Eigenschaften sind, in ihrem physikalischen Verhalten ohne Ausnahme allgemeinen Typen folgen.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 25 kr. = 4 RMk. 50 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. BAND. IV. bis VI. HEFT.

Jahrgang 1890. — April bis Juni.

(Mit 4 Tafeln und 14 Textfiguren.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1890.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 4. bis 6. Heftes April bis Juni 1890 des XCIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. IV. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

IX. SITZUNG VOM 17. APRIL 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft X (December 1889) des 98. Bandes, Abtheilung II. a., der Sitzungsberichte vor.

(Hiemit ist dieser Band in allen drei Abtheilungen vollständig erschienen.)

Die Kaiserliche Mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg übermittelt das Festprogramm zu dem am 7./19. Mai d. J. stattfindenden fünfundzwanzigjährigen Jubiläum der Präsidentschaft ihres gegenwärtigen Präsidenten.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Arbeit unter dem Titel: „Untersuchungen über die Tristome von *Coroskia budleoides* L."

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Zahlentheoretische Studien".

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Prag übersendet eine Arbeit von Julian Freydl aus dem chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz: „Über den Stickstoffabgang bei der Analyse von Guanidin- und Biguanidverbindungen nach der Methode von Will und Varrentrapp".

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet aus dem Laboratorium für angew. medicin. Chemie der k. k. Universität in Wien eine vorläufige Mittheilung: „Über das Lobelin", von Dr. Heinrich Paschkis, Privatdocent für Pharmakologie und Dr. Arthur Smita, Assistent am genannten Laboratorium.

Herr Prof. Dr. A. Grünwald in Prag übersendet folgende Mittheilung: „Über das sogenannte II. oder zusammengesetzte Wasserstoffspectrum von Dr. B. Hasselberg und die Structur des Wasserstoffes.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Hohlcylinder; durch äussere Kräfte erzeugte Deformationen und Spannungen“, von Prof. K. Fuchs in Pressburg.
2. „Beiträge zur Theorie des galvanischen Stromes. III. Über die Anwendung des zweiten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie auf moleculare und im Besonderen auf elektrolytische Vorgänge“, von Th. Gross, Docent an der technischen Hochschule in Berlin.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak überreicht den ersten Theil seiner Arbeit: „Über die Chloritgruppe“.

Das w. M. Herr Hofrath Director J. Hann überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Das Luftdruckmaximum vom November 1889 in Mittel-Europa, nebst Bemerkungen über die Barometermaxima im Allgemeinen“.

Das w. M. Herr Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. J. Janošík an der k. k. böhmischen Universität in Prag unter dem Titel: „Bemerkungen über die Entwicklung des Genitalsystems“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgefürte Arbeiten:

1. „Über das Phenol des Sassafrasöles“, von Dr. C. Pomeranz.
2. „Über methylirte Phloroglucine“, von A. Spitzer.

Das w. M. Herr Director E. Weiss spricht über den von Brooks am 20. März 1890 entdeckten teleskopischen Kometen, für welchen Herr Dr. F. Bidschof ein Elementensystem berechnet hat.

Bei dieser Gelegenheit erwähnt der Vortragende, dass Herr Spitaler den am 2. September 1888 von Barnard entdeckten

Kometen (1889 I) nach seiner Conjunction mit der Sonne am 28. März d. J. am grossen Refractor der Wiener Sternwarte wieder aufgefunden hat.

Das w. M. Herr Prof. V. v. Lang überreicht folgende Mittheilung: „Bemerkung zu der Theorie der atmosphärischen Elektricität des Hr. Arrhenius", von Anton Lampa.

Das c. M. Herr k. und k. Oberstlieutenant des Artilleriestabes Albert v. Obermayer überreicht eine Abhandlung: „Über eine mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundene Druckerscheinung".

Herr Dr. S. Oppenheim, Privatdocent für Astronomie an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Bahnbestimmung des Kometen 1846, VIII."

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Le Prince Roland Bonaparte, 1. Le Glacier de l'Aletsch et le Lac de Märjelen. Paris 1889; 4°. — 2. Le premier Établissement des Néerlandais à Maurice. Paris 1890; 4°.

Über eine mit der fortführenden Entladung der Elektricität verbundene Druckerscheinung

von

Albert v. Obermayer,
c. M. k. Akad.

(Mit 1 Textfigur.)

Die Entladung von Elektricität aus einer Spitze gegen eine mit Licopodium u. dergl. bestreute Platte bewirkt das Entstehen einer elektrischen Staubfigur, d. h. ein Theil des Pulvers wird in Gestalt einer scharf begrenzten Kreisfläche auf der Scheibe zum Haften gebracht, während der übrige Theil weggeblasen werden kann.

Bei einer Untersuchung über die fortführende Entladung der Elektricität hat Röntgen[1] gefunden, dass innerhalb des von der Staubfigur eingenommenen Raumes Papierschnitzel und Eiderdunen haften bleiben, während sie ausserhalb derselben weggeblasen werden. Durch Beleuchtung mit Lampenlicht wurde weiters erkannt, dass die Licopodiumschichte, welche die Staubfigur bildet, dichter und compacter sei als jene, welche rund herum auf der Platte durch Aufstreuen entstanden ist und sich wegblasen lässt.

Längere Zeit hiernach hat Holtz in seinen Versuchen über elektrische Schatten[2] darauf hingewiesen, dass ein Stück eines Seidenstoffes fest auf einer Metallplatte hafte, wenn aus einer Spitze Elektricität dagegen entladen werde.

---

[1] Röntgen, Pogg. Annalen, 1874, Bd. 151, S. 239.

[2] Elektrische Schattenbilder. Carl, Repertorium der Physik, 1881, Bd. XVI, S. 402.

Durch die vorangeführten und die während der Versuche über die Entladung der Elektricität aus Spitzen gemachten Beobachtungen bin ich veranlasst worden, Papier auf die Metallplatte des Apparates zur Entladung von Elektricität aus Spitzen gegen eine Platte[1] zu legen, welcher bei einer früheren Gelegenheit von mir und Herrn v. Pichler benützt wurde und dessen Beschreibung weiter unten ausführlicher gegeben werden soll. Auf der 50 *cm* im Durchmesser haltenden Platte hat die Entladung der von einer Influenzmaschine gelieferten Elektricität aus verschieden angeordneten Spitzen nicht nur einen Bogen, sondern ganze Lagen von Papier zum Haften gebracht; so konnten an die vertical gestellte Scheibe 1400 bis 2200 *g* Papier angelegt werden, was etwa 160 bis 200 übereinander gelegten Bogen Kleinconceptpapier entspricht.

Um eine Lage von 10 bis 40 Bogen Papier längs der Kupferplatte des Apparates fortzuziehen, sind unter Anwendung des Stromes zweier Influenzmaschinen unter günstigen Umständen bis zu 22 *kg* erforderlich. Da der Reibungscoëfficient der angewendeten Papiersorten auf der Kupferplatte zu 0·575 bis 0·650 gefunden wurde, belief sich der Druck, mit dem das Papier gegen die Kupferplatte gepresst wurde, auf nahe 34 *kg*. Die Spitzen waren gewöhnlich negativ elektrisch.

Mit kleineren Papierscheiben wurde weiters gefunden, dass im luftverdünnten Raume weit weniger Papier festgehalten werden kann als bei gewöhnlichem Luftdrucke, und dieser Umstand, sowie jener, dass Materialien, wie Pappendeckel, die nicht so biegsam wie Papier sind und sich der Kupferscheibe nicht so anschmiegen können, weit weniger fest haften, legten die Vermuthung nahe, dass der Luftdruck eine wichtige Rolle bei der in Rede stehenden Erscheinung spiele.

Es geht aber doch wieder nicht an, den Luftdruck als die alleinige Ursache des Haftens anzusehen, denn durch die Entladung aus Spitzen werden einerseits lockere Gewebe, wie weitmaschiger Organtine auf der Kupferscheibe, anderseits Papier auf einem Drahtnetze, mit allerdings weitaus kleineren Kräften festgehalten.

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCIII. S. 926, 1886.

Das Niederdrücken des Papiers, welches bei Beginn der Entladung so auffallend eintritt und mit dem Austreiben der Luft zwischen der Kupferplatte und den einzelnen Papierblättern verbunden sein mag, kann durch den elektrischen Wind nicht vermittelt werden. Die Geschwindigkeit von 2·5 *m*/sec ist viel zu gering hiezu.

Ein Windstrom eines Schiele'schen, mit einer halben Pferdekraft angetriebenen Ventilators, aus einer 3 *cm* weiten Öffnung, senkrecht auf die Kupferplatte auftreffend, ist nicht entfernt im Stande ein Haften des Papiers an der Kupferplatte durch Auspressen der Luft etwa hervorzubringen, wie die Entladung aus der Spitze, trotzdem die Windgeschwindigkeit eine so beträchtliche ist, dass die entgegen gehaltene Hand einen merkbaren Druck erfährt. Eine fast unmessbare Kraft reicht zur Verschiebung des Papiers auf der Kupferplatte aus.

Es scheint fast, als ob die Halbleiter, welche hier die Elektricität fortleiten, sich gegenseitig anziehen und auch von der Kupferplatte angezogen würden, an welche sie die Elektricität übertragen.

Es spricht für diese Anschauung die Thatsache, dass Papierschnitzel zwischen die Kupferscheibe und ein davorgespanntes Papier gebracht, sich senkrecht zu beiden einstellen, gewöhnlich an der Kupferplatte haftend, wenn aus Spitzen Elektricität gegen das Papier entladen wird. Jeder solche Papierstreif ist dann von einem Lichtbüschel umgeben. Ein Kautschukschlauch, welcher zwischen Scheibe und Papier hinabhängt, schwingt zwischen denselben wellenschlagend hin und her; ein langer Papierstreif zieht sich zu einer zwischen der Kupferplatte und dem Schirme verlaufenden Wellenlinie zusammen.

Zu diesen Erscheinungen gehören auch die von Herrn v. Pichler und mir erwähnten Anhäufungen von Russ beim Entladen hoch gespannter Elektricität durch Rauch, die Beobachtung von Rainy,[1] die Russdendriten von Ritter.[2]

---

[1] Beiblätter, IX, S. 472.

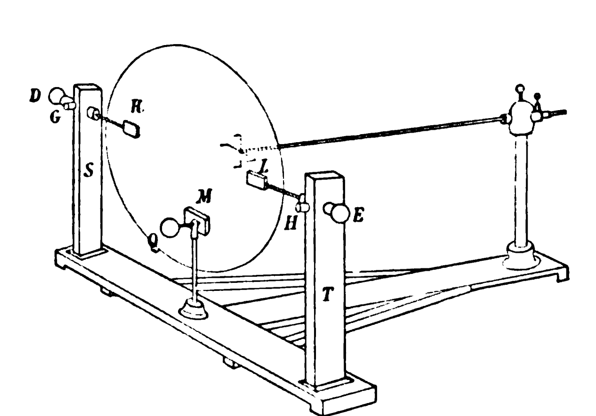
[2] Wiedemann, Galvanismus, I, S. 880.

Der Apparat zum Überströmen der Elektricität aus Spitzen gegen eine Platte.

Nachdem der mehrfach erwähnte Apparat sich nicht nur in den Versuchen, welche ich in Gemeinschaft mit Herrn v. Pichler ausführte, sondern auch bei vielen späteren Gelegenheiten als nützlich erwiesen hat, so gebe ich anbei eine Zeichnung desselben.

Die kreisförmige Platte ist aus Kupfer angefertigt worden, weil dieses Metall in Blechen von der erforderlichen Breite leicht

Fig. 1.



käuflich zu erhalten ist. Der Durchmesser der Platte beträgt 50 *cm.* Zwei diametral aufgelöthete Messingklötzchen *K*, *L* tragen die horizontale Achse *DE* der Scheibe. Dieselbe geht durch kurze Hartgummiröhren hindurch, welche die Isolirung von den hölzernen Tragsäulen *S*, *T* vermitteln und endet ausserhalb in Kugeln, welche zum Einstecken der Drähte angebohrt sind. Die Tragsäulen sind mittelst hölzerner Schrauben und Muttern an dem Querarme des Gestelles befestigt.

An der Rückseite der Kupferscheibe ist noch das Klötzchen *M* aufgelöthet, welches einen zur Scheibe senkrechten Draht trägt, der durch das Öhr einer, mittelst Glasfusses am unteren Querarme isolirten Messingfassung hindurchreicht und mittelst Feder

und einer verschraubbaren Kugel die Platte etwas zu neigen gestattet.

Auf dem senkrecht zum Querarme gestellten, durch hölzerne Spreizen verstärkten Längsarme ist eine Glassäule aufgesetzt, die mit ihrer unteren Holzfassung mittelst Schraube und Mutter an dem Längsarme befestigt ist und sich etwas verdrehen lässt.

Die Glassäule trägt einen Holzkopf, dessen Durchbohrung mit einer beiderseits hervorragenden Messingröhre ausgefüttert ist. Ihre Höhe ist so gewählt, dass eine in der Futterröhre verschiebbare, zweite längere Messingröhre, „der Spitzenträger“, gerade auf die Mitte der Kupferplatte trifft. Die Mitte der Glassäule steht von der Kupferplatte 70 *cm* ab. Der Spitzenträger ist ausserhalb mit einem isolirenden Handgriffe und auf der entgegengesetzten Seite mit einem Muttergewinde zum Einschrauben der Spitzenvorrichtungen versehen.

Durch eine Schraube mit rundem Knopfe, welche auf ein federndes Stück der Futterröhre wirkt, kann der Spitzenträger festgestellt werden. Auf die hervorragenden Theile der Futterröhre sind mit Hilfe von Ringen Drahtklemmen drehbar aufgesetzt.

Der in Rede stehende Apparat kann in der Stellung gebraucht werden, welche in der Figur gezeichnet ist; er kann aber auch so umgelegt werden, dass die Kupferplatte horizontal, der Spitzenträger vertical ist. Die kurzen Holzcylinder *G*, *H*, welche nahe dem oberen Ende in die Träger *S* und *T* eingesetzt sind, dienen dann als Stützpunkte.

Durch Verschrauben der Kugel *Q* kann die Platte um ihre horizontale Achse gedreht werden. Der Spitzenträger kann um die verticale Achse der Glassäule gedreht und so senkrecht zur Ebene der Platte gestellt werden.

Die Versuche im lufterfüllten Raume.

1. Die erste Versuchsreihe über das Haften von Papier an einer Metallscheibe, zufolge einer Entladung aus Spitzen, wurde bei vertical gestellter Scheibe, mit negativen Spitzen ausgeführt. Die zwei angewendeten Spitzen waren in eine Zinkblechscheibe von 125 *mm* Durchmesser, symmetrisch zum Mittelpunkte, in 40 *mm* Entfernung eingeschraubt. Die Spitzen waren auf circa

10 *cm* Entfernung von der Kupferscheibe eingestellt. Zu den Versuchen diente eine Doppelinfluenzmaschine. Die Papierblätter wurden lagenweise, mit den Händen ausgespannt gehalten, zwischen Spitze und Platte eingeschoben und blieben sogleich an der verticalen Scheibe haften. Wenn die Papierschichte schon aus etwa 120 bis 200 Bogen bestand, fiel sie beim Einführen einer neuen Lage ab. Die Menge des haftenden Papiers wurde durch Abwägen bestimmt.

Durch das Einschieben des Papiers erfährt das Potential eine beträchtliche Erhöhung, was am einfachsten an der Vergrösserung der Kundt'schen elektrischen Staubfigur erkannt wird, die zuerst auf der horizontal gestellten, blanken Kupferplatte und dann, nach dem Einlegen des Papiers, auf einem darüber gebreiteten schwarzen Papierbogen entstand. Im vorliegenden Falle besteht diese Figur aus zwei ellipsenähnlichen Flächen, die mit den grossen Achsen parallel gestellt sind, und die längs einer Geraden aneinander stossen.

2. Auf dem Spitzenträger wird eine Messingscheibe mit wulstförmigen Rändern von 38 *cm* Durchmesser aufgeschraubt. Dann wird ein Nebenschluss zu den beiden Platten hergestellt, innerhalb welchem eine Entladung aus einer Spitze gegen eine Platte stattfindet. In das elektrische Feld zwischen den beiden grossen Platten werden einzelne Papierblätter eingebracht. Dieselben haften nicht und zeigen das Bestreben, sich so einzustellen, dass sie die beiden Platten verbinden. Das Haften des Papiers ist hiernach an das Ausströmen der Elektricität aus einer Spitze gegen die Platte gebunden, auf welcher das Papier aufliegt.

3. Eine Zinkplatte von 50 *cm* Durchmesser, die in der Mitte durchbohrt war und daselbst ein kleines dickwandiges Röhrchen zum Einschieben und Feststellen einer Spitze eingeschraubt hatte, wurde mit dieser Vorrichtung nach abwärts auf horizontale Glasstäbe aufgelegt. Über dieser Platte wurde eine Messingplatte, mit Glasstäben isolirt, an dem Arme einer Waage aufgehangen, die eine entsprechend hohe Aufstellung erhalten hatte. Zu diesen beiden Platten wurde der Apparat mit Spitze—Kupferplatte als Nebenschluss aufgestellt. Die hiebei angewandte Spitze hatte dabei eine Entfernung von 10 *cm* von der Platte. Die Verbindung mit der beweglichen Platte geschah mit Hilfe eines Stückes sehr

feinen Drahtes. Zwischen den beiden grossen Platten herrscht die Potentialdifferenz, welche dem Überströmen der Elektricität im Nebenschlusse entspricht.

Die Anziehung zwischen Zink- und Messingplatte bei 15 *cm* Entfernung betrug 3·6 *g*.

Das Einschieben einer Spitze durch die Zinkplatte bis auf 12 *cm* von der Messingscheibe ergibt nach Beseitigung des Nebenschlusses, also bei Elektricitätsübergang, 2·7 *g* für die Anziehung zwischen den beiden Platten.

Von dem, an der Unterseite der beweglichen Messingplatte eingeschobenen, Papiere konnten unter diesen Umständen in drei aufeinanderfolgenden Versuchen 425, 460, 506 *g*, d. i. 39, 42, 46 Bogen zum Haften gebracht werden.

Das Haften des Papiers besteht hiernach in einer Wechselwirkung zwischen der beweglichen Platte, gegen welche die Entladung stattfindet und dem Papiere.

5. Es folgte nunmehr eine Versuchsreihe im luftverdünnten Raume, welche später beschrieben wird. Im heurigen Jahre wurden die Versuche wieder aufgenommen und hiezu 10 und 40 Bogen Klein-Conceptpapier und 10 Bogen gelbes satinirtes Packpapier, an einer Ecke mit einem zu einer Schlaufe gebogenen starken Seidenbande, mit Kleister zusammengeklebt. Diese Papierlagen konnten mittelst des Seidenschlaufes an einem zweckmässig gebogenen Haken aufgehangen werden, welcher von dem Arme einer starken Waage getragen wurde. Die Waage selbst war so hoch aufgestellt, dass das Papier gerade vor die Kupferplatte gehängt werden konnte.

Durch das Ausströmen der Elektricität aus Spitzen konnte das Papier zum Haften an der Kupferscheibe gebracht, und durch aufgelegte Gewichte eine tangentiale Verschiebung des Papiers längs der Platte erzielt werden.

Das Papier hielt beim Auflegen der ersten Gewichte fest, beim Annähern an die Grenze der Tragfähigkeit begann eine ruckweise Verschiebung, die von erneuertem Festhalten gefolgt war. Bei weiter fortgesetzter Belastung trat endlich ein vollständiges Abrutschen ein.

Ist das Papier vor der Kupferscheibe aufgehangen und wird durch Auseinanderziehen der Elektroden der Influenzmaschine

die fortführende Entladung aus den Spitzen eingeleitet, so ist ein deutliches Zusammendrücken des Papiers zu beobachten, welches von der Mitte gegen aussen hin fortschreitet. Bei 40 Bogen Papier tritt dabei wohl auch ein heftiges Sausen auf, welches sich in dem Maasse verringert, als das Papier sich glättet. Um das möglichst feste Haften zu erzielen, ist das Ausstreichen des Papiers zur Glättung etwaiger Falten sehr zweckmässig.

Nach dem Zusammenschieben der Elektroden der Influenzmaschine und dem Aufhören der Entladung aus der Spitze haftet das Papier insbesondere dann, wenn es glatt aufgelegen hatte, noch weiter, lässt sich aber durch tangentiales Verschieben leicht loslösen.

Mit den Messungen über das Gewicht zur tangentialen Verschiebung des Papiers längs der Platte habe ich noch Messungen der Stromstärke und Messungen der Potentialdifferenz verbunden, da die dazu verwendeten Apparate, einer anderen Versuchsreihe halber, gerade aufgestellt waren. Es wurde dadurch einige Controle des ziemlich unregelmässigen Vorganges, welcher das Haften des Papiers herbeiführt, erzielt.

Die Stromstärkemessungen wurden mit demselben höchst einfachen Galvanometer ausgeführt, welches auch bei den in Gemeinschaft mit Herrn v. Pichler[1] ausgeführten Versuchen Verwendung fand.

Zu der Potentialmessung wurde ein Elektrometer von Bichat und Blondlot[2] benützt, über dessen Leistungen ich bei einer späteren Gelegenheit Mittheilung zu machen gedenke. Von der Richtigkeit des angewandten Instrumentes wurde durch Messungen des Funkenpotentiales, für Schlagweiten zwischen 1 und 10 *mm* die Überzeugung gewonnen.

In den nachfolgend beschriebenen Versuchen sind bald eine, bald zwei nebeneinander gekuppelte Doppelinfluenzmaschinen verwendet worden.

Die Spitzen sind stets mit dem negativen Pole der Maschinen verbunden.

---

[1] Diese Berichte. Bd. XCIII, S. 926. 1886.

[2] Journal de Physique, 2e Ser., Tome V, p. 457.

Die Zahl der Spitzen ist von Eins auf Acht geändert worden und die Entfernung *d*, Spitze—Platte betrug 3, 5 und 7 *cm*, von der Kupferplatte aus gemessen.

Die Potentialdifferenzen sind in absoluten, elektrostatischen Einheiten angegeben, und zwar zuerst bei blanker Kupferplatte, V_0 und dann nach dem Auflegen des Papiers, V'.

Die Stromstärken sind in Theilstrichen des Galvanometerausschlages angegeben. Sie ändern sich kaum merklich, ob die Kupferscheibe blank oder mit 10 Bogen Papier belegt ist.

Die Belastung P zur tangentialen Verschiebung des Papiers ist in Kilogrammen angegeben.

Eine Spitze, eine Maschine, 10 Bogen Klein-Conceptpapier.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3 *cm*	69·28	87·40	18·12	62	5·0 *kg*

Zwei Spitzen, 20 *cm* von einander entfernt. 10 Bogen gelbes satinirtes Packpapier.

Eine Maschine.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3	54·01	82·05	28·04	61	16·7
5	69·71	87·29	17·58	61	17·5
7	85·01	99·48	14·47	61	20·7

Zwei Maschinen.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3	67·47	91·51	24·04	105	16·8
5	90·09	106·37	16·28	105	19·2
7	107·84	120·33	12·49	105	20·5

Vier Spitzen an den Ecken eines Quadrates von 14·2 *cm* Seitenlänge. Gelbes satinirtes Packpapier.

Eine Maschine.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3	39·18	58·17	18·99	63	18·6
5	53·78	68·85	15·07	62	20·0
7	65·14	78·11	12·97	63	22·0

Zwei Maschinen.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3 *cm*	50·91	75·19	24·28	115	16·0 *kg*
5	69·37	85·65	16·28	113	21·0
7	85·70	99·98	14·28	108	22·0

Acht Spitzen auf einem Ringe in 10 *cm* Entfernung von einander. Gelbes satinirtes Packpapier.

Eine Maschine.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3	31·11	47·11	16·00	—	13·0
5	41·38	55·46	14·08	—	16·5
7	52·46	64·86	12·40	—	17·0

Zwei Maschinen.

d	V_0	V'	$V'-V_0$	i	P
3	40·20	59·49	19·29	—	19·5
5	57·16	73·06	15·90	—	19·7
7	70·58	85·44	14·86	110	21·0

Trotz des bedeutenden Unterschiedes in Potentialdifferenz und Stromstärke, bei der Anwendung von einer oder zweier Doppelinfluenzmaschinen, weichen die zur tangentialen Verschiebung erforderlichen Gewichte bei gleichen Spitzendistanzen, insbesondere bei zwei und vier Spitzen nur sehr wenig von einander ab.

Auch unter Benützung der grossen vierscheibigen Influenzmaschine, mit den 130 *cm* im Durchmesser haltenden Kautschukscheiben,[1] wurde ein stärkeres Haften des Papiers nicht erzielt.

6. Um den Einfluss der Dicke der Papierschichte auf die zur tangentialen Verschiebung nöthige Kraft zu finden, wurden vier Spitzen an den Ecken eines Quadrates von 7·1 *cm* Seitenlänge und Klein-Conceptpapier benützt. Die Spitzen standen um 5 *cm* von der Platte ab und es wurde eine einzige Doppelinfluenzmaschine angewendet.

---

[1] Über einige elektrische Entladungserscheinungen und ihre photographische Fixirung. Diese Berichte, Bd. XCVIII, S. 421.

Die Potentialmessung ist bis nahe an die Grenze der Leistungsfähigkeit des Elektrometers fortgesetzt.

In der nachfolgenden Tabelle ist n die Anzahl der übereinandergelegten Papierbogen, V das beobachtete Potentiale in absoluten elektrostatischen Einheiten, ΔV die Differenz der aufeinanderfolgenden Potentiale, $\frac{\Delta V}{n}$ die Potentialänderung für einen Bogen Papier, P das Gewicht zur tangentialen Verschiebung in Kilogramm.

n	V	ΔV	$\frac{\Delta V}{n}$	P
0	56·15	—	—	—
10	73·75	17·60	1·76	10·5
40	105·97	32·22	1·07	13·2
60	127·91	21·94	1·10	9·2
80	—	—	—	6·7
100	—	—	—	5·3
160	—	—	—	4·7

Dicke Papierschichten haften weniger fest als dünne.

7. Um von der Grösse des Druckes eine Vorstellung zu erhalten, mit welcher das Papier gegen die Kupferscheibe gepresst wird, damit die eben angeführten Kräfte zur tangentialen Verschiebung erforderlich sind, wurde der Reibungscoëfficient des Papiers auf der Kupferscheibe bestimmt. Das Papier wurde auf die horizontale, zweckmässig unterstützte Kupferplatte gelegt, mit 20 *kg* beschwert und mit einem Federdynamometer die Kraft zur tangentialen Verschiebung bestimmt.

Das Mittel der Reibung aus mehreren Versuchen bei Klein-Conceptpapier betrug 11·5 *kg* und bei gelbem, satinirten Packpapier 13·0 *kg*. Hieraus rechnen sich die Reibungscoëfficienten:

Klein-Conceptpapier—Kupfer................ $f = 0·575$
Gelbes satinirtes Packpapier—Kupfer......... $f = 0·650$

Einer Tangentialkraft von 22 *kg*, wie dieselbe beim gelben satinirten Papier beobachtet wurde, entspricht hiernach ein Druck von 34 *kg* zwischen Papier und Kupferplatte.

8. Ein besonderer Unterschied zwischen den tangentialen Kräften bei positiver oder negativer Spitze konnte nicht mit Sicherheit nachgewiesen werden.

Unter Anwendung einer Doppelinfluenzmaschine, von vier Spitzen und von Klein-Conceptpapier wurde gefunden:

10 Bogen	Spitze +	8·0	8·8	9·8 *kg*
10 „	„ —	8·0	8·8	9·8
40 „	„ +	15·0	13·5	13·5
40 „	„ —	13·5	13·5	13·0

Die Versuche im luftverdünnten Raume.

9. Nach den Versuchen 1, 2, 3 lag die Vermuthung nahe, dass das Haften des Papiers durch den Luftdruck vermittelt sei. Um diese Voraussetzung noch weiter zu prüfen, wurden die folgenden Versuche ausgeführt.

An die Messingstange, die durch die Stopfbüchse eines Luftpumpenrecipienten führt, wurde eine Messingscheibe von 94 *mm* Durchmesser angeschraubt. In eine seitliche Durchbohrung der Glaswand des Recipienten ist luftdicht eine zweite Messingstange eingeführt, welche eine zur ersten parallele, kleine Scheibe und eine dazu senkrecht gerichtete Nähnadelspitze trägt. Diese beiden Messingstangen sind mit den Polen der Influenzmaschine verbunden.

Der Recipient wurde mit der Öffnung nach oben gehalten und eine Anzahl von Papierscheiben von 75 *cm* Durchmesser auf die Messingscheibe gelegt, sodann der Strom geschlossen und der Recipient umgekehrt. Bei einem Überschusse von Papierscheiben fielen dieselben ab, sonst jedoch blieben sie haften. Es konnte so zunächst ermittelt werden, welches Papiergewicht im lufterfüllten Raume haften blieb.

Sodann wurden weniger Papierscheiben aufgelegt, der Strom geschlossen, der Recipient aufgesetzt und so lange gepumpt, bis die Papierblätter abfielen. Der am Manometer beobachtete Luftdruck wurde notirt.

Es wurden auf diesem Wege folgende, verschiedenem Luftdrucke entsprechende Papiergewichte gefunden.

Bei einer Entfernung von 40 *mm* zwischen Spitze und Platte:

	h	P	$\frac{h}{P}$
Barometerstand		34·7 *g*	21·6
160 *mm* Quecksilbersäule		10·2	15·7
146 *mm* „		7·1	20·6
38 *mm* „		2·5	16·0

Bei einer Entfernung von 20 *mm* zwischen Spitze und Platte:

	h	P	$\frac{h}{P}$
Barometerstand		36·05 *g*	20·8
144 *mm* Quecksilbersäule		8·20	17·8
44 *mm* „		2·35	18·7

Bei den niedrigen Drucken strömt die Elektricität in Büschelform über das Papier zur Messingscheibe.

Werden die Quotienten $\frac{h}{P}$ gerechnet, so sind dieselben für die einzelnen Versuche zwar ziemlich verschieden. Die Mittelwerthe 18·5 und 19·1 liegen aber sehr nahe, so dass das Tragvermögen der Platte, fast unabhängig von der Spitzendistanz und nahe dem Luftdrucke proportional ist. Leider sind die Dimensionen des Apparates so klein, dass eine genauere experimentelle Untersuchung wenig Erfolg verspricht.

Verschiedene andere einschlägige Versuche.

10. Wenn der Luftdruck als Ursache dss Haftens von Papier an der Kupferscheibe anzusehen ist, dann müssten alle Versuchsanordnungen, welche eine Luftverdünnung ausschliessen, auch das Haften aufheben. Dies ist jedoch nicht der Fall.

So war die Kraft, um weitmaschigen Organtin Nr. 0 auf der Kupferplatte tangential zu verschieben, wenn zwei Influenzmaschinen aus vier Spitzen in 5 *cm* Entfernung ihre Elektricität gegen die Platte entladen, für verschieden dicke Schichten:

1 Blatt Organtine	$P = 0·1$ *kg*
2 „ „	0·5
4 „ „	0·8
8 „ „	0·75
12 „ „	0·5

11. Umgekehrt lässt sich eine Lage von 10 Bogen Papier auf einem Drahtnetze, gegen welches die Entladung stattfindet, mit einer Kraft von etwa 0·5 *kg* verschieben.

12. Pappendeckel, welcher steif ist und sich an die Kupferplatte nicht anlegen kann, haftet weitaus weniger als Papier.

13. Schliesslich wurde vor die Kupferplatte in der Entfernung von 5 *cm* ein Papierstreifen gespannt, dem in 2 *cm* Entfernung zwei 20 *cm* von einander abstehende Spitzen gegenüber standen. Papierstreifen, welche in die Nähe der Spitze gebracht wurden, legten sich vornehmlich an die Kupferplatte an, sie bewegten sich seitlich neben dem Papierschirme vorbei. Nur dann, wenn der Papierstreifen unmittelbar vor den Papierschirm gebracht wurde, legte er sich an denselben an.

Ein solcher schmaler Papierstreifen zwischen Schirm und Platte gebracht, legt sich jederzeit so, dass er beide verbindet, ja er ist geneigt, sich in Gestalt einer Wellenlinie zwischen Schirm und Platte einzustellen und so eine mehrfache materielle Verbindung zu vermitteln.

Diese Versuche lassen sich durch die Annahme erklären, dass das langsame Fortfliessen der Elektricität auf Halbleitern eine gegenseitige Anziehung derselben zur Folge hat. Dieser Umstand würde auch während der Entladung aus einer Spitze das Haften der Papierblätter aneinander und an der Kupferplatte bedingen.

Dass die Isolatoren und Halbleiter an der Kupferplatte einer besonders heftigen elektrischen Erregung unterliegen, ist mit einer an dem Ende zu einer Spitze ausgezogenen Glasröhre und der vierscheibigen Influenzmaschine gezeigt worden.

Wird das weite offene Ende derselben zwischen dem vorerwähnten Papierstreifen und die Kupferplatte eingeführt und an die Kupferplatte angelegt, dann leuchtet die Glasröhre an den Berührungsstellen mit der Kupferplatte, wenn aus acht Spitzen Elektricität entladen wird. Aus dem spitzen Ende der Glasröhre strömen gegen die vorgehaltene Hand zwei ungemein zarte Luftbüschel aus.

Mit dem weiten Ende vor den Papierstreifen gehalten, zeigt die Glasröhre keine solchen Erscheinungen.

Eine gleich intensive Elektrisirung einer Glasröhre habe ich nur noch dann beobachtet, wenn das offene Ende der Glasröhre

in die Nähe der 30—40 *cm* langen positiven Büschel an den Kautschukscheiben der grossen Influenzmaschine gebracht wurde. Die Röhre wird so stark elektrisch, dass nach der Entfernung von den Kautschukscheiben das Streichen mit den Fingern ein Aufleuchten der Glasröhre an den berührten Stellen und an der Spitze im Gefolge hat. Es ist gleichgiltig, ob die Spitze offen oder geschlossen ist. Je nach der Glassorte kann dieses Aufleuchten mehr oder weniger oft durch Streichen mit den Fingern hervorgerufen werden.

Über eine algebraische Theorie der Schaaren nicht-adjungirter Berührungscurven, welche zu einer algebraischen Curve gehören

von

Wilhelm Weiss,

Assistent für Mathematik an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. März 1890.)

Die Theorie der zu einer algebraischen Curve gehörigen Berührungscurven ist bekanntlich von Hesse begründet und seither vielfach behandelt worden. Sie fand, wenigstens für den einfachen Fall, dass die Grundcurve nur Doppel- und Rückkehrpunkte besitzt und die Berührungscurven diese enthalten, ihre erste allgemeine Erledigung durch Clebsch in dessen fundamentaler Arbeit: „Über die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie", Crelle's Journal, Bd. 63. In natürlicher Fortsetzung der hier entwickelten Ideen versuchte Clebsch auch diejenigen Berührungscurven zu behandeln, welche die vielfachen Punkte der Grundcurve nur theilweise oder gar nicht enthalten. Mit Hilfe der von ihm, für Curven vom Geschlechte 0 und 1 mittelst rationaler oder doppelt-periodischer Functionen durchgeführten Parameterdarstellung gelang es in der That leicht, den adjungirten Berührungscurven die Bedingung aufzuerlegen, sich in einem oder mehreren der Doppelpunkte nicht-adjungirt zu verhalten.

Damit war in diesen speciellen Fällen die Theorie erledigt. Es ist aber klar, dass diese Behandlung eine Ausdehnung auf Curven von beliebigem Geschlechte zunächst ausschloss.

Für die letzteren fand nun diese Theorie wiederum für den oben angegebenen einfachsten Fall ihre vollständige Erledigung durch das erweiterte Jacobi'sche Umkehrproblem (Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen 271 f. f.)

In neuerer Zeit wurde der erste Clebsch'sche Gedanke wieder aufgenommen, und zwar durch Herrn G. Humbert in einer ausführlichen Arbeit: Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques. Liouville's Journal 1886.

Herr Humbert geht aus von der durch H. Poincaré für Curven von beliebigem Geschlechte begrifflich durchgeführten Parameterdarstellung mit Hilfe Fuchs'scher Functionen und gelangt wie Clebsch von den adjungirten Berührungscurven zu jenen, welche die Doppelpunkte der Grundcurve nur theilweise enthalten.

Indessen zeigt sich bei weiterem Eingehen in die angeführten Arbeiten, dass die verwendeten transcendenten Beziehungen im Grunde nur algebraische Beziehungen zwischen allgemeinen und speciellen rationalen Functionen des Ortes auf der Riemann'schen Fläche sind.

Man darf daher erwarten, dass sich die Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven, selbst bei beliebigen vielfachen Punkten der Grundcurve auf algebraischem Wege aus der als bekannt vorausgesetzten Theorie der adjungirten Berührungscurven wird entwickeln lassen.

Dieses Ziel strebt die vorliegende Arbeit an. Sie stützt sich überall auf die bekannte Brill-Nöther'sche Theorie der algebraischen Functionen und benützt überdies vielfältig die Ideen und Resultate, welche in der grundlegenden Arbeit von Nöther: Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Curve mit nichtadjungirten Curven, Math. Annalen, Bd. 15, ausgesprochen sind.

Man gelangt so auf einheitliche Weise nicht nur zu allen bekannten und manchen neuen Resultaten dieser Theorie, sondern dehnt dieselbe ohne zu grosse Schwierigkeiten auch auf Curven mit höheren vielfachen Punkten aus, wovon der demnächst zu behandelnde Fall einer Grundcurve mit höheren Singularitäten als Beispiel dienen mag.

Aus dem Angeführten wird ersichtlich, dass das Nachfolgende auch als eine algebraische Vorarbeit für die Behandlung des allgemeinen erweiterten Umkehrproblems in der Theorie der Abel'schen Functionen aufgefasst werden kann; ich gedenke hierauf näher zurückzukommen.

Zu den vorliegenden Untersuchungen wurde ich durch die Vorlesungen und den persönlichen Verkehr des Herrn Professors Dr. Nöther angeregt. Ich ergreife darum diese Gelegenheit, um demselben meinen ergebensten Dank auszusprechen.

§. 1.

Über Theilschaaren.

Es sei $f(s, z) = 0$ eine irreducible algebraische Curve von der Ordnung n, welche in $a_1, a_2 \ldots$ gewöhnliche $k_1, k_2 \ldots$-fache Punkte haben möge.

Das Geschlecht derselben ist

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}\sum_i k_i(k_i-1).$$

Ist G_Q eine Gruppe von Q Punkten auf f, so ist durch dieselbe bekanntlich eine Corresidualschaar bestimmt. Man lege nämlich durch G_Q eine Curve $\chi^{(0)}$, welche einen k_i-fachen Punkt von f zum ρ_i-fachen Punkte haben möge.

Ist G_R der weitere Schnitt von $\chi^{(0)}$ und f, der nicht in die vielfachen Punkte von f fällt, so schneidet die Schaar

$$\chi \equiv \lambda_0 \chi^{(0)} + \lambda_1 \chi^{(1)} + \ldots + \lambda_r \chi^{(r)}$$

von Curven gleicher Ordnung und Art wie $\chi^{(0)}$ auf f eine zu G_Q gehörige Corresidualschaar γ_Q aus.

Es lässt sich leicht zeigen, dass man die allgemeinste zu G_Q gehörige Corresidualschaar erhält, wenn man zum Ausschneiden adjungirte Curven verwendet ($\rho_i = k_i - 1$).

Ist nämlich $\psi^{(0)}$ eine adjungirte Curve durch G_Q (mit $G_{R'}$ als Restgruppe), so besteht die Identität:

$$\psi^{(0)}\chi \equiv \psi\chi^{(0)} + Bf, \tag{1}$$

wo ψ und B ganze Functionen von s, z sind.

Das Product $\psi^{(0)}\chi$ verschwindet nämlich an jeder einfachen gemeinsamen Stelle von $\chi^{(0)} = 0$ und $f = 0$ einfach und im k_i-fachen Punkte von f in der Ordnung $k_i + \rho_i - 1$. Daher sind nach dem Nöther'schen Fundamentalsatze der Theorie der algebrai-

schen Functionen (Math. Annalen, Bd. 6, S. 353) durch $\psi^{(0)}\chi$ alle nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zum Bestehen der Identität 1) identisch erfüllt.

Man findet durch Discussion von 1), dass $\psi(s,z)=0$ eine Schaar adjungirter Curven gleicher Ordnung mit $\psi^{(0)}$ durch $G_{R'}$ darstellt, welche die Parameter λ genau so enthält wie $\chi=0$ und daher auf $f=0$ gerade die Schaar γ_Q ausschneidet.

Dies gibt den von Nöther[1] auch auf Curven mit ganz beliebigen singulären Punkten ausgedehnten Satz:

Jede zu G_Q gehörige Corresidualschaar lässt sich durch adjungirte Curven ausschneiden.

Man nennt darum die von allen adjungirten Curven durch $G_{R'}$ auf f ausgeschnittene Schaar: die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q^q.

Es ist bekannt, dass diese Vollschaar vermöge des Restsatzes[2] eine von speciellen ausschneidenden Curven unabhängige Existenz hat.

Es ist aber umgekehrt im Allgemeinen nicht möglich, die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q^q durch andere als durch adjungirte Curven auszuschneiden.

Es sei

$$\psi \equiv \lambda_0\psi^{(0)}+\lambda_1\psi^{(1)}+\ldots\lambda_q\psi^{(q)}$$

die ganze Schaar adjungirter Curven durch die Restgruppe $G_{R'}$ von $\psi^{(0)}$.

Bedeutet nun $\chi^{(0)}$ eine Curve durch G_Q, welche in a_i einen k_i-1+j_i-fachen Punkt hat, so besteht aus denselben Gründen wie vorher die Identität:

$$\chi^{(0)}\psi \equiv \chi\psi^{(0)}+K.f, \tag{2}$$

worin $\chi(s,z)=0$ eine Curvenschaar gleicher Ordnung mit $\chi^{(0)}$ durch den Restschnitt der letzteren mit f darstellt.

Würde nun aus 2) folgen, dass sämmtliche Curven der Schaar $\chi(s,z)=0$ den k_i-fachen Punkt a_i von f zum gewöhnlichen k_i-1+j_i-fachen Punkte haben müssen, dann und nur dann hätte

[1] Math. Annalen, Bd. 23, S. 349.

[2] Brill und Nöther, Math. Annalen, Bd. 7, S. 272.

man bezüglich der Vollschaar g_Q^q die adjungirte Schaar ψ durch die überadjungirte Schaar χ ersetzt. Allein eine einfache Discussion von 2) oder die Entwicklung in der Nähe der k_i-fachen Stelle von f zeigt, dass die Curven von $\chi(s, z) = 0$ im Punkte a_i von f nur einen k_i-fachen Punkt haben und je ein Zweig von χ mit einem Zweige von f noch weitere $j_i - 1$ gemeinsame Punkte besitzt. Von diesen Curven bilden aber jene, welche in a_i einen $k_i - 1 + j_i$-fachen Punkt haben, den Fall $j_i = 1$ ausgenommen, nur einen Theil, und die von ihnen auf $f(s, z) = 0$ ausgeschnittene lineare Schaar ist daher auch nur ein Theil der gegebenen Vollschaar.

Verwendet man aber alle Curven der Schaar χ, so erhält man zwar die Vollschaar, hat aber im Wesentlichen nichts Neues, da diese Curven als adjungirt nur mit speciell gewordenem Reste anzusehen sind.

Die zu G_Q gehörige Vollschaar kann aber auch nicht durch Curven ausgeschnitten werden, welche einen k_i-fachen Punkt von f zum gewöhnlichen σ_i-fachen Punkte haben $\sigma_i < k_i - 1$.[1]

Ist nämlich $\chi^{(0)}$ eine σ-Curve durch G_Q, so müsste, wenn die Vollschaar durch σ-Curven ausschneidbar sein soll, die Identität

$$\chi^{(0)}\psi \equiv \chi\psi^{(0)} + Lf$$

ohne Bedingungen für die Parameter der Schaar ψ bestehen. Aber das Product $\chi^{(0)}\psi$ erfüllt die dazu in den vielfachen Punkten von f nothwendigen Bedingungen des Nöther'schen Theorems nicht identisch, und es müssen die Willkürlichkeiten der Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ benützt werden, um diese Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Da aber in diese Gleichungen die Parameter der Schaar ψ eingehen, kann man so selbst bei der angegebenen speciellen Bestimmmung der ersten σ-Curve $\chi^{(0)}$ im Allgemeinen nur einen Theil der Vollschaar erhalten.

Dies gilt daher umsomehr, wenn die Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ beliebig angenommen wird.

---

[1] Diese Curven sollen nach Nöther. Math. Annalen. Bd. 15, σ-Curven genannt werden.

§. 2.

Bedingungsgleichungen für das nichtadjungirte Verhalten.

Es sei $\chi^{(0)}$ eine durch die Gruppe G_Q auf $f=0$ gelegte σ-Curve, Γ_R sei ihre Restgruppe und

$$\chi \equiv \mu_0 \chi^{(0)} + \mu_1 \chi^{(1)} + \dots \mu_\nu \chi^{(\nu)}$$

die ganze lineare Schaar der σ-Curven gleicher Ordnung mit $\chi^{(0)}$ durch Γ_R. Dann schneidet $\chi^{(0)}\chi$ auf f die vollkommen definirte Schaar γ_Q aus.

Ferner bedeute $\psi^{(0)}$ eine adjungirte Curve durch G_Q, G_R ihren Rest und

$$\psi \equiv \lambda_0 \psi^{(0)} + \lambda_1 \psi^{(1)} + \dots \lambda_r \psi^{(r)}$$

die ganze Schaar adjungirter Curven durch G_R. Durch $\psi^{(0)}\psi$ ist auf f die zu G_Q gehörige Vollschaar g_Q bestimmt.

Aus §. 1 folgt, dass die γ_Q im Allgemeinen als Theil in der Vollschaar g_Q enthalten ist. Für unsere Zwecke ist es nothwendig, aus der Schaar ψ gerade den Theil auszusondern, welcher auf f denselben beweglichen Schnitt besitzt[1] wie χ.

Dazu haben die Parameter λ von ψ gewisse Bedingungsgleichungen zu erfüllen, welche in den λ linear sein müssen, da sowohl g_Q wie γ_Q lineare Schaaren sind.

In der angeführten Arbeit von Nöther (Math. Annalen, Bd. 15) wird nur die Anzahl der für das nichtadjungirte Verhalten nothwendigen Bedingungen wesentlich, und der dort eingehaltene Weg ist zur Aufstellung der Bedingungsgleichungen selbst weniger geeignet und soll darum hier durch einen directen ersetzt werden. Zunächst besteht nach §. 1 die Identität:

$$\psi^{(0)} \chi \equiv \psi' \chi^{(0)} + Mf. \qquad 1)$$

Der Schnitt von ψ mit f reducirt sich daher auf den von χ mit f, wenn man die Identität

[1] Functionentheoretisch bedeutet dies die Reduction der allgemeinsten rationalen Function des Ortes auf der Riemann'schen Fläche $f(x, z) = 0$ auf eine solche, die in den sich aufhebenden Verzweigungspunkten der Fläche ein vorgeschriebenes specielles Verhalten hat.

$$\psi\chi^{(0)} \equiv \chi\psi^{0} + Mf \qquad 2)$$

erfüllen kann.

Diese letztere findet aber, weil $\psi\chi^{(0)}$ in einem k_i-fachen Punkte von $f=0$ nur $k_i+\sigma_i-1$-fach verschwindet, nicht von selbst statt, sondern kann nur dadurch bestehen, dass die Parameter von ψ allen Bedingungsgleichungen genügen, welche das Nöther'sche Theorem in jedem vielfachen $\psi^0=0$ und $f=0$ gemeinsamen Punkte vorschreibt.

Wir benützen dasselbe jetzt und in allem Folgenden in der Form (Math. Annalen, Bd. 15, S. 509):

„Soll für eine Function $F(s,z)$ eine Identität von der Form:

$$F(s,z) \equiv A(s,z)\varphi + B(s,z)f$$

bestehen, so ist nothwendig und hinreichend, dass für jede gemeinsame Stelle von $\varphi(s,z)=0$ und $f(s,z)=0$ zwei ganze Functionen $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ von unbegrenzter Ordnung gefunden werden können, so dass in der Umgebung dieser Stelle besteht:

$$f(s,z) \equiv A'\varphi + B'f,$$

wo die beiderseitigen aufsteigenden Entwicklungen bis zu den Gliedern beliebiger Dimension identisch gemacht werden können bei zunächst unbestimmt gelassenen Constanten in A' und B'."

Es sei nun die Stelle $z=0$, $s=0$ eine k-fache für $f=0$ und σ-fach für $\psi^{(0)}$.

Dann ist zum Bestehen der Fundamentalidentität 2) nothwendig, dass in der Umgebung von $s=0$, $z=0$

$$\psi\chi^{(0)} \equiv A'(s,z).\psi^{(0)} + B'(s,z)f, \qquad 4)$$

sei, wo $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ die obige Bedeutung haben sollen.

Dabei mögen die Functionen f, $\chi^{(0)}\psi^{(0)}\psi$ in $s=0$, $z=0$ die Entwicklungen haben:

$$f \equiv f_k + f_{k+1} + f_{k-2} + \cdots$$
$$\chi^{(0)} \equiv \chi_{\sigma}^{(0)} + \chi_{\sigma+1}^{(0)} + \cdots$$
$$\psi^{(0)} \equiv \psi_{k-1}^{(0)} + \psi_{k}^{(0)} + \psi_{k+1}^{(0)} + \cdots$$
$$\psi \equiv \psi_{k-1} + \psi_{k} + \psi_{k+1} + \cdots$$

hierin möge sein:

$$\begin{array}{llllll}
f_k & \equiv & f_{k,0}\,z^k & +\, f_{k,1}\,z^{k-1}s & +\ldots+ & f_{k,k}\,s^k \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\chi_\sigma^{(0)} & \equiv & \chi_{\sigma,0}^{(0)}\,z^\sigma & +\,\chi_{\sigma,1}^{(0)}\,z^{\sigma-1}s & +\ldots+ & \chi_{\sigma,\sigma}^{(0)}\,s^\sigma \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\psi_{k-1}^{(0)} & \equiv & \psi_{k-1,0}^{(0)}\,z^{k-1} & +\,\psi_{k-1,1}^{(0)}\,z^{k-2}s & +\ldots+ & \psi_{k-1,k-1}^{(0)}\,s^{k-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\psi_{k-1} & \equiv & \psi_{k-1,0}\,z^{k-1} & +\,\psi_{k-1}^{(0)}\,z^{k-2}s & +\ldots+ & \psi_{k-1,k-1}\,s^{k-1}. \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Da $\psi\chi^{(0)}$ in $s=0$, $z=0$ von niedrigerer Ordnung als $k+\sigma$ verschwindet, ist für $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ nur die Entwicklung zulässig:

$$A'(s,z) \equiv A'_\sigma + A'_{\sigma+1} + \ldots$$
$$B'(s,z) \equiv B'_{\sigma-1} + B'_{\sigma-2}$$

wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von $\psi^{(0)}$ und f an jeder gemeinsamen Stelle.

Hier bedeuten wie oben:

$$\begin{array}{llllll}
A'_\sigma & \equiv & A'_{\sigma,0}\,z^\sigma & +\, A'_{\sigma,1}\,z^{\sigma-1}s & +\ldots+ & A'_{\sigma,\sigma}\,s^\sigma \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
B'_{\sigma-1} & \equiv & B'_{\sigma-1,0}\,z^{\sigma-1} & +\, B'_{\sigma-1,1}\,z^{\sigma-2}s & +\ldots+ & B_{\sigma-1,\sigma-1}\,s^{\sigma-1} \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

und $A'_{\sigma,0}$, $A'_{\sigma,1}\ldots B'_{\sigma-1,0}$, $B'_{\sigma-1,1}\ldots$ sind zunächst völlig unbestimmt gelassene Constante.

Durch beiderseitige Vergleichung ergeben sich aus 4) folgende Identitäten, die sämmtlich zu erfüllen sind:

$$\psi_{k-1}\chi_\sigma^{(0)} \equiv A'_\sigma\psi_{k-1}^0 + B'_\sigma f_k \qquad 4')$$

$$\psi_k\chi_\sigma^{(0)} + \psi_{k-1}\chi_{\sigma+1}^{(0)} \equiv A'_{\sigma+1}\psi_{k-1}^{(0)} + A'_\sigma\psi_k^{(0)} + B'_\sigma f_k + B'_{\sigma-1} f_{k+1} \qquad 4'')$$

$$\psi_{k+1}\chi_\sigma^0 + \ldots \equiv A'_{\sigma+2}\psi_{k-1}^0 + \ldots + B'_{\sigma+1} f_k + \ldots \qquad 4''')$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die Identität 4') führt zu $k+\sigma$ linearen Gleichungen zwischen allen Coëfficienten, und da zur Erfüllung dieses Gleichungssystems

nur über die $2\sigma+1$ Constanten $A_{\sigma,0}, A_{\sigma,1} \ldots B_{\sigma-1,0} \ldots$ verfügt werden kann, folgen durch Elimination $k-\sigma-1$ lineare Bedingungsgleichungen, die somit nur für die einzigen noch freie Parameter enthaltenden Grössen $\psi_{k-1,0}, \psi_{k-1,1} \ldots \psi_{k-1,k-1}$. Bedingungen vorstellen.

Die Gleichungen haben die Form:

$$\sum_{0}^{\varkappa-1} C_j^{(i)} \psi_{k-1-j,j} = 0, \qquad (i = 1,2,\ldots k-\sigma-1)$$

wo die $C^{(i)}$ nur die Coëfficienten von $\chi^{(0)}$, ψ^0 und f enthalten und setzen sich vermöge der Bedeutung von ψ in Gleichungen von der Form:

$$5.) \qquad \sum_{j=0}^{r} C_j^{(\nu)} \lambda_j = 0 \qquad (\nu = 1,2,\ldots k-\sigma-1)$$

zwischen den Parametern $\lambda_0, \lambda_1 \ldots \lambda_r$ von ψ um.

Analog führt $4''$, $4'''\ldots$ zu $k-\sigma-2$, $k-\sigma-3$ ... linearen Bedingungsgleichungen zwischen den λ.

Da die Glieder $2k-2$. Dimension von $\psi\chi^{(0)}$ schon ganz willkürlich gewählt werden können (Nöther'sches Theorem, Math. Ann., Bd. 6, S. 353), ist die letzte Identität, die an der Stelle $s=0$, $z=0$ noch Bedingungen gibt, die folgende:

$$\psi_{2k-3-\sigma}\chi^{(0)} + \ldots \psi_{k-1}\chi^{(0)}_{k-2} \equiv A'_{k-2}\psi^0_{k-1} + \ldots + A'_\sigma \psi^0_{2k-3-\sigma} + \\ + B'_{k-3} f_k + \ldots + B'_{\sigma-1} f_{2k-2-\sigma}$$

und diese liefert eine Bedingungsgleichung für die λ.

Man erhält daher in Folge der Identitäten von der Dimension: $k+\sigma-1$, $k+\sigma$, $k+\sigma+1$ ... $2k-3$, beziehungsweise $k-\sigma-1$, $k-\sigma-2$, ... 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}(k-\sigma)(k-\sigma-1)$ lineare homogene Gleichungen für die Parameter $\lambda_0 \ldots \lambda_r$ der Schaar ψ.

Die letzte obige Identität veranlasst eine für die nichtadjungirten Schaaren überhaupt wesentliche Bemerkung. Die Gleichungen 5) sind nämlich alle identisch, also ohne Bedingungen für die λ, dadurch zu erfüllen, dass man $\chi^{(0)}_\sigma \equiv 0$, $\chi^{(0)}_{\sigma+1} \equiv 0 \ldots \chi^{(0)}_{k-2} \equiv 0$ wählt, eine Aussage, die sich mit dem Restsatze für adjungirte Schnittpunktsysteme deckt.

Im Falle der eigentlichen σ-Curven steigen aber diese Gleichungen auch wirklich bis zu den Coëfficienten von $\chi^{(0)}_{k-2}$ an. Soll daher die durch $\chi^{(0)}\chi$ auf $f=0$ ausgeschnittene σ-Schaar γ_Q auch durch eine andere Schaar von σ-Curven $\chi^{(0)'}\chi'$ ausgeschnitten werden können, so dürfen sich doch die Gleichungen, welche an der Stelle $s=0$, $z=0$ die Schaar g_Q auf die Schaar γ_Q reduciren, nicht ändern, wenn man statt der $\chi^{(0)}$ die $\chi^{(0)'}$ benützt. Daraus aber folgt, dass bei den σ-Schaaren, im Gegensatze zu den adjungirten, die neue Ausgangscurve $\chi^{(0)'}$ nicht mehr ganz willkürlich genommen werden kann, sondern an der Stelle $s=0$, $z=0$ gegen die alte Ausgangscurve $\chi^{(0)}$ ein specielles Verhalten haben muss, für welches $\chi^{(0)'}$ Bedingungen bis hin zu den Gliedern $k-2$. Dimension zu erfüllen hat.

(Vergl. auch Nöther, l. c. Restsatz für σ-Curven.)

Der Fall $\sigma=0$ erfordert eine gesonderte Betrachtung. Die Untersuchung des Systems von Bedingungsgleichungen in $s=0$, $z=0$ zeigt nämlich, dass sobald für $\chi^{(0)}$ an dieser Stelle die Entwicklung besteht: $\chi^{(0)}\equiv\chi^{(0)}_0+\chi^{(0)}_1+\dots$ die Constanten von $\chi^{(0)}$ nur scheinbar in die Gleichungen eintreten. Indessen lässt sich diese Untersuchung hier, wie auch in den Anwendungen auf die Berührungscurven, die keine vielfachen Punkte der Grundcurve enthalten, umgehen und der Fall wesentlich einfacher behandeln, wenn man dem Nöther'schen Fundamentalsatze folgende Bemerkung hinzufügt:

Es habe F, φ, f, A, B dieselbe Bedeutung wie auf S. 7, und es sei $s=0$, $z=0$ die dort vorausgesetzte gemeinsame Stelle von $\varphi=0$ und $f=0$. F sei aber jetzt ein Product zweier Functionen von s, z

$$F(s,z)\equiv F_1(s,z).F_2(s,z),$$

von denen $F_2(s,z)$ an der Stelle $s=0$, $z=0$ nicht verschwinden möge.

Für die Identität:

$$F_1F_2\equiv A\varphi+Bf$$

ist an dieser Stelle bekanntlich nothwendig und hinreichend:

$$F_1F_2\equiv A'(s,z)\varphi+B'(s,z)f,$$

worin $A'(s,z)$, $B'(s,z)$ Potenzreihen in s, z sind. Daher muss im vorliegenden Falle wegen $F_2 \neq 0$ auch bestehen:

$$F_1 \equiv \frac{A'}{F_2}\varphi + \frac{B'}{F_2}f$$

oder

$$F_1 \equiv A''\varphi + B''f,$$

worin A'' und B'' ebenfalls unbegrenzte Entwicklungen in s, z darstellen. Daher hat man:

Soll das Product $F_1(s,z).F_2(s,z)$ in der Form $A\varphi + Bf$ darstellbar sein, so sind die dazu in $s=0$, $z=0$ nothwendigen und hinreichenden Bedingungen von $F_1(s,z)$ allein zu erfüllen, wenn $F_2(0,0) \neq 0$ ist.

Die Identität 4)

$$\psi\chi^{(0)} \equiv A'(s,z)\psi^{(0)} + B'(s,z)f,$$

welche in $s=0$, $z=0$ die Bedingungsgleichungen für die „λ" liefert, geht daher im Falle $\sigma=0$ einfach in die folgende über

$$\psi \equiv A''(s,z)\psi^0 + B''(s,z)f, \tag{4a}$$

wo A'', B'' die Entwicklungen haben:

$$A''(s,z) \equiv A''_0 + A''_1 + \dots$$
$$B''(s,z) \equiv B''_0 + B''_1 + \dots$$

Man erhält eine Reihe von Identitäten analog jenen 4')

$$\begin{aligned}
\psi_{k-1} &\equiv A''_0\psi^{(0)}_{k-1} \\
\psi_k &\equiv A_1\psi^{(0)}_{k-1} + A''_0\psi^{(0)}_k + B''_1 f_k \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\psi_{2k-3} &\equiv A''_{k-2}\psi^0_{k-1} + \dots\dots B''_{k-3}f_k
\end{aligned}$$

welche beziehungsweise $k-1$, $k-2$, ... 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}k(k-1)$ Bedingungsgleichungen ergeben, wie es sein muss.

Ähnliche Betrachtungen wie in $s=0$, $z=0$ sind für jeden k_i-fachen Punkt von f, der σ_i-fach für $\chi^{(0)}$ ist, durchzuführen, so dass folgt:

Zur vollständigen Reduction der Vollschaar g_Q auf die Theilschaar γ_Q haben die Parameter $\lambda_0 \dots \lambda_r$ der Schaar $\lambda_0\psi^{(0)} + \lambda_1\psi^{(1)} + \dots + \lambda_r\psi^{(r)}$ im Allgemeinen $\frac{1}{2}\sum(k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ den Gleichungen analoge Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Diese Zahl ist aber nur als obere Grenze aufzufassen, da die Gleichungen nicht alle von einander unabhängig zu sein brauchen. Es ist wegen der Anwendung auf die Systeme der Berührungscurven nothwendig, darüber genaue Entscheidungen zu haben. Die Mittel dazu enthält §. 4.

§. 3.

Specielle Fälle.

I. Die Grundcurve f habe nur Doppelpunkte.

Es mögen hier f, $\chi^{(0)}$, χ, $\psi^{(0)}$, ψ, g_Q, γ_Q dieselbe Bedeutung haben, wie eingangs des §. 2. Die Curvenschaar ψ geht daher durch jeden Doppelpunkt einfach durch, und die Schaar χ enthält die Doppelpunkte gar nicht.

Damit g_Q auf γ_Q reducirt werde, ist in diesem Falle in jedem Doppelpunkte von f eine Bedingungsgleichung für die Parameter von ψ zu erfüllen.

Diese ergibt sich aus der Identität 4a des §. 2

$$\psi \equiv A'(s, z)\,\psi^{(0)} + B'f,$$

wenn $s = 0$, $z = 0$ einer der Doppelpunkte von f ist.

Es muss nämlich bestehen:

$$\psi_1 \equiv A'_0\psi_1^{(0)}, \qquad 1)$$

woraus folgt:

$$\psi_{10}\psi_{11}^{(0)} - \psi_{11}\psi_{10}^{(0)} = 0 \qquad 2)$$

oder nach der Bedeutung von ψ_1:

$$\psi_{11}^{(0)}(\lambda_0\psi_{10}^{(0)} + \dots \lambda_r\psi_{10}^{(r)}) - \psi_{10}^{(0)}(\lambda_0\psi_{11}^{(0)} + \dots + \lambda_r\psi_{11}^{(r)}) = 0. \qquad 3)$$

Die Gleichung 1) gestattet die Nichtadjunctionsbedingung auch geometrisch auszusprechen:

Der Theil der Schaar ψ, welcher auf f dieselbe Theilschaar ausschneidet, wie die Curven der Schaar χ, wird von den sämmtlichen Curven gebildet, die in jedem Doppelpunkte die Ausgangscurve $\psi^{(0)}$ berühren.

Es sei C_4 eine allgemeine Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte a. Nimmt man auf C_4 eine Gruppe G_4 von Punkten 1, 2, 3, 4 an und legt durch dieselbe einen Kegelschnitt $\chi^{(0)}$, so schneidet das Kegelschnittsbüschel χ durch den Restschnitt von $\chi^{(0)}$ auf der C_4 eine γ_4^1 aus. Ist weiter $\psi^{(0)}$ ein adjungirter Kegelschnitt durch 1, 2, 3, 4, der die C_4 in zwei weiteren Punkten m, n trifft, so wird die γ_4^1 auch durch die ∞^1 Kegelschnitte ψ ausgeschnitten, welche durch m, n gehen und in d den Kegelschnitt $\psi^{(0)}$ berühren.

Die allgemeine Curve 4. Ordnung C_4 mit zwei Doppelpunkten in a_1 und a_2 kann nach dem Vorstehenden erzeugt werden durch ein Kegelschnittsbüschel ψ, dessen Curven sich in a_1 und a_2 berühren und ein projectivisches Kegelschnittsbüschel χ, dessen vier Basispunkte zusammen mit den weiteren vier Schnittpunkten irgend einer der Kegelschnitte von ψ den vollen Schnitt der C_4 mit einem Kegelschnitte $\chi^{(0)}$ bilden.

Es sei endlich C_5 eine Curve 5. Ordnung mit Doppelpunkten in $a_1, a_2, \dots a_5$. Es sollen die adjungirten Curven 5. Ordnung ψ bestimmt werden, welche auf C_5 denselben beweglichen Schnitt haben, wie die Gesammtheit der Curven 3. Ordnung der Ebene. Aus dem Obigen ergibt sich folgende Bestimmung: Man lege durch $a_1, a_2, \dots a_5$ einen Kegelschnitt K. Die gesuchte Schaar besteht dann aus den sämmtlichen adjungirten Curven 5. Ordnung, welche K in den Punkten $a_1 \dots a_5$ berühren. Die Richtigkeit ist hier auch unmittelbar ersichtlich. Denn ist ψ_1 eine dieser Curven, so geht durch ihren Schnitt mit C_5 noch das Büschel $\psi_1 + \varkappa C_5 = 0$ von Curven derselben Art. Eine derselben enthält noch einen weiteren Punkt von K und zerfällt daher in den Kegelschnitt und eine Curve 3. Ordnung.

II. Die Grundcurve besitze auch dreifache Punkte.

Ist $s = 0$, $z = 0$ der dreifache Punkt von $f(s, z) = 0$, so haben die Curven ψ in $s = 0$, $z = 0$ einen Doppelpunkt, während die Curven χ diesen Punkt nicht enthalten.

Es bestehen an dieser Stelle drei Nichtadjunctionsbedingungen, welche sich aus der Bedingungsintensität

$$\psi \equiv A''(s, z)\,\psi^{(0)} + B''(s, z) f$$

ergeben. Es liefert:

$$\psi_{20} z^2 + \psi_{21} z s + \psi_{22} s^2 \equiv A''_0 (\psi^{(0)}_{20} z^2 + \psi^{(0)}_{21} z s + \psi^{(0)}_{22} s^2)$$

die beiden Gleichungen:

$$\psi_{20} : \psi_{21} : \psi_{22} \equiv \psi^{(0)}_{20} : \psi^{(0)}_{21} : \psi^{(0)}_{22},$$

welche geometrisch aussagen, dass die sämmtlichen Curven der Schaar ψ im dreifachen Punkte von f dieselben Doppelpunktstangenten haben müssen, wie die Ausgangscurve $\psi^{(0)}$.

Die letzte Bedingungsgleichung folgt aus:

$$\psi_3 = A''_0 \psi^{(0)}_3 + A''_1 \psi^{(0)}_2 + B''_0 f_3$$

und ist:

$$\begin{vmatrix} \psi_{30} & \psi^{(0)}_{20} & 0 & f_{30} \\ \psi_{31} & \psi^{(0)}_{21} & \psi^{(0)}_{20} & f_{31} \\ \psi_{32} & \psi^{(0)}_{22} & \psi^{(0)}_{21} & f_{32} \\ \psi_{33} & 0 & \psi^{(0)}_{22} & f_{33} \end{vmatrix} - A''_0 \begin{vmatrix} \psi^{(0)}_{30} & \psi^{(0)}_{20} & 0 & f_{30} \\ \psi^{(0)}_{31} & \psi^{(0)}_{21} & \psi^{(0)}_{20} & f_{31} \\ \psi^{(0)}_{32} & \psi^{(0)}_{22} & \psi^{(0)}_{21} & f_{32} \\ \psi^{(0)}_{33} & 0 & \psi^{(0)}_{22} & f_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

wo $A''_0 = \frac{\psi_{20}}{\psi^{(0)}_{20}} = \frac{\psi_{21}}{\psi^{(0)}_{21}} = \frac{\psi_{22}}{\psi^{(0)}_{22}}$ zu setzen ist.[1]

III. $k_i = 3, \ \sigma_i = 1.$

Aus der Identität:

$$\psi \chi^{(0)} \equiv A \psi^{(0)} + B f$$

ergibt sich im dreifachen Punkte $s = 0$, $z = 0$ von f die Bedingung:

$$\psi_2 \cdot \chi^{(0)}_1 \equiv A'_1 \psi^{0}_2 + B'_0 f_3$$

---

[1] Diese drei Gleichungen sind nothwendig und hinreichend, um die Function $\frac{\psi}{\psi^{(0)}}$ an jeder Stelle des algebraischen Gebildes $f(s, z) = 0$ mit der speciellen Function $\frac{\chi}{\chi^{(0)}}$ übereinstimmend zu machen.

welche die einzige Bedingungsgleichung:

$$\chi_{10}^{(0)} \begin{vmatrix} \psi_{20} & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{30} \\ \psi_{21} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{22} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ 0 & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} + \chi_{11}^{(0)} \begin{vmatrix} 0 & \psi_{20}^{(0)} & 0 & f_{20} \\ \psi_{20} & \psi_{21}^{(0)} & \psi_{20}^{(0)} & f_{31} \\ \psi_{21} & \psi_{22}^{(0)} & \psi_{21}^{(0)} & f_{32} \\ \psi_{22} & 0 & \psi_{22}^{(0)} & f_{33} \end{vmatrix} = 0$$

liefert. In dieselbe treten nur die Glieder erster Dimension von $\chi^{(0)}$ ein, da diese nach dem Restsatze für σ-Curven zur Charakterisirung der σ-Schaar γ_Q in diesem Falle hinreichen.

§. 4.

Betrachtung der Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten in Bezug auf ihre Unabhängigkeit.

Es mögen hier alle Bezeichnungen des §. 2 beibehalten werden.

Die Mannigfaltigkeit der Vollschaar g_Q^q ist nach dem Riemann-Roch'schen Satze

$$q = Q - p + \tau,$$

worin τ die Anzahl der linear unabhängigen adjungirten φ_{n-3} bedeutet, welche durch die Gruppe G_Q gehen.

Die Mannigfaltigkeit q' der Schaar $\gamma_Q^{q'}$ folgt aus der von Nöther gegebenen Erweiterung des Riemann-Roch'schen Satzes (vergl. Math. Annalen, Bd. 15, S. 522)

$$q' = Q - \pi + \tau_1,$$

worin

$$\pi = p + \frac{1}{2} \sum_i (k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$$

und τ_1 die Anzahl der linear unabhängigen σ-Curven φ' von der $n-3$. Ordnung bedeutet, welche durch die Gruppe G_Q gehen und in den vielfachen Punkten von f mit der σ-Curve $\chi^{(0)}$ gleichsingulär[1] sind.

---

[1] Über die Bedeutung „gleichsingulär“, vergl. Nöther, l. c., Restsatz für σ-Curven.

Es sei zunächst die Vollschaar g_Q^q keine Specialschaar ($\tau = 0$).

Die Nichtadjunctionsbedingungen des §. 2 sind in der Zahl:

$$\frac{1}{2}\sum_i (k_i - \sigma_i)\, k_i - \sigma_i - 1) = \pi - p$$

vorhanden und reduciren die Vollschaar auf die Theilschaar $\gamma_Q^{q'}$.

Sind daher ρ dieser Gleichungen als Folge aller übrigen vorausgesetzt, so ergibt sich als Mannigfaltigkeit von $\gamma_Q^{q'}$

$$q' = Q - \pi + \rho.$$

Hat aber q' diesen Werth, so ist nach dem erweiterten Riemann-Roch'schen Satze nothwendig und hinreichend, dass durch die Gruppe G_Q gerade ρ linear von einander unabhängige σ-Curven φ'_{n-3} gehen. Hieraus ergibt sich:

Ist die Vollschaar g_Q^q keine Specialschaar, so können die $\frac{1}{2}\sum_i (k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ Bedingungsgleichungen für das nichtadjungirte Verhalten nur dann von einander abhängig werden, wenn die σ-Schaar auch durch σ-Curven $n-3$. Ordnung ausgeschnitten werden kann, welche in den vielfachen Punkten von f_n mit $\chi^{(0)}$ gleichsingulär sind. Gehen durch eine Gruppe der σ-Schaar ρ von einander linear unabhängige Curven dieser Art, so sind genau ρ jener Gleichungen eine Folge der übrigen.

Ist g_Q^q selbst eine Specialschaar mit

$$q = Q - p + \tau$$

und besteht

$$q' = Q - \pi + \rho,$$

so sind zur Reduction der Vollschaar auf die Theilschaar genau:

$$(\pi - p) - (\rho - \tau)$$

von einander unabhängige Gleichungen nothwendig, und man hat daher:

Sind g_Q^q und $g_Q^{q'}$ beide Specialschaaren und gehen durch die Gruppe G_Q, τ-Curven φ_{n-3} und ρ-Curven φ'_{n-3},

so sind $(\varrho-\tau)$ der Gleichungen für das nichtadjungirte Verhalten Folge aller übrigen.

Als Anwendung des Vorstehenden möge nur Folgendes angeführt werden.

Durch drei Doppelpunkte d_1, d_2, d_3 und zwei weitere Punkte a_1, a_2 einer rationalen Curve 4. Ordnung C_4^0 legt man alle Curven C_3. Sie schneiden auf der C_4^0 eine g_4^3 aus, welche als Theil die γ_4^2 enthält, die von den Geraden der Ebene ausgeschnitten wird.

Legt man durch d_1, d_2, d_3, a_1, a_2 den Kegelschnitt K, so hat man, um die g_4^3 auf die γ_4^2 zu reduciren, die Curven 3. Ordnung in d_1, d_2 den Kegelschnitt K berühren zu lassen. Dann ist die Bedingung in d_3 ebenfalls erfüllt, denn jede Curve zerfällt in K und eine Gerade.

Es sei eine Curve 6. Ordnung C_6^1 mit neun Doppelpunkten $d_1 \ldots d_9$ gegeben. Man soll durch die Doppelpunkte die Curven 6. Ordnung legen, welche die C_6^1 so schneiden, wie die Curven 3. Ordnung der Ebene.

Legt man durch $d_1 \ldots d_9$ eine Curve 3. Ordnung $\mathfrak{C}$, so muss jede Curve C_6 von der 6. Ordnung, welche $\mathfrak{C}$ in acht der Punkte d berührt, dieselbe auch im neunten berühren. Diese ∞^{10} Curven 6. Ordnung sind die gesuchten. (Letzteres ist auch daraus ersichtlich, dass man statt C auch $C+\lambda C_6^1$ wählen und die eine Willkürlichkeit benützen kann, um C noch durch einen weiteren Punkt von $\mathfrak{C}$ gehen zu lassen.)

Hieraus ergibt sich auch eine Bemerkung über die Curven 6. Ordnung mit neun Doppelpunkten überhaupt.

Wegen des obigen Verhaltens der gefundenen Curven 6. Ordnung gegen die durch die neun Doppelpunkte gelegte Curve 3. Ordnung $\mathfrak{C}$ folgt, dass die neun Doppelpunkte nicht willkürlich gewählt werden können, obwohl sie doch nur 27 Bedingungen darstellen.

Sind acht von den Doppelpunkten $d_1 \ldots d_8$ gegeben, so ist d_9 an einen geometrischen Ort gebunden, der sich mit Hilfe des Vorstehenden folgendermassen definiren lässt:

Legt man durch $d_1 \ldots d_8$ eine C_3, so schneiden alle Curven C von der 6. Ordnung, welche die C_3 in $d_1 \ldots d_8$ berühren, auf derselben eine g_2^1 aus, die auch durch ein Geradenbüschel mit dem Scheitel s auf der C_3 ausgeschnitten werden kann.

Verwendet man so alle Curven C_3 des Büschels durch $d_1 \dots d_8$ und bestimmt auf jeder die vier Punkte $m_1 \dots m_4$, deren Tangentialpunkt s ist, so ist der Ort der Punkte „m“ die Curve, auf welcher d_9 zu wählen ist:[1]

Es sei endlich C_5^2 eine Curve 5. Ordnung mit dreifachem Punkte in a und Doppelpunkte in d. Eine adjungirte $\mathfrak{C}_3$ schneidet noch in sieben Punkten $\alpha_1 \dots \alpha_7$. Sie bildet mit einem beliebigen Kegelschnitte eine adjungirte C_5 und bestimmt die Vollschaar g_{10}^8. Um diese auf die durch alle Kegelschnitte der Ebene ausgeschnittene Schaar g_{10}^5 zu reduciren, sind vier Bedingungen nothwendig, von denen nach Vorstehendem eine eine Folge der übrigen sein muss. Und wirklich liegen die weiteren Schnittpunkte einer jeden adjungirten C_5, welche durch $\alpha_1 \dots \alpha_7$ geht, in d die $\mathfrak{C}$ berührt und in a dieselben Doppelpunktstangenten wie $\mathfrak{C}$ hat, auf einem Kegelschnitte. (Denn es geht durch dieses Schnittpunktsystem noch ein Büschel von C_5, von denen eine in $\mathfrak{C}$ und einen Kegelschnitt zerfällt.)

Es ist demnach die letzte Bedingung im dreifachen Punkte durch die übrigen drei von selbst erfüllt.

§. 5.

Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven einer algebraischen Curve.

Für alle folgenden Entwicklungen ist der Begriff eines Systems von Berührungscurven die Grundlage. Derselbe ist bekanntlich von Hesse bei der allgemeinen Curve 4. Ordnung eingeführt und von Clebsch, insbesondere aber von Nöther (Invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Annalen, Bd. 18, S. 275 ff.) ganz allgemein formulirt worden. Es ist darum nothwendig, den Systembegriff an dieser Stelle in aller Kürze und in der für das Folgende am besten geeigneten speciellen Fassung zu entwickeln.

$f(s, z) = 0$ sei die Grundcurve, welche in $d_2, d_3, \dots$ einen $k_2, k_3, \dots$-fachen Punkt haben möge. Ferner sei $A^{(0)}$ eine adjungirte

[1] Dieser Ort ist von Herrn Küpper mit Hilfe einer involutorischen Verwandschaft in der Ebene definirt worden. Vergl. Küpper: Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften, VII. Folge, 1. Band

Berührungscurve von f, welche die Grundcurve in den Q Punkten $a_1 \dots a_Q$ berührt und sonst nur noch in einer Gruppe G_R von R Punkten schneidet. Mit

$$P \equiv \lambda P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \dots + \lambda_q P^{(q)}$$

bezeichnen wir eine Schaar adjungirter Curven gleicher Ordnung wie $A^{(0)}$ durch die Punkte $a_1 \dots a_Q$ und G_R. Die Curven P schneiden auf f eine lineare Schaar g_Q^q aus, für welche $q = Q - p$ ist, den einzigen Fall ausgenommen, dass in der Berührungsgruppe $A^{(0)}$ auch adjungirte Curven $n-3$. Ordnung berühren können.

Bei diesen Annahmen besteht folgende Identität:

$$P^2 \equiv A(s, z) A^{(0)} + B(s, z) f, \tag{1}$$

denn P^2 enthält den freien Schnitt von $A^{(0)}$ mit f; in einem k_i-fachen Punkte von f verschwindet $A^{(0)}$ in der Ordnung $k_i - 1$ und P^2 in der Ordnung $2k_i - 2$. Daher sind sämmtliche, für die Identität 1) nothwendige und hinreichende Bedingungen des Nöther'schen Theorems identisch erfüllt. So erhält man durch 1) bei Annahme von $A^{(0)}$ eine zugehörige vollkommen definirte Schaar $A(s, z) = 0$ von Curven gleicher Ordnung wie $A^{(0)}$.

Diese Schaar ist, wie sich aus 1) sofort ergibt, adjungirt; sie ist quadratisch in den Parametern λ, denn dieselben müssen in A ebenso auftreten wie in P^2. Ferner wird vermöge 1) die Curve $f = 0$ von $AA^{(0)}$ genau so geschnitten wie von P^2. Daraus aber folgt, dass die Curven der Schaar A die feste Gruppe G_R enthalten und dass die Grundcurve f in jeder Gruppe der Schaar g_Q^q von einer Curve A berührt wird.

Man nennt die Gesammtheit der Curven A das zu $A^{(0)}$ gehörige System adjungirter Berührungscurven.

Da die Curve $A^{(0)}$ offenbar auch als Curve P aufzufassen ist, folgt, dass die Berührungsgruppen des zu $A^{(0)}$ gehörigen Systems zu den Punkten $a_1 \dots a_Q$ nicht nur, wie aus der Entstehung folgt, residual, sondern auch coresidual sind. Dieses doppelte Verhalten der Berührungsgruppen ist nothwendig und hinreichend, um den Systemsbegriff in sich geschlossen zu machen, denn aus diesem Grunde erhält man offenbar genau dasselbe System, wenn man statt von $A^{(0)}$ von irgend einer Curve desselben ausgeht.

Es folgt weiter, dass sich die durch eine Gruppe G_R auf f möglichen Berührungscurven stets zu adjungirten Systemen anordnen müssen.

Zwei verschiedene Systeme können niemals eine Curve gemein haben, da sie sonst wegen der Willkürlichkeit der Ausgangscurve identisch sein müssten.

Über die Bestimmung der einzelnen Systeme durch die feste Gruppe G_R und ihr gegenseitiges Verhalten hat sich auf diesem Wege nichts ergeben. Dazu gelangt man sehr leicht durch die Zweitheilung der Abel'schen Functionen mit Hilfe des Jacobi'schen Umkehrproblems.

(Vergl. Clebsch, Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie, Crelle's Journal, Bd. 63, oder Clebsch-Lindemann, Vorlesungen, S. 838.)

Es seien

$$u_h = \int \psi_h(s, z)\, dz \qquad \ldots h = 1, \ldots p$$

die p überall endlichen, zu $f(s, z) = 0$ gehörenden Integrale und

$$a_{h,j};\; b_{h,j} \qquad \begin{matrix} h = 1 \ldots p \\ j = 1 \ldots p \end{matrix}$$

die $p \,.\, 2p$ Perioden derselben.

Ist dann $A^{(0)}$ die als bekannt vorausgesetzte adjungirte Berührungs-Curve, welche durch die festen Punkte G_R geht, so ergeben sich für die Berührungspunkte $x_1 \ldots x_Q \equiv z_i,\; s\,(x_i)$ aller übrigen Curven dieser Art vermöge des Abel'schen Theorems die p transcendenten Gleichungen:

$$\sum_1^Q {}_i \int_{a_i}^{x_i} \psi_h(s, z)\, dz = \frac{1}{2}\, \Pi$$

worin

$$\Pi = \sum_1^p {}_j\, m_j\, a_{h,j} + \sum_1^p {}_{n_j}\, n_j\, b_{h,j}$$

zu setzen ist, weil die Integrationswege vollständig unbestimmt zu bleiben haben.

So entstehen, entsprechend den 2^{2p} Möglichkeiten der Zweitheilung der Perioden 2^{2p} von einander wesentlich verschiedene

Umkehrprobleme, deren jedes bei noch willkürlich angenommenen $Q-p$ Punkten x_i die übrigen p Punkte eindeutig liefert.

Es folgt demnach:

Durch eine Gruppe G_R von festen Punkten auf $f(s, z) = 0$ gibt es 2^{2p} von einander völlig getrennte Mannigfaltigkeiten der Dimension $Q-p$ von adjungirten Curven, welche die Grundcurve sonst nur noch in Q Punkten berühren.

Es seien A und A' zwei Berührungscurven, die zu derselben Periodenhälfte $\frac{\Pi}{2}$ gehören und deren Berührungspunkte beziehungsweise $x_1 \dots x_Q$ und $x'_1 \dots x'_Q$ sein mögen.

Addirt man die zugehörigen $2p$ transcendenten Gleichungen, so folgt:

$$\sum_1^Q {}_i \int_{a_i}^{x_i} \psi_h(s, z)\, dz + \sum_1^Q {}_i \int_{a_i}^{x'_i} \psi_h(s, z)\, dz \equiv 0 \text{ mod } \Pi \quad h = 1 \dots p$$

dies sagt aber nach der Umkehrung des Abel'schen Theorems aus, dass die Punkte x_i und x'_i, sowie die Gruppe G_R (mit 0 als Beitrag zur Integralsumme) auf einer adjungirten Curve derselben Ordnung wie $A^{(0)}$ liegen müssen.

Damit ist die Identität der hier transcendent definirten Systeme von Berührungsgruppen mit den vorhin algebraisch aufgestellten nachgewiesen.

Für adjungirte Curven kann demnach Folgendes als bekannt vorausgesetzt werden:

Durch irgend welche feste Punkte auf der Curve $f(s, z) = 0$ gehen 2^{2p} von einander verschiedene Systeme von adjungirten Berührungscurven, welche die f sonst nur noch in Q Punkten berühren. In jedem dieser Systeme gibt es im Allgemeinen ∞^{Q-p} Curven.

Ähnliche Resultate für nicht adjungirte Berührungscurven zu entwickeln, ist die Hauptaufgabe einer jeden Theorie dieser Curven.

Das Abel'sche Theorem liefert in diesem Falle den Ansatz des allgemeinen erweiterten Umkehrproblems, dessen Lösung aber noch aussteht.

Im Folgenden wird diese Theorie in einer Weise behandelt, für welche sich der überall massgebende Gesichtspunkt so charakterisiren lässt:

Den zu untersuchenden nichtadjungirten Mannigfaltigkeiten von Berührungscurven werden in bestimmter Weise adjungirte Berührungscurvensysteme zugeordnet. Unter Voraussetzung der für die letzteren aus dem Jacobi'schen Umkehrproblem fliessenden Resultate wird versucht, mit Hilfe der im ersten Theile der Arbeit gewonnenen Mittel, auf algebraischem Wege, die Theorie der nichtadjungirten Berührungscurven zu entwickeln.

Es sei $\mathfrak{A}^{(0)}$ eine σ-Berührungscurze (vergl. §. 2), welche die Grundcurve $f(s, z) = 0$ in Q Punkten $a_1 \dots a_Q$ berührt und sonst nur noch in einer Gruppe Γ_R schneidet. $A^{(0)}$ bedeute eine adjungirte Curve, welche mit $A^{(0)}$ dieselbe Berührungsgruppe hat und sonst f nur noch in einer Gruppe G_R trifft.

Die Gesammtheit der adjungirten Curven gleicher Ordnung mit $A^{(0)}$ durch G_R schneidet auf $f=0$ die Corresidualschaar G_{2Q}^{2Q-p} aus. Lässt man die ausschneidenden Curven dieser Schaar in den vielfachen Punkten von f die $\frac{1}{2}\cdot\Sigma(k_i-\sigma_i)(k_i-\sigma_i-1)$ Nichtadjunctionsbedingungen des §. 2 erfüllen, so ist die reducirte lineare Schaar nach §. 2 identisch mit dem Schnitte aller σ-Curven gleicher Ordnung mit $\mathfrak{A}^{(0)}$ durch die Gruppe Γ_R.

Um daher die Gesammtheit der Gruppen zu erhalten, in welchen σ-Curven durch Γ_R berühren können und auch wirklich berühren, ist nur nothwendig, aus den sämmtlichen adjungirten Berührungscurven durch G_R jene Mannigfaltigkeiten auszusondern, welche in den vielfachen Punkten von f die Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten erfüllen.

Nach Früherem zerfällt die Gesammtheit der adjungirten Berührungscurven durch G_R in 2^{2p} Systeme, von denen jedes durch eine seiner Curven algebraisch definirt ist.

Es ist darum zur vollständigen Lösung nur nothwendig, die Curven dieser Systeme in den vielfachen Punkten von f den Nichtadjunctionsbedingungen genügen zu lassen.

Es habe

$$P \equiv \lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1} + \ldots + \lambda_q P^{(q)}$$

in Bezug auf $A^{(0)}$ dieselbe Bedeutung wie auf S. 19.

Dann ergibt sich aus der dort bewiesenen Identität:

$$P^2 \equiv A \,.\, A^{(0)} + Bf \qquad 1)$$

das zu $A^{(0)}$ gehörige adjungirte Berührungscurvensystem A.

Soll sich dasselbe nichtadjungirt verhalten, so muss nach §. 2 die Identität bestehen

$$\mathfrak{A}^{(0)} A \equiv \mathfrak{A} A^{(0)} + Mf, \qquad 2)$$

wo $\mathfrak{A}$ und M ganze Functionen von s, z sind.

Diese Identität besteht aber nicht von selbst; denn $A\mathfrak{A}^{(0)}$ erfüllt zwar die dazu nothwendigen Bedingungen des Nöther'schen Theorems in allen freien Schnittpunkten von $A^{(0)}$ und f, verschwindet aber in einem k_i-fachen Punkte von f nur $k_i + \sigma_i - 1$-fach ($\sigma_i < k_i - 1$), während es bekanntlich in der Ordnung $2k_i - 2$ verschwinden müsste, um die Identität ohne Bedingungen für A herbeizuführen.

Nach §. 2 lassen sich diese Bedingungsgleichungen für A aufstellen und sind in der Anzahl $\frac{1}{2}(k_i - \sigma_i)(k_i - \sigma_i - 1)$ vorhanden. Sie sind in den Constanten von A linear und daher in den Parametern „λ" quadratisch.

In dem zu $A^{(0)}$ gehörigen adjungirten System ist aber die Curvenschaar:

$$\lambda_0 P^{(0)} + \lambda_1 P^{(1)} + \ldots + \lambda_q P^q$$

das einzige untermittelbar gegebene.

Es lässt sich darum erwarten, dass die Bedingungsgleichungen für die Parameter λ eine einfachere und für die Discussion geeignetere Gestalt annehmen, wenn man die Nichtadjunctionsbedingungen für die Schaar A in Bedingungen für die Schaar P umsetzt.

Dies ist offenbar möglich, da die Curven A und P einander im System eindeutig zugeordnet sind.

Man verwendet hiezu am einfachsten den Nöther'schen Fundamentalsatz.

Erfüllt A die Identität 2), so besteht auch:

$$\mathfrak{A}^{(0)} A . A^{(0)} \equiv \mathfrak{A} A^{(0)2} + Nf$$

oder wegen 1)

$$(P^2 - Bf)\mathfrak{A}^{(0)} \equiv \mathfrak{A}(s, z) A^{(0)2} + N(s, z) f,$$

hieraus folgt eine Identität von der Form:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A} A^{(0)2} + \mathfrak{B} f. \qquad 3)$$

Ist umgekehrt für P^2 die Identität von der Form 3) erfüllt, so besteht auch die Identität 2); es ist darum nur nöthig, jene Bedingungsgleichungen für die Parameter von P zu betrachten, welche nothwendig und hinreichend sind, damit für P^2 die Identität 3) bestehe. Die letztere eignet sich auch, um für das Folgende den Ausgangspunkt zu bilden.

Es sei $s = 0$, $z = 0$ ein k-facher Punkt von $f(s, z) = 0$ und ein σ-facher Punkt von $\mathfrak{A}^{(0)}$.

Dann muss, wenn 3) bestehen soll, in der Umgebung dieser Stelle die Identität stattfinden:

$$\mathfrak{A}^{(0)} P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)2} + \mathfrak{B}'(s, z) f. \qquad 3')$$

Wenn wir die im §. 2 eingeführten Bezeichnungen einhalten, so sind für $\mathfrak{A}'(s, z)$ und $\mathfrak{B}'(s, z)$ nur die Entwicklungen zulässig

$$\mathfrak{A}'(s, z) \equiv \mathfrak{A}'_\sigma + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} + \dots$$

$$\mathfrak{B}'(s, z) \equiv \mathfrak{B}'_{k+\sigma} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma+1} + \dots$$

und es muss bis zu den Gliedern beliebiger Dimension die Identität bestehen:

$$(\mathfrak{A}^{(0)}_\sigma + \mathfrak{A}^{(0)}_{\sigma+1} + \dots)(P_{k-1} + P_k + \dots)^2 \equiv$$
$$\equiv (\mathfrak{A}'_\sigma + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} + \dots)(A^{(0)}_{k-1} + A^{(0)}_k + \dots)^2 +$$
$$+ (\mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-1} + \dots)(f_k + f_{k+1} + \dots) \qquad 3'')$$

Hieraus ergibt sich eine Reihe von Identitäten, die sämmtlich Bedingungsgleichungen für die Parameter liefern

$$\mathfrak{A}^{(0)}_\sigma P^2_{k-1} \equiv \mathfrak{A}'_\sigma A^{(0)2}_{k-1} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_k \qquad 4')$$

$$2\mathfrak{A}_\sigma^{(0)} P_{k-1}P_k + \mathfrak{A}_{\sigma+1}^{(0)} P_{k-1}^2 \equiv 2\mathfrak{A}'_\sigma A_{k-1}^{(0)} A_k^{(0)} + \mathfrak{A}'_{\sigma+1} A_{k-1}^{(0)2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_{k+1} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-1} f_k, \quad 4'')$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die letzte Identität, welche an dieser Stelle noch eine Bedingung gibt, ist nach dem Nöther'schen Theorem:

$$\mathfrak{A}_\sigma^{(0)} \mathrm{P} + \ldots + \mathfrak{A}_{k-2}^{(0)} P_{k-1}^2 \equiv \mathfrak{A}'_\sigma \mathrm{A} + \ldots + \mathfrak{A}'_{k-2} A_{k-1}^{(0)2} + \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2} f_{2k-\sigma-2} + \ldots \mathfrak{B}'_{2k-4} f_k, \quad 4^{k-\sigma-2)}$$

worin P und A die in P^2 und $A^{(0)2}$ vorhandenen Glieder $(2k-2)+$ $+(k-\sigma-2) = 3k-\sigma-4$. Dimension zusammenfassen.

Die Identität 4′) gibt $2k+\sigma-1$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $k+2\sigma$ Constanten:

$$\mathfrak{A}'_{\sigma,0} \ldots \mathfrak{A}'_{\sigma,\sigma} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2,0} \ldots \mathfrak{B}'_{k+\sigma-2,k+\sigma-2}$$

und macht daher $k-\sigma-1$ lineare Bedingungsgleichungen für die Quadrate und Producte der Grössen $P_{k-1,0} \ldots P_{k-1,k-1}$ nothwendig.

Da weiter in obiger Bezeichnung:

$$P_{k-1,i} = \lambda_0 P_{k-1,i}^{(0)} + \lambda_1 P_{k-1,i}^{(1)} + \ldots \lambda_q P_{k-1,i}^{(q)} \qquad i = 0 \ldots k-1$$

ist, so entstehen aus 4′) im Ganzen $k-\sigma-1$ Bedingungsgleichungen von der Form

$$\sum_1^q{}_i \sum_1^q{}_j a_{i,j} \lambda_i \lambda_j = 0. \qquad 5)$$

Ebenso erhält man aus 4″, 4‴... $4^{k-\sigma-2)}$ beziehungsweise $k-\sigma-2$, $k-\sigma-3$ ... 1, daher im Ganzen $\frac{1}{2}(k-\sigma)(k-\sigma-1)$ Gleichungen von der Form 5), wie es nach der allgemeinen Theorie §. 2 sein muss.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

Um in dem zu $A^{(0)}$ gehörigen adjungirten System A die Gesammtheit der Gruppen zu erhalten, in welchen nichtadjungirte Curven $\mathfrak{A}$ durch Γ_R berühren können, hat man die Parameter λ der adjungirten Schaar P in den vielfachen Punkten der Grundcurve $\frac{1}{2}\Sigma(k_i-\sigma_i)$. $.(k_i-\sigma_i-1)$ Bedingungsgleichungen von der Form 5)

erfüllen zu lassen. Diese Gleichungen sind identisch mit den Bedingungen für das nichtadjungirte Verhalten der Curven der Schaar A.

Die Untersuchung dieses Systems von Bedingungsgleichungen hat bei der vorliegenden Behandlung der nichtadjungirten Berührungscurven in jedem gegebenen Falle die Hauptaufgabe zu bilden, und zwar hat dieselbe zu entscheiden:

1. Ob in Folge der speciellen Natur der Gleichungen 5) (etwa durch Zerfallen derselben in lineare) von einander getrennte Mannigfaltigkeiten von nicht adjungirten Berührungscurven innerhalb des adjungirten Systems auftreten.

2. Ob sich die erhaltenen σ-Berührungscurven von selbst oder durch Hinzufügung von Bedingungen in Systeme im nichtadjungirten Sinne anordnen lassen.

3. In welchen Fällen die Gleichungen 5) aufhören von einander unabhängig zu sein.

An dieser Stelle wird es nothwendig, darüber zu entscheiden, ob der bisherige Systemsbegriff auf σ-Curven ausgedehnt werden kann oder nicht.

Es sei $\mathfrak{A}^{(0)}$ die σ-Berührungscurve, und es möge die Schaar

$$\Pi \equiv \mu_0 \Pi^{(0)} + \mu_1 \Pi^{(1)} + \ldots \mu_\nu \Pi^{(\nu)}$$

in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(0)}$ dieselbe Bedeutung haben wie die Schaar P gegenüber $A^{(0)}$.

Soll die Curve $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein System von Berührungscurven im früheren Sinne definiren, so müsste (vergl. S. 302) die Identität

$$\Pi^2 \equiv \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{(0)} + B_1 f$$

bestehen, ohne dass die Parameter μ der Schaar Π durch Bedingungen beschränkt wären. Dies ist aber nicht der Fall, da in einem k_i-fachen Punkte von f Π^2 nur $2\sigma_i$-fach verschwindet.

Ausgenommen ist der einzige Fall, dass für jeden k_i-fachen Punkt von f $\sigma_i = 0$ ist, denn dann fallen die Bedingungen in den vielfachen Punkten von selbst fort.

Unmittelbar ist daher durch die σ-Curve $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein System von σ-Berührungscurven nicht definirt.

Es entsteht aber die Frage, ob man den σ-Berührungscurven in den vielfachen Punkten von f nicht ein specielles Verhalten

vorschreiben kann, so dass man dadurch doch zu einem $\mathfrak{A}^{(0)}$ zugehörigen System im nichtadjungirten Sinne gelangt? Dies ist in der That möglich, beispielsweise genügt es für den Fall $k=3$, $\sigma=1$ die Curven der Schaar II die Ausgangscurve $\mathfrak{A}^{(0)}$ im dreifachen Punkte von f berühren zu lassen.

Wenn die nichtadjungirten Berührungscurven die vielfachen Punkte der Grundcurve gar nicht enthalten (Fall $\sigma=0$), so lässt sich der vorstehende allgemeine Gang durch einen wesentlich einfacheren ersetzen, denn in diesem Falle gehen die Coëfficienten von $\mathfrak{A}^{(0)}$ nur scheinbar in die Bedingungsgleichungen 5) ein.

Ist wieder $s=0$, $z=0$ eine k-fache Stelle von $f(s,z)=0$, so hat man in der Umgebung derselben zunächst die Identität

$$\mathfrak{A}^{(0)}P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s,z)A^{(0)2}+\mathfrak{B}'(s,z)f$$

zu erfüllen. Da aber jetzt $\mathfrak{A}^{(0)}(s,z)$ für $s=0$, $z=0$ nicht verschwinden soll, tritt die S. 293 gemachte Bemerkung zum Nöther'schen Theorem in Kraft, und es genügt, dass P^2 in der Umgebung dieser Stelle bis hin zu den Gliedern beliebiger Dimension die Identität erfülle:

$$P^2 \equiv \mathfrak{A}''(s,z)A^{(0)2}+\mathfrak{B}''(s,z)f \tag{6}$$

wo $\mathfrak{A}''(s,z)$, $\mathfrak{B}''(s,z)$ unbegrenzte Entwicklungen mit unbestimmt gelassenen Constanten darstellen.

Die Identität 6) führt leichter zu den an dieser Stelle bestehenden $\frac{1}{2}k(k-1)$ Gleichungen für die Parameter von P. Sie macht ersichtlich, dass im Falle $\sigma=0$ die Constanten von $\mathfrak{A}^{(0)}$ aus diesen Gleichungen vollständig entfernt sind. Die so im adjungirten System erhaltenen Berührungsgruppen gehören daher zu nichtadjungirten Berührungscurven überhaupt, ganz unabhängig von den weiteren Punkten, welche die letzteren auf der Grundcurve gemeinsam haben.

§. 6.

I. Die Grundcurve $f(s,z)=0$ habe nur δ Doppelpunkte $d_1, d_2 \ldots d_\delta$.

Es sei $s=0$, $z=0$ ein Doppelpunkt von $f(s,z)=0$. $\mathfrak{A}^{(0)}$, $A^{(0)}$, P mögen dieselbe Bedeutung haben wie §. 5. Das zu $A^{(0)}$

gehörige adjungirte System von Berührungscurven ergibt sich aus der Identität 1), §. 5 als die quadratische Schaar $A(s, z) = 0$.

Sollen in den Berührungsgruppen von A Curven berühren können, welche den Doppelpunkt $s = 0$, $z = 0$ von f nicht enthalten, so haben die Parameter λ von P an dieser Stelle eine Bedingungsgleichung zu erfüllen.

Diese ergibt sich nach 6), §. 5 aus der Identität:

$$P^2 \equiv \mathfrak{A}'(s, z) A^{(0)2} + \mathfrak{B}'(s, z) f, \qquad 1)$$

wo $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ mit Constanten beginnen, und zwar aus:

$$(P_{10} z + P_{11} s)^2 \equiv \mathfrak{A}'_0 (A_{10}^{(0)} z + A_{11}^{(0)} s)^2 + \mathfrak{B}'_0 (f_{20} z^2 + f_{21} zs + f_{22} s^2). \qquad 2)$$

worin

$$P_{1,0} \equiv \sum_0^q \lambda_i P_{1,0}^{(i)}; \quad P_{11} \equiv \sum_0^q \lambda_i P_{1,1}^{(i)}.$$

Zum Bestehen von 2) ist durch P_{10}, P_{11} die Gleichung zu erfüllen:

$$D \equiv \begin{vmatrix} P_{10}^2 & A_{10}^{(0)2} & f_{20} \\ 2P_{10} P_{11} & 2A_{10}^{(0)} A_{11} & f_{21} \\ P_{11}^2 & A_{11}^{(0)2} & f_{22} \end{vmatrix} = 0. \qquad 3)$$

Diese homogene quadratische Gleichung für P_{10}, P_{11} hat das Wurzelsystem $P_{10} = \text{Const. } A_{10}^{(0)}$; $P_{11} = \text{Const. } A_{11}^{(0)}$ rational bekannt; daher muss die Discriminante Δ derselben ein volles Quadrat sein.

Man findet:

$$\Delta = (A_{10}^{(0)} f_{22} + A_{10}^{(0)} f_{20} - A_{10}^{(0)} A_{11}^{(0)} f_{21})^2.$$

Mit Hilfe von Δ ergibt sich, dass die Parameter λ in $s = 0$, $z = 0$ entweder die eine oder die andere der beiden Gleichungen:

$$A_{11}^{(0)} P_{10} - A_{10}^{(0)} P_{11} = 0 \qquad 4a)$$

$$(2A_{10} f_{22} - A_{11} f_{21}) P_{10} + (2A_{11} f_{20} - A_{10} f_{21}) P_{11} = 0 \qquad 4b)$$

zu erfüllen haben.

Beide Gleichungen 4) haben eine unmittelbare geometrische Bedeutung:

Die Curven der Schaar P, deren Parameter die Gleichung 4a) erfüllen, haben im Doppelpunkte von f dieselbe Tangente wie A^0; die Curven, die der Gleichung 4b) genügen, haben dort die zu dieser Tangente in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonische Richtung. (Dies ergibt sich auch schon aus dem Anblicke der Identität 2), denn diese sagt aus, dass die Richtung $(P_{10}z+$ $+P_{11}s)$ ein Doppelelement der durch:

$$\mathfrak{A}'_0(A^0_{10}z+A^0_{11}s)^2+\mathfrak{B}'_0(f_{20}z^2+f_{21}zs+f_{22}s^2)=0$$

bestimmten quadratischen Involution werden muss, was offenbar nur geschehen kann, wenn sie mit der Richtung $A^0_{10}z+A^0_{11}s$ oder mit der zu dieser in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonischen übereinstimmt.)

Werden alle δ Doppelpunkte berücksichtigt und die S. 304 abgeleiteten Sätze benützt, so ergibt sich:

Hat die Grundcurve f nur δ Doppelpunkte, so gibt es durch eine Gruppe Γ_R von festen Punkten auf derselben $2^\delta 2^{2p}$ von einander völlig getrennte Mannigfaltigkeiten von Curven, welche die Doppelpunkte nicht enthalten und die Grundcurve sonst nur noch in Q Punkten berühren. Die Dimension dieser Mannigfaltigkeiten ist im Allgemeinen $Q-p-\delta$ und sie ordnen sich in Gruppen von je 2^δ an, die stets in einem adjungirten Berührungscurvensysteme liegen.

(Vergl. auch Clebsch u. Gordan, Abel'sche Functionen, Anwendungen des erweiterten Umkehrproblems, und Humbert, l. c., S. 291.)

Diese Resultate erfahren eine wesentliche Ergänzung, indem sich zeigen lässt, dass die gefundenen Mannigfaltigkeiten von Berührungscurven volle Systeme im nicht-adjungirten Sinne bilden.

Es sei zu diesem Zwecke die Grundcurve f zunächst mit nur einem Doppelpunkte in d vorausgesetzt.

Die Curven der Schaar P, welche in d die Bedingung 4a) oder 4b) erfüllen, seien beziehungsweise mit P_a und P_b bezeichnet.

P_a und P_b schneiden auf f die einzigen im System A enthaltenen Mannigfaltigkeiten von nichtadjungirten Berührungsgruppen aus. Es sei noch die Schaar Π in Bezug auf $\mathfrak{A}^{(0)}$ so definirt wie auf S. 309; sie schneidet dann auf f die Berührungsgruppen des zu $\mathfrak{A}^{(0)}$ im nichtadjungirten Sinne gehörigen Systems aus.

Die adjungirte Berührungscurve $A^{(0)}$ ist offenbar als eine Curve P_a und die $\mathfrak{A}^{(0)}$ als eine Curve Π aufzufassen. Da nun die sämmtlichen Curven P_a im Doppelpunkte d die $A^{(0)}$ berühren, muss nach §. 2 der bewegliche Schnitt von P_a auf f identisch sein mit dem Schnitte von Π. Dies sagt aber aus, dass die Mannigfaltigkeit M_a identisch ist mit dem Berührungscurvensystem, welches zu $\mathfrak{A}^{(0)}$ im nichtadjungirten Sinne gehört.

Es bleibt noch das Analoge ebenso direct von M_b nachzuweisen.

Dazu sei $P_b^{(0)}$ eine Curve von P_b und $A^{(0)'}$ die adjungirte Curve, welche in ihrer Schnittgruppe berührt. In dieser Gruppe berührt auch eine weitere nichtadjungirte Curve $\mathfrak{A}^{(0)'}$ durch Γ_R. $A^{(0)'}$ muss nach früherem im Punkte d die $A^{(0)}$ berühren.

Macht man nun die $A^{(0)'}$ zur Ausgangscurve des adjungirten Systems und haben P', P'_a, P'_b und Π' die analoge Bedeutung wie im früheren Falle, so schneiden offenbar die Schaaren P'_a und P'_b auf f wieder die Gesammtheit der nichtadjungirten Berührungsgruppen im gegebenen adjungirten System aus.

Darum muss der Schnitt von P'_a und P'_b auf f identisch sein mit dem Schnitte von P_a und P_b.

Die Identität der Schnitte kann aber nur so eintreten, dass einerseits P'_a und P_b und anderseits P'_b und P_a ihren beweglichen Schnitt auf f gemein haben.

Denn wäre jede Schnittgruppe von P'_a auf f identisch mit einer von P_a, so müsste auch die Berührungsgruppe von $A^{(0)'}$ durch eine Curve P_a ausgeschnitten werden (da ja $A^{(0)'}$ eine specielle P'_a ist), und dies widerspricht der über $A^{(0)'}$ gemachten Voraussetzung. Darum ist jene Annahme unzulässig und es schneidet P_b auf f dieselben Gruppen aus wie P'_a.

Man erkennt aber wie früher, dass der bewegliche Schnitt von P'_a auf f mit dem Schnitte von Π' übereinstimmt, und dies

zusammengefasst gibt das Resultat, dass die Mannigfaltigkeit M_b mit dem aus $\mathfrak{A}^{(0)\prime}$ im nichtadjungirten Sinne abgeleiteten Berührungscurvensystem identisch ist.

Es ist evident, dass sich diese Betrachtung unmittelbar auf eine Grundcurve mit beliebig vielen Doppelpunkten überträgt.

II. Die Grundcurve besitze Doppel- und Rückkehrpunkte.

Ein Rückkehrpunkt von $f(s, z) = 0$ liege in $s = 0$, $z = 0$, und es bestehe an dieser Stelle für f die Entwicklung

$$f \equiv (f_{10}z + f_{11}s)^2 + f_3 + f_4 + \dots$$

Die Bedingungsidentität 2) dieses Paragraphen geht hier über in

$$(P_{10}z + P_{11}s)^2 \equiv \mathfrak{A}_0'(A_{10}z + A_{11}s)^2 + \mathfrak{B}_0'(f_{10}z + f_{11}s)^2 \qquad 2')$$

und die Bedingungsgleichungen $4a$), $4b$) sind in diesem Falle

$$A_{11}^{(0)}P_{10} - A_{11}^{(0)}P_{11} = 0 \qquad 4'a)$$

$$f_{11}P_{10} - f_{10}P_{11} = 0 \qquad 4'c)$$

Dies geht auch sofort aus der Identität 2') hervor, wenn man beachtet, dass $(P_{10}z + P_{11}s)$ ein Doppelelement der Involution:

$$\mathfrak{A}_0'(A_{10}^{(0)}z + A_{11}^{(0)}s)^2 + \mathfrak{B}_0'(f_{10}z + f_{11}s)^2 = 0$$

werden muss.

Die Curven P, welche $4'a$) genügen, berühren im Rückkehrpunkte die Curve $A^{(0)}$ und haben genau dasselbe Verhalten wie früher. Die Curven, welche $4'b$) erfüllen, sind im Rückkehrpunkte nicht nur adjungirt, sondern berühren dessen Tangente, so dass einer von ihren Q freien Schnittpunkten in den Rückkehrpunkt rückt und daher fest wird.

So ergibt sich der Satz:

In Folge eines Rückkehrpunktes von f treten in jedem adjungirten System zwei von einander getrennte Mannigfaltigkeiten von nichtadjungirten Berührungscurven auf.[1] Diese Mannigfaltigkeiten bilden Systeme im nichtadjungirten Sinne, und die Curven eines dieser

[1] Herr Humbert findet in diesem Falle irrthümlich nur ein System, l. c., S. 293.

Systeme enthalten sämmtlich den Rückkehrpunkt als uneigentlichen Berührungspunkt.

Hat die Grundcurve δ Doppel- und r Rückkehrpunkte, so gibt es durch die Restgruppe Γ_R beziehungsweise:

$$2^{\delta}2^{2p}; \quad \binom{r}{1}2^{\delta}2^{2p}; \quad \binom{r}{2}2^{\delta}2^{2p} \;\ldots\ldots\; 2^{\delta}2^{2p}$$

von einander getrennte Systeme von nichtadjungirten Berührungscurven, welche beziehungsweise

$$0; \;\; 1; \;\; 2 \;\ldots\ldots\; r$$

Rückkehrpunkte enthalten.

Die hier entwickelte Theorie gestattet viele Anwendungen, zu deren Charakterisirung nur folgende specielle Fälle dienen mögen.

Es seien bei einer Curve 4. Ordnung mit einem Doppelpunkte C_4^2 die überall berührenden Kegelschnitte anzugeben, welche nicht durch den Doppelpunkt gehen.

Ist $\mathfrak{A}^{(0)}$ ein solcher Kegelschnitt, so ist derselbe am einfachsten mit einer beliebig durch d gelegten Geraden G als adjungirte Berührungscurve 3. Ordnung aufzufassen. In ihrem System gibt es nach Vorstehendem zwei nichtadjungirte Systeme von überall berührenden Kegelschnitten.

Ausgenommen ist nur das adjungirte System, welches aus einer doppelt gezählten Geraden hergeleitet ist, denn dieses liefert keine eigentlichen Berührungskegelschnitte, sondern die doppelt gezählten Geraden der Ebene zweifach gerechnet.

Die C_4^2 hat demnach 30 Systeme von überall berührenden Kegelschnitten, die nicht durch den Doppelpunkt gehen.

Diese sind einander paarweise zugeordnet, und es lässt sich diese Zuordnung auch durch einen Satz des Herrn Humbert, l. c., S. 306, charakterisiren, der sich aus dem Vorstehenden einfach daraus ergibt, dass man als Gerade G jede Gerade des Büschels durch den Doppelpunkt wählen kann.

Die vorstehende Behandlung gestattet diesen Satz sogleich auf alle Curven gerader Ordnung C_{2n}^p mit nur einem Doppelpunkte d auszudehnen:

Die C_{2n}^p besitzt $2(2^{2p}-1)$ von einander verschiedene nichtadjungirte Systeme von überall berührenden Curven C_{2n-2}. Diese Systeme sind einander auf folgende Art paarweise zugeordnet: Greift man aus je einem System desselben Paares je eine überall berührende C_{2n-2} heraus, so bilden die beiden Berührungsgruppen $(2n-1)^2-1$ Basispunkte eines Büschels von Curven C_{2n-1}. Der letzte Basispunkt ist der Doppelpunkt d der Curve. Jede Curve des Büschels trifft die C_{2n}^p noch in $2n-2$ weiteren Punkten, welche mit dem Doppelpunkte auf einer Geraden liegen. Die Tangente der Curve im Doppelpunkte ist durch diese Gerade von den beiden Doppelpunktstangenten harmonisch getrennt.

Für die Curve 4. Ordnung C_4^1 mit zwei Doppelpunkten ergibt sich auf demselben Wege wie vorhin:

Jedes adjungirte System enthält vier Systeme überall berührender Kegelschnitte, die nicht durch die Doppelpunkte gehen. Ausgenommen ist nur das System, welches zu einer doppelt gezählten Geraden gehört; denn man sieht leicht, dass in diesem Falle zunächst die doppelt gezählten Geraden der Ebene dreifach zählend auftreten und sich daher nur ein einziges eigentliches System von Berührungskegelschnitten ergibt. Man erkennt auch, dass die Berührungsgruppen derselben durch alle Kegelschnitte ausgeschnitten werden, die durch die beiden Doppelpunkte gehen und in jedem derselben die zur Verbindungsgeraden beider in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonische Richtung berühren.

Die C_4^1 hat daher 13 von einander verschiedene Systeme von überall berührenden Kegelschnitten, die nicht durch die Doppelpunkte gehen.

(Vergl. Humbert, l. c. S. 307.)

Es sei endlich C_5 eine Curve 5. Ordnung mit fünf Doppelpunkten $d_1, d_2 \dots d_5$. Es sind die Curven 3. Ordnung zu bestimmen, welche durch drei feste Punkte α, β, γ der Curve gehen und dieselbe noch in sechs weiteren Punkten berühren.

Fasst man eine solche Curve mit dem durch die Doppelpunkte gelegten Kegelschnitte K als adjungirte Berührungscurve C_5 auf, so ergibt sich sofort Folgendes:

Es gibt 128 Curven 3. Ordnung der gesuchten Art, welche sich zu vier verschiedenen Gruppen anordnen. Für je zwei Curven derselben Gruppe gilt, dass ihre Berührungsgruppen zusammen mit den Punkten α, β, γ und den fünf Doppelpunkten den vollständigen Schnitt der C_5 mit einer Curve 5. Ordnung ausmachen. Die letztere berührt den Kegelschnitt K in j der Punkte d und schneidet ihn in den $5-j$ weiteren Punkten in Bezug auf die Doppelpunktstangenten harmonisch.

Als Beispiel für Curven mit Rückkehrpunkt diene die Curve 4. Ordnung mit einem oder zwei Rückkehrpunkten.

Man erhält auf demselben Wege wie früher und mit Benützung der in diesem Paragraphen unter II. erhaltenen Sätze:

Die Curve 4. Ordnung mit einem Rückkehrpunkte hat 30 von einander verschiedene ∞^1 Schaaren von überall berührenden Kegelschnitten, welche Systeme im nichtadjungirten Sinne bilden. 15 derselben berühren die Curve in vier Punkten, die 15 anderen gehen durch den Rückkehrpunkt und berühren an drei Stellen.

Ebenso findet man weiter:

Die Curve 4. Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten besitzt 13 von einander verschiedene ∞^1 Schaaren von überall berührenden Kegelschnitten, welche Systeme bilden. Drei dieser Systeme berühren die Curve in vier Punkten; je drei weitere gehen durch einen Rückkehrpunkt und berühren in drei Punkten. Drei Systeme gehen durch beide Rückkehrpunkte und berühren noch in zwei Punkten, und endlich tritt ein letztes System von Berührungskegelschnitten durch die beiden Rückkehrpunkte, auf deren zwei weitere Berührungspunkte durch Kegelschnitte ausgeschnitten werden, die in den beiden Rückkehrpunkten die Rückkehrtangenten berühren.

X. SITZUNG VOM 24. APRIL 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft II—III (Februar bis März 1890) des XI. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung des Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau, unter dem Titel: „Die Arterien des verlängerten Markes vom Übergang bis zur Brücke.“

Das w. M. Herr Hofrath v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium begonnene und im Laboratorium des Herrn Prof. Pohl an der k. k. technischen Hochschule in Wien zu Ende geführte Arbeit: „Zur Kenntniss der Orthodicarbonsäuren des Pyridins“, von Dr. H. Strache.

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Prof. J. Stefan, überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern“.

Herr Dr. Ernst Lecher in Wien überreicht eine Arbeit, betitelt: „Studie über elektrische Resonanzerscheinungen“.

Der Secretär, w. M. Ed. Suess, bespricht die vorläufigen Ergebnisse von Studien, welche von dem k. u. k. Linienschiffs-Lieutenant L. v. Höhnel, von Prof. F. Toula und dem Vortragenden über gewisse Theile des östlichen Afrika gemacht worden sind, und welche demnächst in einer für die Denkschriften bestimmten Abhandlung unter dem Titel: „Grundzüge des Baues des östlichen Afrika“ der kais. Akademie vorgelegt werden sollen.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Zapałowicz, H., Roślinna szata gór Pokucko Marmaroskich. (Pflanzendecke der Pokutisch-Marmaroscher Karpathen.) Krakau, 1889; 8°.

Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern

von

J. Stefan,
w. M. k. Akad.

Die Vertheilung eines constanten elektrischen Stromes in einem Leiter oder die Verzweigung eines solchen in mehreren Leitern geschieht in der Weise, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes die durch das Gesetz von Joule bestimmte Wärmeentwicklung ein Minimum wird. Dieser Satz ist von Kirchhoff für Leiter von beliebiger Gestalt bewiesen worden. Demselben entspricht es zum Beispiel, dass ein constanter Strom über den ganzen Querschnitt eines Leitungsdrahtes, den er durchfliesst, in gleichförmiger Dichtigkeit sich vertheilt.

Dieser Satz gilt jedoch nur, wenn die einzelnen Theile der Leitung keine eigenthümlichen elektromotorischen Kräfte enthalten, er gilt desshalb nicht für veränderliche Ströme, welche von inducirenden Kräften in den Leitern begleitet sind. Bei Strömen von rapider Veränderlichkeit, im Besonderen bei periodischen Strömen von hoher Schwingungszahl, tritt der Einfluss, welchen die Widerstände auf die Stromvertheilung nehmen, hinter jenen der Inductionswirkungen zurück, und zwar bei periodischen Strömen umso mehr, je höher die Schwingungszahl wird. Bei der Lösung mancher Fragen, welche sich auf das Verhalten solcher Ströme beziehen, kann man von dem Widerstande der Leiter ganz absehen und die Gleichungen anwenden, welche für Ströme in Leitern ohne Widerstand gelten. Auf diese Gleichungen und ihre Anwendung ist zuerst von G. Lippmann[1] hingewiesen worden.

---

[1] Comptes Rendus, CIX, 251, 1889.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgender Satz: Die Vertheilung oder Verzweigung eines veränderlichen Stromes geschieht in der Weise, dass für jede Zeit bei gleicher Grösse des gesammten Stromes die elektrodynamische Energie desselben ein Minimum ist.

Bezeichnet man die Stromstärken in zwei Zweigen, welche unter dem Einflusse derselben elektromotorischen Kraft E stehen, mit i_1 und i_2, die Widerstände der Zweige mit w_1 und w_2, ihre Coëfficienten der Selbstinduction mit L_1 und L_2 und endlich den Coëfficienten ihrer gegenseitigen Induction mit M, so gelten die Gleichungen:

$$E = w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Lässt man die mit den Widerständen multiplicirten Glieder weg, so bleibt die Gleichung:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann man diese Gleichung, da die Inductionscoëfficienten als constante Grössen vorausgesetzt sind, durch

$$L_1 i_1 + M i_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

ersetzen und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher das Trinom

$$T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

für einen vorgeschriebenen Werth von $i_1 + i_2$ ein Minimum wird. Das Trinom T kann als die elektrodynamische Energie der zwei Ströme i_1 und i_2 bezeichnet werden. Es ist also der oben aufgestellte Satz zunächst für eine aus zwei Theilen bestehende Verzweigung gewonnen. In derselben Weise lässt sich aber die Rechnung für beliebig viele Zweige führen, also auch für die unendlich vielen unendlich dünnen Fäden, in welche man sich einen Leitungsdraht zerlegt denken kann.

Die elektrodynamische Energie eines Stromes oder eines Stromsystems lässt sich auch als eine magnetische Energie darstellen, welche in der Magnetisirung der Leiter und des dieselben umgebenden Mediums ihren Grund hat. Man kann also auch sagen: Die Vertheilung der Ströme erfolgt in der Art, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes seine magnetische Energie ein Minimum wird. Diese Formulirung des Princips bietet den Vortheil, dass sie die Lösung mehrerer Aufgaben ohne jede Rechnung gestattet.

In einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitte, welcher keinen seitlichen Einwirkungen ausgesetzt ist, können sich elektrische Ströme nur symmetrisch um die Axe vertheilen. Wie nun auch die Stromdichte von der Axe gegen die Oberfläche hin variiren mag, der Leiter wirkt nach aussen magnetisch so, als ob der ganze Strom in der Axe concentrirt wäre. Das Minimum der magnetischen Energie ist also dadurch bestimmt, dass dieselbe in dem vom Leiter erfüllten Raume den kleinsten Werth erhält. Dieser kleinste Werth, und zwar der Werth Null wird dann erreicht, wenn der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schichte an der Oberfläche des cylindrischen Leiters condensirt ist, denn eine solche Stromröhre übt in dem von ihr umschlossenen Raume keine magnetische Kraft aus.

Ist der Querschnitt des Leiters nicht kreisförmig, so gibt es gleichfalls eine Vertheilung des Stromes in der Oberfläche, welche seine magnetische Wirkung in jedem inneren Punkte der Null gleich macht und dem Principe des Minimums der magnetischen Arbeit entspricht. Diese Vertheilung ist conform derjenigen, welche eine elektrische Ladung annimmt, wenn sie sich auf dem Leiter im Zustande des Gleichgewichtes befindet. So wie die Resultante der elektrischen Kräfte einer solchen Ladung in jedem Punkte des Leiters Null ist, ist dies auch für die Resultante der magnetischen Kräfte der verschiedenen in der Oberfläche liegenden Stromfäden der Fall, wenn die Stromdichtigkeit längs der Umfangslinie in derselben Weise variirt, wie die Dichtigkeit der statischen elektrischen Ladung. Ist zum Beispiel der Querschnitt des Leiters von einer Ellipse begrenzt, so werden die Stromdichten in den verschiedenen Punkten dieser Ellipse sich verhalten wie die Perpendikel, welche auf die zu diesen

Punkten gehörigen Tangenten aus dem Mittelpunkte gefällt werden.

In seinen zuletzt veröffentlichten Versuchen hat Hertz[1] sehr auffallende Belege dafür geliefert, dass elektrische Schwingungen von sehr hoher Schwingungszahl nur längs der Oberfläche der Leiter sich bewegen. Aus seinen Beobachtungen über solche Bewegungen in einem streifenförmigen Leiter geht auch hervor, dass die Stromdichtigkeit in den Rändern des Streifens eine sehr viel grössere ist, als in der Mitte der breiten Seitenflächen desselben.

Die Gleichungen, aus welchen das Princip der Stromvertheilung abgeleitet wurde, enthalten die Voraussetzung, dass die Stromstärke in jedem Faden des Leiters zu jeder Zeit nach seiner ganzen Länge denselben Werth besitze. Diese Voraussetzung ist wenigstens sehr nahe erfüllt bei der Entladung von Condensatoren durch kurze Leitungsdrähte und auch bei den Schwingungen in den Oscillatoren von Hertz, sie ist es aber nicht in dem Falle der Fortpflanzung von elektrischen Wellen in langen Drähten. Man kann jedoch das Princip der Stromvertheilung auch auf solche Fälle anwenden, und zwar mit desto grösserer Annäherung, je länger die Wellen im Vergleiche zu den Querdimensionen des Leiters sind. Die Wirkung der Selbstinduction in einem Stücke des Leiters rührt zum grössten Theile ihres Betrages von der Variation des Stromes in diesem Stücke selbst ab und innerhalb eines solchen Stückes kann immerhin die Stromintensität als nach der ganzen Länge desselben gleich angenommen werden.

Die angegebene Vertheilung der Ströme in der Oberfläche eines Leiters hat zur Folge, dass die Selbstinduction in dem Leiter unabhängig wird von der magnetischen Beschaffenheit seiner Substanz. Die Schwingungsdauer der Oscillationen einer Entladung wird daher dieselbe sein, mag der Condensator durch einen Eisendraht oder durch einen gleichgestalteten Kupferdraht entladen werden. Ebenso kann man schliessen, dass sich elektrische Wellen von hoher Schwingungszahl in einem Eisendrahte mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen wie in einem Kupfer-

---

[1] Wiedemann's Annalen. XXXVII. 395. 1889.

drahte. Nach den Versuchen von Hertz ist dies thatsächlich der Fall. Nach Hertz wäre diese Thatsache nur so zu deuten, dass der Magnetismus des Eisens so schnellen Schwingungen nicht zu folgen vermag. Nach dem hier Vorgetragenen liegt die Sache viel einfacher, das Innere des Eisendrahtes bleibt von jeder magnetischen Einwirkung dieser Schwingungen frei.

Ist i_2 die Intensität eines Stromes, welcher in einem Leiter von einem anderen Strome i_1 inducirt wird, so besteht die Gleichung:

$$0 = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Mit Vernachlässigung von $w_2 i_2$ und unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke für i_1 und i_2 keine von der Zeit unabhängigen Glieder enthalten, verwandelt sich diese Gleichung in

$$0 = L_2 i_2 + M i_1$$

und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher die elektrodynamische Energie T der beiden Ströme für einen gegebenen Werth von i_1 ein Minimum wird.

Wird ein veränderlicher Strom durch einen Draht geschickt, welcher von einer concentrischen Metallröhre isolirt umgeben ist, so wird in dieser Röhre ein Strom inducirt. Die Richtung und Grösse, sowie die Vertheilung dieses Stromes lässt sich aus diesem Principe unmittelbar ableiten. Das Minimum der elektrodynamischen oder magnetischen Energie der beiden Ströme wird bei folgender Anordnung derselben erreicht. Der centrale Strom ist in einer unendlich dünnen Schichte an der Oberfläche seines Leiters condensirt. Der inducirte Strom fliesst in einer unendlich dünnen Schichte an der inneren Fläche der Röhre und hat in jedem Zeitpunkte dieselbe Intensität, wie der Strom im Mitteldrahte, aber die entgegengesetzte Richtung. Bei dieser Anordnung sind nur in dem Raume zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Wandfläche der Röhre magnetische Kräfte thätig. Das Innere des Drahtes, sowie der von der Substanz der Röhre erfüllte, aber ausserdem noch der ganze äussere Raum sind von magnetischen Kräften frei.

Die den Draht umschliessende Röhre hebt auch seine inducirende Wirkung im ganzen äusseren Raume auf, sie bildet einen

vollkommenen Schirm für die inducirenden, wie für die magnetischen Kräfte des von ihr umhüllten Drahtes. Die Schirmwirkung der Röhre besteht nach dieser Darstellung also darin, dass die Wirkungen des centralen Stromes durch jene des inducirten Stromes in der Röhre aufgehoben werden.

Dieser Fall steht in vollständiger Analogie mit dem elektrostatischen Probleme der Vertheilung der Elektricität auf zwei concentrischen Cylindern, von welchen der innere isolirt, der äussere zur Erde abgeleitet ist. In derselben Weise ist die Aufgabe auch dann, wenn der Draht und die Röhre nicht concentrisch sind und auch andere als kreisförmige Querschnitte haben, durch die analoge Aufgabe der Elektrostatik gelöst. Die Schirmwirkung der Röhre bleibt auch unter diesen veränderten Bedingungen eine vollkommene.

Der inducirte Strom in der Röhre wirkt auch auf den primären Strom im Mitteldrahte ein. Diese Einwirkung besteht darin, dass durch die Einschränkung des magnetischen Feldes auf den Raum zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Fläche der Röhre die Selbstinduction des primären Stromes bedeutend vermindert wird. Der Coëfficient der Selbstinduction eines geraden cylindrischen Drahtes von der Länge l und dem Radius a ist durch $2l \log \frac{2l}{ac}$ bestimmt. Dabei ist vorausgesetzt, dass a klein gegen l ist und der Strom in einer sehr dünnen Schichte an der Oberfläche des Drahtes condensirt ist. Für einen geradlinig gespannten Draht ist $c =$ der Basis der natürlichen Logarithmen $= e$, wenn man zur Berechnung die Formel von F. Neumann verwendet. Nach der Formel von W. Weber ist $c = e^2$, nach der elektromagnetischen Theorie der Induction ist $c = e^{\frac{3}{2}}$. Für einen kreisförmig gebogenen Draht, dessen Enden einander sehr nahe liegen, ist nach allen drei Theorien $c = \frac{\pi e^2}{2}$. Wird der Draht mit einer Röhre vom Radius b concentrisch umhüllt und ist auch b sehr klein gegen l, so ist der Coëfficient der Selbstinduction auf $2l \log \frac{b}{a}$ reducirt.

Wird einem stromführenden Leiter ein zweiter parallel gestellt, so vertheilen sich der primäre Strom in der Oberfläche

des ersten und der inducirte in jener des zweiten ebenso, wie sich eine gegebene elektrische Ladung und die inducirte Ladung auf dem zweiten Leiter vertheilen, wenn letzterer zur Erde abgeleitet ist. Hat der erste Leiter einen kreisförmigen Querschnitt, so ist doch der Strom über seine Oberfläche nicht gleichförmig vertheilt, sondern hat an der dem benachbarten Leiter zugewendeten Seite eine grössere Dichte als an der abgewendeten. Auch ein solcher Leiter, welcher den primären nicht rings umschliesst, übt eine theilweise Schirmwirkung aus, und zwar umso mehr, je ausgedehnter er ist.

Die Condensation einer veränderlichen elektrischen Bewegung auf eine unendlich dünne Schicht in der Oberfläche des Leiters bildet ebenso wie die gleichförmige Vertheilung der Bewegung über den ganzen Querschnitt einen idealen Grenzfall. Je nach dem Grade der Variabilität der Bewegung und der Grösse des specifischen Widerstandes des Leiters nähert sich der wirkliche Vorgang mehr dem einen oder dem anderen dieser beiden Fälle. Die Vertheilung eines veränderlichen Stromes in einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt ist schon von Maxwell berechnet und diese Rechnung von Lord Rayleigh insbesondere mit Rücksicht auf periodische Ströme ergänzt worden. Ich habe mich mit derselben Aufgabe in der Abhandlung: „Über veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten“ [1] beschäftigt. Meine Darstellung des Problems unterscheidet sich von den früheren dadurch, dass sie nicht von der Maxwell'schen Theorie des elektromagnetischen Feldes ausgeht, sondern von den Formeln, welche F. Neumann und W. Weber für das elektrodynamische Potential zweier Stromelemente aufgestellt haben. Aus diesen ergibt sich unmittelbar die Bestimmungsgleichung für die Dichtigkeit des Stromes in jedem der unendlich dünnen Fäden, in welche man sich den Leiter zerlegt denken kann. Für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt ist unter der Voraussetzung, dass die Strömung symmetrisch um die Axe vertheilt ist, die Stromdichtigkeit u in der Distanz r von der Axe zur Zeit t bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right), \qquad (a)$$

[1] Sitzungsber. XCV. 2. Abth. 917. 1887.

worin σ den specifischen Widerstand des Leiters, μ seine magnetische Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Gleichung gilt unter der Voraussetzung, dass die elektromotorische Kraft p innerhalb des Leiters der Gleichung

$$\frac{d^2p}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dp}{dr}=0 \tag{b}$$

genügt, darin ist der Fall eingeschlossen, dass p für alle Fäden des Leiters denselben Werth hat, also von r unabhängig ist.

Zu der für u gegebenen Differentialgleichung kommt noch eine Bedingung für die Oberfläche des Leiters hinzu. Die ganze um die Axe concentrisch vertheilte Strömung wirkt auf eine Faser in der Oberfläche so inducirend, als wäre sie in der Axe concentrirt. Bezeichnet man mit J die gesammte Intensität des Stromes im Leiter zur Zeit t und sind p_1 und u_1 die Werthe von p und u für die Oberfläche, also für $r=a$, so ist

$$p_1 = l\sigma u_1 + 2l\log\frac{2l}{ac}\frac{dJ}{dt}. \tag{c}$$

Ist der Leiter eine Röhre, a_0 der innere Radius derselben, so kommt für $r=a_0$ noch die Bedingung

$$\frac{dp}{dr}=l\sigma\frac{du}{dr} \tag{d}$$

hinzu.

Man kann der Gleichung (c) noch eine andere Gestalt geben. Die Gleichung (a) kann man in der Form

$$r\frac{du}{dt}=\frac{\sigma}{4\pi\mu}\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right)$$

schreiben. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $2\pi\,dr$ und integrirt über den ganzen Querschnitt, so erhält man

$$\frac{dJ}{dt}=\frac{\sigma}{2\mu}\left(r\frac{du}{dr}\right), \tag{e}$$

worin auf der zweiten Seite für die eingeklammerte Grösse die Differenz der Werthe, die sie für $r=a$ und $r=a_0$ annimmt, zu setzen ist. Setzt man diesen Werth von $\frac{dJ}{dt}$ in die Gleichung (c)

ein, so enthalten die Bedingungsgleichungen nur mehr die Werthe von u und seiner ersten Differentialquotienten nach r.

Füllt der Leiter den Kreis vom Radius a voll aus, so entfällt in (e) der untere Grenzwerth und es bleibt die Gleichung

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} \frac{du}{dr} \qquad (f)$$

für $r = a$ übrig.

Die Gleichungen zur Bestimmung von u haben dieselbe Form, wie jene zur Bestimmung der Temperatur in einem Drahte, welchem Wärme nur durch die Oberfläche zugeführt oder entzogen werden kann. Diese Analogie zwischen den Gleichungen bedingt auch eine solche zwischen den thermischen und elektrischen Vorgängen.

Wird ein galvanisches Element geschlossen, so verbreitet sich der Strom im Schliessungsdrahte in derselben Art wie die Wärme, wenn der Draht plötzlich aus einem Raume von tieferer in einen solchen von höherer Temperatur versetzt wird. Der Strom beginnt in der Oberfläche des Leiters zu fliessen und erreicht hier zuerst seine definitive Dichtigkeit, später erst in den tieferen Schichten, zuletzt im centralen Faden. Der Ausgleich der Stromdichte vollzieht sich umso rascher, je grösser der specifische Widerstand des Leiters ist, er geht in magnetisirbaren Drähten sehr viel langsamer vor sich als in unmagnetischen. Wird zum Beispiel zur Schliessung des Elementes ein Eisendraht von 1 *m* Länge und 1 *cm* Durchmesser gewählt, so weicht nach 0·01 Secunde die Stromdichte in der Oberfläche von ihrem definitiven Werthe nur um $3^0/_0$ ab, in der Mitte des Drahtes aber hat sie zu dieser Zeit nur die Hälfte des definitiven Werthes. Bei dieser Rechnung wurde der specifische Widerstand des Eisens $= 9900$, seine magnetische Leitungsfähigkeit $= 150$ angenommen. Die Verschiedenheit der Stromentwicklung in den äusseren und inneren Theilen des Drahtes ist so gross, dass ihr experimenteller Nachweis nicht sehr schwierig wäre. In unmagnetischen Drähten ist dieselbe bei gleichem Durchmesser sehr viel kleiner.

Wird ein Draht in einen Raum gebracht, dessen Temperatur periodisch wechselt, so stellt sich ein Beharrungszustand der Temperaturvertheilung im Drahte ein, der Art, dass die Temperatur

desselben in allen Schichten die periodischen Schwankungen der äusseren Temperatur mitmacht. Die Amplituden der Schwankungen nehmen jedoch gegen die Axe hin ab, und zwar umso rascher, je kürzer die Periode dieser Schwankungen ist. Zugleich haben diese in verschiedenen Schichten verschiedene Phasen, so dass die Maxima zum Beispiel in einer Schichte umso später auftreten, je weiter diese Schichte von der Oberfläche entfernt ist. Dieselben Eigenschaften zeigt auch der Gang der Temperatur in verschiedenen Tiefen des Erdbodens im Vergleiche zu den täglichen und jährlichen Schwankungen der Temperatur an der Oberfläche der Erde.

In derselben Weise stellt sich der periodische Beharrungszustand der elektrischen Bewegung in einem Leitungsdrahte her, wenn in diesem eine periodische elektromotorische Kraft thätig ist. Für einen Eisendraht von 4 *mm* Dicke gibt die Rechnung für den Fall, dass der Strom in demselben 250 ganze Schwingungen in der Secunde macht, die Amplitude der Schwingungen in der Oberfläche 2·52mal so gross, als in der Axe. Für 500 Schwingungen steigt diese Zahl auf 5·86, für 1000 auf 20·59. Die Stromschwingung in der Axe hat gegen jene in der Oberfläche in diesen drei Fällen die Phasendifferenzen 116° 2′, 174° 50′ und 215° 38′. Dieselben Verhältnisse gelten für einen Kupferdraht von fünfmal grösserer Dicke, oder bei gleicher Dicke für 25mal höhere Schwingungszahlen.

Je höher die Schwingungszahl wird, desto grösser wird die Verdichtung der elektrischen Bewegung an der Oberfläche. Für eine Schwingungszahl von 50 Millionen findet man, dass in einem Eisendraht die Amplitude der Schwingungen in 0·0085 *mm* Tiefe 100mal kleiner ist als in der Oberfläche. In der Tiefe von 0·0058 *mm* beträgt die Verzögerung in der Phase gegen die Oberfläche eine halbe Schwingungsdauer. In dieser Tiefe hat der Strom in jedem Augenblicke die entgegengesetzte Richtung und eine 23mal kleinere Amplitude als in der Oberfläche. In einem Kupferdraht sind die Tiefen mit den angeführten Eigenschaften fünfmal, für einen Neusilberdraht 18mal grösser als die für den Eisendraht angegebenen.

Diese Art der Stromvertheilung hat zur Folge, dass ein Draht für solche Schwingungen einen ganz anderen Widerstand

und eine andere Selbstinduction äussert als für gewöhnliche Ströme. Die Formeln, welche zur Berechnung dieser Grössen für kleinere Werthe der Schwingungszahlen benützt werden können, habe ich in der angeführten Abhandlung entwickelt. Für sehr grosse Werthe der Schwingungszahl sind diese Formeln wegen ihrer geringen Convergenz nicht geeignet. Es kann aber für diesen Fall die Bestimmungsgleichung für die Stromdichtigkeit u in der Form

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu}\left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{1}{a}\frac{du}{dz}\right) \tag{g}$$

verwendet werden, wenn a den Radius des Drahtes und z die Tiefe einer Schichte unter der Oberfläche bedeutet. Anstatt a sollte in der Gleichung $a-z$ geschrieben werden. Da aber u schon für kleine Werthe von z sehr klein wird, so ist die angenommene Vereinfachung der Gleichung zulässig, sobald a selbst nicht sehr klein ist.

Ein Integral dieser Gleichung ist

$$u = e^{-gz}\sin(\gamma t - hz).$$

Dasselbe gibt für $z=0$ die Stromdichtigkeit $u_1 = \sin\gamma t$ und stellt für grosse Werthe von γ die Abnahme von u mit wachsendem z mit hinreichender Genauigkeit dar. Die Constanten g und h sind durch die Gleichungen

$$g^2 - h^2 + \frac{g}{a} = 0, \qquad 2gh + \frac{h}{a} = \frac{4\pi\mu\gamma}{\sigma}$$

bestimmt.

Man kann nun die Gleichung (f), welche für die Coordinate z die Form

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{a\sigma}{2\mu}\frac{du}{dz}$$

für $z=0$ annimmt, benützen, um einen Ausdruck für die Intensität des Gesammtstromes herzustellen. Es ist

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu}(g\sin\gamma t + h\cos\gamma t)$$

also

$$J = \frac{a\sigma}{2\mu\gamma}(h \sin \gamma t - g \cos \gamma t).$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt

$$\gamma h J + g\frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu}(g^2+h^2)\sin \gamma t = \frac{a\sigma}{2\mu}(g^2+h^2).u_1.$$

Nimmt man daraus den Werth von u_1 und setzt denselben in die Bedingungsgleichung (c), so folgt

$$p_1 = \frac{2l\mu\gamma h}{a(g^2+h^2)}J + \left[2l \log\frac{ac}{2l} + \frac{2l\mu g}{a(g^2+h^2)}\right]\frac{dJ}{dt}.$$

Für den Fall, dass p im ganzen Querschnitte des Drahtes denselben Werth hat, gibt diese Gleichung die Beziehung zwischen der elektromotorischen Kraft p und der Intensität des Gesammtstromes J. Man kann also den Factor von J in dieser Gleichung als den Widerstand, den Factor von $\frac{dJ}{dt}$ als den Coëfficienten der Selbstinduction des Drahtes bezeichnen.

Bezeichnet man diesen Widerstand mit w', den gewöhnlichen mit w, so ist annähernd

$$w' = w\left(\pi a\sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}} + \frac{1}{4}\right).$$

Darin bedeutet n die Schwingungszahl des periodischen Stromes, welche mit γ durch die Gleichung $\gamma = 2n\pi$ verbunden ist. Für sehr grosse Werthe von γ reducirt sich diese auf die schon von Lord Rayleigh angegebene Formel

$$w' = w.\pi a\sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}.$$

Für eine Schwingungszahl $n = 50.10^6$ und $a = 0.2$ wird für einen Kupferdraht, wenn $\sigma = 1650$ angenommen wird, $w' = 109\,w$. Für einen Eisendraht ist das Verhältniss von w' zu w noch viel grösser. Die mit einer periodischen Entladung verbundene Wärmeentwicklung ist für jedes Zeitelement dt durch $w'J^2dt$ bestimmt. Zur Beurtheilung ihrer Wirkung auf den Leitungsdraht

und seine Umgebung ist es wichtig zu beachten, dass die ganze Wärmeentwicklung auf eine sehr dünne Schichte an der Oberfläche des Drahtes beschränkt ist.

Der Coëfficient der Selbstinduction kann durch

$$L' = 2l\left(\log\frac{2l}{ac} + \frac{1}{4\pi a}\sqrt{\frac{\mu\sigma}{n}}\right)$$

dargestellt werden. Mit wachsendem n wird L' immer kleiner und nähert sich dem Werthe als Grenze, welchen dieser Coëfficient annimmt, wenn der Strom in der Oberfläche condensirt ist. Dieser Werth ist auch nur wenig von jenem verschieden, welcher unter der Voraussetzung, dass der Strom den ganzen Querschnitt gleichförmig erfüllt, gefunden wird. Dieser letztere Werth ist nämlich

$$L_0 = 2l\left(\log\frac{2l}{ac} - \frac{1}{4}\right).$$

Diese Eigenschaft des Inductionscoëfficienten hat zur Folge, dass die Theorie der oscillatorischen Entladungen, obwohl diese ganz anders geschehen als bei der Berechnung derselben vorausgesetzt wurde, für die Schwingungsdauer doch Resultate liefert, die mit den Beobachtungen stimmen, solange der Widerstand ohne merklichen Einfluss auf die Oscillationsdauer bleibt.

Insofern man das Innere eines Leiters einer rasch oscillirenden Bewegung als stromlos betrachten darf, kann man auch sagen, dass sich im Inneren die äussere elektromotorische Kraft und jene der Selbstinduction des Leiters das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht bleibt bestehen, wenn ein etwa durch zwei concentrische Flächen begrenztes Stück des Leiters ausgeschnitten wird, sobald die in diesem Stücke vorhandene Strommenge verschwindend klein ist. Der centrale Theil des Leiters wird stromlos bleiben, oder der äussere Mantel bildet für ihn einen Schirm gegen die äussere elektromotorische Kraft.

Ein röhrenförmiger Leiter übt in allen im Inneren der Höhlung gedachten Fäden eine gleich grosse Induction aus, wie in einem Faden der inneren Oberfläche. Ihre Wirkung zusammen mit jener der äusseren elektromotorischen Kraft ist durch $l\sigma u_0$ bestimmt, wenn u_0 die Stromdichtigkeit in der inneren Ober-

also

... einen in der Höhlung

$$J = \frac{a\sigma}{2\mu\gamma}(h \sin \gamma t - g \ldots$$

... romotorische Kraft, und ... klein ist. Da die Amplitude

Aus diesen zwei Gleichunge... berfläche einwärts annähernd ... und für grosse Werthe der

$$\gamma h J + g \frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu}(g^2 \ldots$$

... grossen Werth erhält, so wird, ... worden ist, schon für kleine Werthe

Nimmt man dar... werth für u_0 resultiren. Es genügt eine in die Bedingungsgl... Röhrenwand zu einer nahezu vollständigen

$$p_1 = \ldots$$

Für densel... der st... stromführender Leiter von einer concentrischen ... so nimmt die Dichtigkeit des in der Röhre ... Stromes von der inneren gegen die äussere Wand ... Auf einen Faden in der äusseren Oberfläche wirken ... und der inducirte Strom so, als ob beide in der Mittellinie concentrirt wären. Bezeichnet man die Intensität des gegebenen Stromes mit J', jene des inducirten mit J, die Stromdichtigkeit in der äusseren Oberfläche mit u_1, so hat man zur Bestimmung von u_1 die Gleichung

$$-2l \log \frac{2l}{ac}\left(\frac{dJ'}{dt} + \frac{dJ}{dt}\right) = l\sigma u_1 .$$

Auf einen Faden, welcher sich ausserhalb der Röhre in der Distanz b von der Mittellinie befindet, ist die inducirende Wirkung des Systems

$$-2l \log \frac{2l}{bc}\left(\frac{dJ'}{dt} + \frac{dJ}{dt}\right).$$

Dieselbe ist auch in diesem Falle durch die Stromdichte u_1 in der Grenzfläche bestimmt. Diese ist das Mass für den Grad der Schirmwirkung, mit welcher die Röhre den äusseren Raum gegen die Induction des eingeschlossenen Stromes schützt.

Für so hohe Schwingungszahlen, wie sie bei den oscillatorischen Entladungen vorkommen, schliesst sich das Verhalten der metallischen Leiter sehr nahe an die Gesetze an, welche für Leiter ohne Widerstand gelten. Bei den elektrolytischen Leitern, deren specifischer Widerstand sehr gross ist, verhält sich die Sache anders. Nach Kohlrausch ist das Leitungsvermögen der

Schwefelsäure von 1·22 specifischem Gewichte
zogen auf das Leitungsvermögen des Quecksilbers
der specifische Widerstand des Quecksilbers
ist jener der bezeichneten Schwefelsäure
.et man mit diesem Werthe die Stromver-
r mit dieser Flüssigkeit gefüllten Röhre von 1 *cm*
er für den Fall, dass der Strom 50.10^6 Schwingungen
Secunde macht, so findet man die Stromdichtigkeit in der
Oberfläche nur um 0·8% höher als in der Axe der Röhre. Die Strömung ist also in diesem Falle nahezu gleichförmig über den Querschnitt vertheilt, während in einem Kupferdrahte die Stromdichtigkeit von der Oberfläche nach einwärts so rasch abfällt, dass sie in 0·003 *cm* Tiefe über 20mal, in 0·004 *cm* Tiefe schon 100mal kleiner ist als in der Oberfläche.

Der Unterschied zwischen der Stromdichte in der Oberfläche und in der Axe wird grösser, wenn die Röhre einen grösseren Querschnitt erhält. Bei der angenommenen Schwingungszahl von 50 Millionen wird die Amplitude der Stromdichte in der Oberfläche sechsmal grösser als in der Axe bei einem Durchmesser von 5·7 *cm*. Diese Verhältnisszahl steigt auf 20, wenn der Durchmesser = 8 *cm* wird. Diese Zahlen geben zugleich eine Vorstellung von der Dicke, welche eine Flüssigkeitsschichte haben muss, wenn sie eine merkliche Schirmwirkung ausüben soll. Diese Dicke wächst mit dem specifischen Widerstande σ, sie nimmt mit der Schwingungszahl n ab, sie ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten von σ und n proportional.

Zur Beobachtung der Erscheinungen der Schirmwirkung eignen sich sehr gut die elektrischen Schwingungen in kurzen geraden Leitern. Ich will hier einige sehr leicht auszuführende Versuche mittheilen.

Der primäre Schwingungsapparat, den ich verwende, besteht aus zwei Messingröhren von je 50 *cm* Länge und 3·2 *cm* Durchmesser. Die Röhren sind mit einer Holzleiste durch Träger von Hartgummi verbunden, so dass ihre Axen in eine Linie fallen. Die Axen liegen in einer Höhe von 5 *cm* über der oberen Fläche der Leiste. Die einander zugewendeten Enden der Röhren sind

durch Segmente von Messingkugeln geschlossen. Die Distanz dieser Enden kann variirt werden, indem die Röhren in ihren Trägern verschiebbar sind. Die entfernten Enden der Röhren sind offen. Man kann in dieselben andere Röhren einschieben und so den Apparat auch verlängern. Nahe an den zwei zugekehrten Enden werden um dieselben zwei Schleifen aus dünnem Draht gelegt und diese mit den Polen eines Inductionsapparates verbunden.

Der secundäre Leiter besteht ebenfalls aus zwei Messingröhren von derselben Länge, aber viel kleinerem Durchmesser $= 5$ *mm*. Diese beiden Röhren sind ebenso wie die weiten Röhren des primären Leiters auf einer Holzleiste montirt. Ihre benachbarten Enden sind durch Messingkugeln von 8 *mm* Durchmesser geschlossen; der Abstand derselben kann beliebig klein gemacht werden.

Stellt man die beiden Apparate parallel und lässt in dem primären Funken überschlagen, so treten auch in dem secundären kleine Funken auf. Die Schlagweite dieser Funken nimmt mit der Distanz der beiden Apparate ab, die Funken können aber noch gut beobachtet werden, wenn die Distanz der Apparate 1 *m* und auch mehr beträgt.

Schiebt man den secundären Leiter in eine aus zusammengerolltem Drahtgeflecht hergestellte Röhre von 100 *cm* Länge und 10 *cm* Durchmesser, so kann man die beiden Apparate so nahe aneinander stellen, als es eben angeht; in dem secundären Leiter tritt niemals ein Funke auf. Das Drahtgeflecht, dessen Maschen 4 mm^2 Flächeninhalt haben, schirmt den umhüllten Leiter vollständig gegen die inducirenden Wirkungen des primären Apparates.

Schiebt man über den secundären Leiter statt der einen Röhre von 100 *cm* Länge zwei solche Röhren von je 50 *cm* Länge, jedoch so, dass sie in der Mitte nicht zusammenstossen, so verhindern diese Röhren die Funkenerscheinung in dem eingehüllten Leiter nicht. Schiebt man die beiden Röhren ganz an einander, so dass sie sich in vielen Punkten ihres Umfanges berühren, dann wirken sie ebenfalls als vollständiger Schirm. Ja es genügt, die Enden der beiden Röhren soweit einander zu nähern, dass an mehreren Stellen Funken zwischen denselben auftreten. Sobald

dies der Fall ist, hören die Funken im eingeschlossenen Leiter zu spielen auf. Dieser Versuch lehrt, dass der umhüllende Leiter nur dann einen Schirm für den eingeschlossenen bildet, wenn in beiden Schwingungen derselben Art inducirt werden können.

Der secundäre Leiter wird von der Drahtröhre gleicher Länge gegen die inducirenden Wirkungen des primären Apparates auch dann geschirmt, wenn der letztere eine beträchtlich grössere Länge hat als die beiden ersteren. Es treten aber in diesem Falle sofort Funken im secundären Leiter auf, wenn man ihn an den Enden ableitend berührt. Sind der primäre Apparat und die Drahtröhre gleich lang, der secundäre Leiter aber länger, so dass er auf beiden Seiten aus der Röhre hinausragt, so schwächt die Röhre die Funken, sie hebt dieselben aber nicht auf. Der primäre Leiter inducirt in dem secundären immer Schwingungen, mögen die beiden gleiche oder verschiedene Längen haben. Eine Röhre schirmt den eingeschlossenen secundären Leiter vollkommen gegen die Induction des primären, wenn sie ebenso lang oder länger ist als der eingeschlossene Leiter, nicht aber, wenn sie kürzer ist. Eine Röhre hebt auch in einem secundären Leiter, welcher spiralförmig gewunden ist, die Funken auf, wenn der primäre Apparat, die Axe der Spirale und die Röhre gleiche Längen haben.

Man kann bei solchen Versuchen auch Blechtafeln statt der Drahtröhren verwenden. Stellt man den primären und secundären Apparat in einer Distanz von etwa 20 *cm* parallel, so hebt eine zwischen beide gestellte Tafel aus dünnem Zinkblech von 1 *m* Länge und 10 *cm* oder grösserer Höhe die Induction in dem secundären Leiter so weit auf, dass die früher lebhaften Funken verschwinden. Nimmt man statt der einen Tafel zwei von je 50 *cm* Länge, so bilden sie keinen Schirm, so lange sie sich nicht berühren oder wenigstens nicht so nahe an einander gerückt sind, dass zwischen mehreren Punkten derselben sich Funken zeigen.

Die in einer solchen Tafel inducirten Schwingungen wirken nicht nur hinter, sondern auch vor der Tafel entgegengesetzt jenen des primären Apparates. Wird die Tafel knapp hinter dem secundären Leiter aufgestellt, so hebt sie ebenfalls die Funken in demselben auf. Dies thun auch die zwei Tafeln von halber

Länge, wenn sie sich berühren, nicht aber, wenn sie getrennt sind. Es gilt auch für die Reflexion der elektrischen Schwingungen der Satz, dass eine solche nur stattfindet, wenn in dem Reflector solche Schwingungen inducirt werden können oder die reflectirten Inductionswirkungen sind die Wirkungen der Schwingungen, welche in der Oberfläche des reflectirenden Leiters inducirt werden.

Statt der Blechtafeln kann man zu diesen Versuchen auch Tafeln aus Drahtnetz nehmen. Auch Systeme von parallel gespannten Drähten verhalten sich, wie Hertz gezeigt hat, wie flächenförmige Leiter. Solche Drähte üben aber nur dann eine Schirmwirkung aus, wenn der primäre Leiter in ihnen ebensolche Ströme wie in dem zu schirmenden Leiter in genügender Intensität inducieren kann. Sie bilden keinen Schirm, wenn sie senkrecht zu den beiden Leitern gestellt werden.

Der primäre Leiter wirkt auf den zweiten nicht bloss dann inducirend, wenn die beiden parallel stehen, sondern auch in anderen Lagen, auch wenn sie gegen einander senkrecht gestellt werden, in diesem Falle nur dann nicht, wenn sie eine symmetrische Figur bilden. Stellt man die beiden Leiter parallel und dreht dann den secundären Leiter um seinen Endpunkt, so treten in ihm in allen Lagen Funken auf, wenn man die Drehung bis zu einem Winkel von 180° ausdehnt.

Dieses Verhalten des secundären Leiters entspricht nicht den bekannten Grundsätzen der Elektrodynamik. Nach diesen muss die Richtung der Induction im secundären Leiter in der Endstellung die entgegengesetzte von jener in der anfänglichen Stellung sein. Die inducirte elektromotorische Kraft muss also in einer zwischen den Stellungen 0° und 180° gelegenen Richtung des Leiters der Null gleich sein. Nimmt man zur Berechnung der Induction die Potentialformel von F. Neumann, so verschwindet die Induction, wenn die beiden Leiter einen rechten Winkel mit einander bilden. Die Formel von W. Weber gibt den Nullwerth der Induction für einen kleineren Winkel. Dieser Winkel rückt näher gegen 90°, wenn man die Induction entsprechend der elektromagnetischen Theorie nach dem arithmetischen Mittel der beiden Formeln rechnet. Diese Rechnung entspricht der Annahme, dass die Induction keine unmittelbare Wirkung zwischen den

Leiterelementen ist, sondern durch die Magnetisirung des Mediums vermittelt wird, welches die Leiter erfüllt und umgibt.

Aus den Funken im secundären Leiter kann man jedoch keinen sicheren Schluss über elektrodynamische Verhältnisse ziehen, da dieselben nicht nur durch die elektrodynamische Induction, sondern auch durch die elektrostatische der auf dem primären Leiter vorhandenen periodisch wechselnden Ladung verursacht werden. Man kann diese beiden Wirkungen in einigen Fällen von einander trennen. Stellt man die beiden Leiter gegen einander senkrecht und schiebt zwischen die benachbarten Enden derselben eine Metallplatte, so nimmt diese auf die Funkenbildung keinen Einfluss, wenn sie isolirt ist, wohl aber, wenn sie mit der Erde leitend verbunden wird. Die Funken verschwinden dann gewöhnlich, sie treten aber wieder auf, wenn man die Schlagweite im secundären Leiter kleiner macht. Ob in diesem Falle durch die eingeschobene abgeleitete Platte die elektrostatische Wirkung ganz aufgehoben wird, die übrigbleibenden kleinen Funken also elektrodynamischer Natur sind, ist schwer zu entscheiden. Es ist noch eine genauere Untersuchung der ganzen Frage nothwendig.

In derselben Weise wie in metallischen kann man elektrische Schwingungen auch in geraden flüssigen Leitern induciren. Zur Herstellung des secundären Leiters dienen zwei Glasröhren. Die zwei entfernten Enden derselben sind offen und nach aufwärts gebogen, die einander zugewendeten Enden sind geschlossen und enthalten kurze eingeschmolzene Platindrähte, an welche aussen kleine Messingkugeln aufgesteckt werden. Werden die Röhren mit verdünnter Schwefelsäure (14 Volumtheile Wasser, 1 Theil Schwefelsäure) gefüllt und der so formirte Leiter zum primären parallel gestellt, so treten zwischen den einander hinreichend genäherten Messingkugeln schöne weisse Funken auf. Man kann die Schwefelsäure noch viel weiter verdünnen, die Funken werden dann immer schwächer und erscheinen endlich nicht mehr als weisse, sondern als röthliche Funken. Auf dieselbe Art kann man auch den primären Leiter durch einen flüssigen ersetzen.

Endlich habe ich auch einen secundären Leiter hergestellt, in welchem die inducirten Funken direct zwischen zwei Flüssig-

keitskuppen überspringen. Zwei Glasröhren von je 50 *cm* Länge und 1 *cm* Durchmesser sind an je einem Ende zugeschmolzen, an den anderen Enden in kurze dünnere Röhren ausgezogen. Die beiden Röhren werden mit verdünnter Schwefelsäure vollgefüllt und können horizontal gelegt werden, ohne dass aus den engen offenen Enden Flüssigkeit austritt. Stellt man diesen secundären Leiter parallel dem primären auf und nähert die Kuppen der Flüssigkeit einander bis auf 1 *mm*, so springen zwischen denselben dünne röthliche Funken über, die hellglänzend werden, wenn man die Kuppen der Flüssigkeiten einander noch näher bringt. Mit sehr verdünnter Schwefelsäure gelang mir dieser Versuch nicht; wurden die Flüssigkeiten einander immer mehr und mehr genähert, so vereinigten sie sich, ohne dass ich vorher einen Funken beobachten konnte. Ich bemerke noch, dass die Schlagweite des Funkens im primären Apparat gewöhnlich 5 *mm*, in einzelnen Fällen grösser, bis doppelt so gross gewählt wurde.

Ich habe auch einige Versuche über die Schirmwirkung flüssiger Leiter ausgeführt. Der secundäre Leiter wurde in eine Glasröhre von 1·5 *cm* äusserem Durchmesser eingeschlossen und in eine weitere Röhre von 6 *cm* Durchmesser centrisch eingeführt. Der Raum zwischen den beiden Röhren wurde mit Flüssigkeit ausgefüllt. Dieser Apparat hatte nahe dieselbe Länge wie der primäre. Beide wurden in 15 *cm* Distanz einander parallel, und zwar vertical aufgestellt. Wurde der Zwischenraum zwischen den beiden Röhren mit Wasser gefüllt, so ging die Funkenbildung im secundären Leiter gerade so vor sich, wie in dem Falle, als dieser Raum mit Luft gefüllt war. Wurde das Wasser mit wenig Schwefelsäure versetzt, so zeigte sich auch keine Änderung. Schwefelsäure vom specifischen Gewichte 1·011 bewirkte eine merkliche Schwächung, bei der Anwendung einer Säure vom specifischen Gewichte 1·026 verschwanden die Funken. Ebenso blieben die Funken aus, wenn dichtere Säuren genommen wurden, sie traten aber wieder auf, als der Apparat mit einer sehr hoch concentrirten Säure gefüllt wurde. Der specifische Widerstand der Säure von der Dichte 1·026 ist etwa 4·4mal so gross als jener der am besten leitenden. Nimmt man an, dass die Schwingungen im secundären Leiter seiner Länge als einer halben Welle entsprechen, so ist die Zahl derselben in der Secunde

= 150 Millionen. Das Resultat dieses Versuches stimmt also beiläufig mit den oben über das Verhalten der Schwefelsäure angegebenen Daten. Zu einer genauen Vergleichung mit den Formeln, welche man für diese Versuchsanordnung aufstellen kann, fehlt übrigens die Bestimmung des Werthes, auf welchen die inducirende Kraft herabgesetzt werden muss, damit die Funkenbildung im secundären Leiter verschwindet.

Versuche über die Schirmwirkung elektrolytischer Leiter sind schon von J. J. Thomson[1] nach einer bequemeren Methode ausgeführt worden. Der primäre und secundäre Leiter sind bei seinen Versuchen kreisförmig gebogen, zwischen denselben befindet sich die Flüssigkeit in einer flachen Schale in Form einer Platte. Bei diesen Versuchen bilden die in der Flüssigkeit inducirten Schwingungen geschlossene Ströme, bei meinen Versuchen haben sie offene geradlinige Bahnen.

---

[1] Proceedings of R. Soc., London, XLV, 269, 1889.

Eine Studie über elektrische Resonanzerscheinungen

von

Dr. Ernst Lecher.

Aus dem physikalischen Cabinet der k. k. Universität in Wien.

(Mit 8 Textfiguren.)

Die folgende Abhandlung enthält die Beschreibung und Untersuchung einer neuen Methode, elektrische Wellen in Drähten mit Hilfe der von Hertz studirten Resonanz zu beobachten und zu messen. Die Arbeit liegt ganz im Bereiche jenes ausgedehnten Gebietes, welches vor dem Auftreten von Hertz kaum zugänglich erschien. Stets habe ich die Beobachtungen von Hertz bestätigt gefunden; in einem wichtigen Punkte jedoch erhielt ich ein anderes Resultat: ich fand nämlich für die Geschwindigkeit der Elektricität in Drähten, für welche Hertz 200.000 *km/s* angibt, fast genau den Werth der Lichtgeschwindigkeit, wie dies ja auch die Maxwell'sche und alle sonstigen Theorien fordern. Warum mein Resultat von dem Hertz'schen differirt, kann ich nicht angeben. Eine mögliche Fehlerquelle bei Hertz, welche ich zuerst zur Erklärung dieser Abweichung heranziehen wollte, erwies sich bei näherem Studium als zu klein. Da aber meine Methode sehr einfach und übersichtlich und dabei ungemein leicht (ja sogar in Form eines Vorlesungsversuches) ausführbar ist, halte ich meinen Werth nicht nur theoretisch, sondern auch experimentell für den wahrscheinlicheren.

Der Versuch in seiner einfachsten Form.

A und A' sind quadratische Blechplatten von 40 *cm* Kantenlänge; sie sind mittelst eines 100 *cm* langen Drahtstückes ver-

bunden, das in der Mitte durchschnitten ist und daselbst in *F* zwei Messingkugeln von circa 3 *cm* Durchmesser enthält (in Fig. 1 ist nur der Querschnitt der quadratischen Platten gezeichnet). Die beiden Messingkugeln haben einen Abstand von circa 0·75 *cm* von einander und stehen mittelst eines dünnen Drahtes

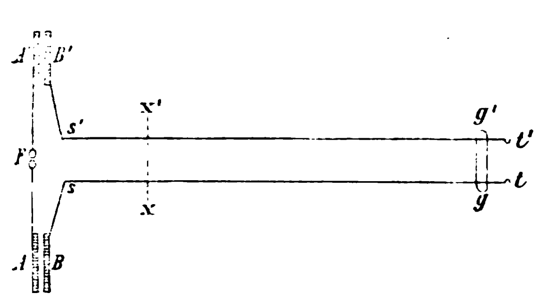


Fig. 1.

in Verbindung mit den Polen eines sehr kräftigen Inductoriums, dessen Rolle eine Länge von 35 *cm* und einen Durchmesser von 18 *cm* hatte; dasselbe wurde durch vier kräftige Accummulatoren, in einigen Fällen auch durch eine Dynamomaschine gespeist. Zur Stromunterbrechung diente ein Foucault'scher Quecksilberinterruptor. Den Platten *A* und *A'* gegenüber stehen zwei gleichgrosse Platten *B* und *B'* in einer Entfernung von etwa 4 *cm*. Von diesen Platten *B*, *B'* führen zwei Drähte gegen *s* und *s'* und von da parallel bis *t* und *t'*. Der Abstand der parallelen Drähte von einander (*s* bis *s'*) sei 10—50 *cm*; die Länge *st* (*s't'*) hingegen muss mindestens 400 *cm* betragen. Der Durchmesser dieser parallelen Drähte betrug hier und bei allen Versuchen dieser Publication 1 *mm*. Für diesen ersten Versuch nehmen wir an, die Länge sei etwa 600 *cm* (in der Figur zu kurz gezeichnet), die Entfernung der parallelen Drähte von einander 30 *cm*. An den Enden der parallelen Drähte (*t* und *t'*) ist je eine Schnur befestigt, welche in der Verlängerung der Drähte noch etwa 100 *cm* weiter führt und ein leichtes und bequemes Spannen derselben ermöglicht.

Dieser Theil meiner Anordnung ist jener ähnlich, welche in der schönen Arbeit von Hertz[1] angegeben ist und welche auch bei den Versuchen von Sarasin und De la Rive[2] in Verwendung kam.

[1] Wied. Ann. XXXIV, 551, 1888.

[2] Archives des sciences physiques et naturelles. Genève, t. XXIII, 113, 1890.

Über die Drahtenden t und t' lege ich nun eine ausgepumpte Glasröhre ohne Elektroden gg', am besten mit Stickstoff und einer Spur Terpentindampf gefüllt; diese Glasröhre beginnt in Folge der elektrischen Schwingungen in den Drähten zu leuchten.

Legt man jetzt, während die Röhre hell leuchtet, einen Drahtbügel über die parallelen Drähte, so wird er dieselben metallisch mit einander verbinden (die Richtung des Drahtbügels ist senkrecht zur Richtung der Drähte und durch die punktirte Linie xx' in Fig. 1 angedeutet); dann verschwindet momentan das Licht in der Röhre. Verschiebt man nun den Querbügel xx' längs der Drähte, so kommt man an gewisse, merkwürdig scharf definirte Stellen, wo die Röhre plötzlich wieder aufleuchtet.[1] Die Aufsuchung dieser Stellen und der die Lage dieser Stellen bedingenden Umstände bildet den Hauptinhalt dieser Arbeit.

Bei obiger Länge der Drähte von etwa 600 *cm* und einer gegenseitigen Entfernung von circa 30 *cm* liegt die Stelle, an welcher beim Gleiten des Verbindungsbügels längs der parallelen Drähte die Röhre am Ende plötzlich aufleuchtet, ungefähr 100 *cm* von s und s' entfernt, also ungefähr in jener Gegend, welche in Fig. 1 mit x und x' bezeichnet ist.

Warum leuchtet die Röhre gerade nur bei Überbrückung dieser Stelle?

Die erste Idee bei Beantwortung dieser Frage scheint die, dass man in den Punkten x und x' Schwingungsbäuche der elektrischen Schwingungen habe. Die Schwingung in dem Drahtstücke Bst etablirt sich jedenfalls so, dass am Ende t abwechselnd grosse Potentialschwankungen vor sich gehen; es würde dies in einer akustischen Analogie dem geschlossenen Ende einer Pfeife entsprechen. Die Elektricität — Luft — drängt gegen dieses Ende hin und von demselben wieder weg, so dass wir an dieser Stelle das haben, was man bei einer akustischen Bewegung den Knotenpunkt nennt. Da wir auch in der Platte B

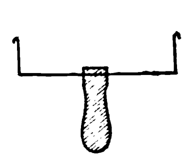
---

[1] Statt der Glasröhre liesse sich auch in ganz analoger Weise ein Funken verwenden, welchen man zwischen t und t' durch Einschaltung eines Funkenmikrometers erhält; die Messungen scheinen aber genauer, wenn ein Ausgleich der Potentialen durch den leitenden Funken vermieden wird. Eine in einigen Punkten ähnliche Anordnung hat J. J. Thomson angegeben. Proc. of Royal Society of London. Vol. XLVI, p. 11, 1889.

solche abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen haben, so wäre wohl die Idee am nächsten liegend, dass, während die elektrische Strömung zwischen B und t hin und her schwingt, in der Mitte sich irgendwo eine Stelle befinden muss, wo das Potential während der Strömung stets Null ist; es entspricht dies dem Schwingungsbauch einer Pfeife, wo die Luft ohne jede Verdichtung und Verdünnung hin und her pendelt. In dem zweiten Drahte $B's't'$ ist das Zeichen des Potentials, ebenso wie das der Bewegung, stets das entgegengesetzte. Wenn ich daher die (elektrische) Mitte der beiden Drähte mit einander verbinde, so würde nach dieser Auffassung im Querbügel keine Bewegung stattfinden und derselbe daher gerade an dieser Stelle die elektrische Erscheinung nicht stören, so dass am Ende, in der Nähe der Röhre, heftige Potentialschwingungen stattfinden, welche die Röhre zum Leuchten bringen.

Diese — wiewohl die zunächst liegende — Erklärung gibt aber das Wesen des Versuches nicht vollständig. Wir haben es vielmehr mit einer Resonanzerscheinung zu thun. Wenn ich den Querbügel über xx' lege, so etablirt sich zunächst eine Hauptschwingung, welche, von B ausgehend, über $sxx's'$ nach B' geht. Schon das Ohr erkennt am Knattern des Funkens die Änderung der Hauptschwingung. Diese erste Schwingung erzeugt durch Induction eine zweite Schwingung, welche in xx' erregt wird und sich von t' über $x'x$ nach t fortpflanzt. Dass diese Auffassung die richtige ist, wird aus vielen Beispielen der späteren Messungen hervorgehen, doch will ich gleich hier einige diesbezügliche Versuche angeben.

Der Verbindungsdraht xx' muss eine bestimmte Länge haben sagen wir, den obigen Dimensionen entsprechend, 42 *cm*. (Fig. 2 gibt den Querbügel mit seinem Holzgriffe in $^1/_{10}$ seiner natürlichen Grösse wieder.) Nimmt man als Querbügel einen langen Draht, so rückt xx' je nach Umständen von oder gegen ss'. Die Hauptschwingung habe zuerst die Drahtlänge R zur Verfügung, plus der Brücke, die wir ihrer Kürze wegen vernachlässigen wollen; die resonirenden Wellenlängen hätten eine kleinere Länge r. Hat nun die Brücke eine grössere Länge l, so wird das frühere


Fig. 2.

Verhältniss $R:r$ in $(R+l):(r+l)$ verrückt, daher die Verschiebung von xx'.

Überdies aber ist die ganze Erscheinung bei Überbrückung der parallelen Drähte mittelst eines langen Verbindungsstückes viel weniger ausgeprägt als früher. Eine luftleere Röhre hat nämlich das Unangenehme, dass sie den kleinsten elektrischen Kräften gegenüber reagirt, und da jetzt die Strecke xx', wo die Induction stattfindet, viel grösser ist als früher, ist auch die Resonanz eine viel stärkere, so dass auch bei einer minder guten Übereinstimmung der beiden Schwingungen noch immer hinlänglich Energie zur Erregung der Lichterscheinung da ist. Die Röhre bleibt immer hell. Macht man umgekehrt den Drahtbügel sehr klein, bringt man die beiden Drähte etwa gar durch Zusammenbiegen an der entsprechenden Stelle xx' zur thatsächlichen Berührung, so leuchtet die Röhre gar nicht mehr. Die Strecke xx', durch deren Induction die Energie für den ungeschlossenen Kreis $txx't'$ geliefert wird, ist jetzt zu klein, und auch hiedurch wird die Erscheinung, und zwar im entgegengesetzten Sinne wie früher, wo der Querbügel zu lang war, gestört. Die Röhre bleibt immer dunkel.

Ein weiterer Beweis dafür, dass wir es hier mit einer Resonanzbewegung zu thun haben, dürfte folgender sein:

Ich mache den Querbügel so, dass er aus zwei, von einander isolirten parallelen Drähten besteht, bringe ihn genau an die Stelle xx', wo die Röhre hell aufleuchtet, löthe ihn an dieser Stelle fest und spalte jetzt durch Durchschneiden der Hauptdrähte den Bügel xx' der ganzen Länge nach entzwei. Nun haben wir den ersten Stromkreis $Bsxx's'B'$ metallisch geschlossen und daneben, von ersterem vollständig isolirt, den secundären Leiter $txx't'$.

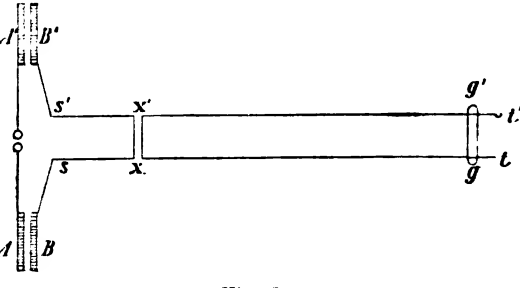


Fig. 3.

Nach dieser Längsspaltung von xx' leuchtet die Röhre ganz so wie früher (Fig. 3).

Es seien nun die Drähte genau so wie früher gespannt, ein einfacher Drahtbügel von passender Länge quer übergelegt und so lange hin und her geschoben, bis die Röhre am Ende hell aufleuchtet. Wollen wir nun der Gründlichkeit wegen den Beweis dafür erbringen, dass die Röhre auch für die kleinsten Potentialschwingungen anspricht, so können wir die Röhre fast bis zu xx' verschieben, ohne dass ihr Licht sich irgendwie verändert.

Der Bügel sei in seiner richtigen Lage xx', die Röhre liege irgendwo in der Mitte zwischen xx' und tt', und ich schneide jetzt von den Drahtenden je etwa 100 *cm* weg. Dadurch wird der secundäre Kreis verkleinert, die Resonanz hört momentan auf: die Röhre ist dunkel. Schiebe ich jetzt aber den Bügel xx' gegen ss', so verkleinere ich zu gleicher Zeit die primäre Schwingung und vergrössere die secundäre, und wenn ich xx' etwa 50 *cm* zurückgeschoben, findet wieder Resonanz statt: die Röhre leuchtet von Neuem auf. Dieser Versuch und der sofort zu beschreibende sind besonders für Vorlesungszwecke sehr geeignet.

Es sei nun wieder der Bügel an der richtigen Stelle und die Röhreleuchte. Wenn ich jetzt über die beiden Drahtenden tt' je ein Staniolblatt lege, so wird durch Einführung dieser Capacität am Ende die Schwingungsdauer eine langsamere, die Röhre hört momentan zu leuchten auf, und ich muss mit dem Bügel xx' gegen tt' rücken, um sie wieder hell leuchten zu machen. Dagegen kann man den Bügel, den Schwingungsbauch, berühren oder eine Capacität an denselben hängen, ohne die Erscheinung zu stören; wie ich aber an einer anderen Stelle die Leitung berühre, erlischt das Licht sofort.

Man sieht aus diesem einfachen Versuche schon, dass diese Methode geeignet ist, Capacitäten (und Diëlektricitätsconstanten) bei so raschen Schwingungen zu vergleichen, und dass man auch die Äquivalenz der Selbstpotentiale und der Capacitäten in der bekannten Formel für die Schwingungsdauer elektrischer Oscillationen prüfen kann.

Ein Nachweis dafür, dass man es hier wirklich mit elektrischen Oscillationen zu thun hat, kann in derselben Weise erbracht werden, wie dies Hertz gethan. Zieht man die Kugeln des Hauptfunkens soweit auseinander, dass die Oscillationen in dem Hauptfunken aufhören — man kann die Kugeln auch soweit von einander

ziehen, dass gar kein Funke mehr überspringt — so bleibt die Röhre immer dunkel, wiewohl jetzt an den Drahtenden die volle Spannung des Rhumkorff ungeschmälert zur Geltung kommt.

Beschreibung einiger wichtiger Nebenumstände.

Um meine Methode vollständig zu beschreiben, möchte ich in diesem Abschnitte einige Nebenumstände detailliren, welche für das Gelingen der Versuche wichtig sind.

Statt der eingangs geschilderten Röhre kann man auch eine Geissler'sche Röhre über die Enden t und t' legen.[1] Dies muss jedoch vorsichtig so geschehen, dass die Elektroden der Geissler'schen Röhre nicht nur mit den Drahtenden t und t' in keinerlei metallische Verbindung treten, sie müssen vielmehr noch einige Centimeter von denselben entfernt sein. Es soll nämlich durch das Überlegen der Geissler'schen Röhre oder der früher erwähnten Glasröhre keinerlei elektrische Strömung zwischen den beiden Drähten vermittelt werden. Unter einer grösseren Anzahl Geissler'scher Röhren, die je nach Inhalt und Druck verschieden

[1] Die Verwendung Geissler'scher Röhren bei den Hertz'schen Versuchen hat zuerst Dragomuis (Nat. 39, pag. 548, 1889) angegeben. Ich habe gleichfalls die meisten der Hertz'schen Versuche in ähnlicher Weise, wie es Dragomuis beschreibt, mit Hilfe von Geissler'schen Röhren in der Festversammlung der chemisch-physikalischen Gesellschaft am 12. December 1889 in Wien gezeigt, wobei ich mich jedoch, um durch Ableiten der Elektricität nicht gestört zu sein, zum grössten Theile solcher Röhren bediente, welche keine Elektroden besassen. Dass solche Röhren durch elektrische Induction ins Leuchten kommen können, ist ja eine längst bekannte Thatsache, als neu entdeckt erst jüngsthin von Herrn James Moser (diese Ber., 9. Jänner 1890). Dieses Leuchten entsteht, wie schon Worthington (Phil. Mag. [5] XIX, p. 218, 1885) muthmasst, wohl durch keinerlei Strom, es entspricht vielmehr dem Hin- und Herschwanken der Induction in der Röhre.

Nur in einem Falle haben mir bei Nachmachung der Hertz'schen Versuche die Geissler'schen Röhren den Dienst versagt. Ich wollte bei dem bekannten Versuche mit dem parabolischen Hohlspiegel das kleine Fünkchen hinter dem zweiten Spiegel einem grösseren Zuseherkreis sichtbar machen und habe es zunächst mit verschiedenen Elektroden probirt, wobei ich die besten Resultate erhielt, wenn ich das Fünkchen zwischen einer Quecksilberkuppe und einer Kupferspitze überspringen liess. Noch schöner ist der Funke zwischen Quecksilber und Zink, nur tritt da leider nur gar zu leicht ein kräftiges Amalgamiren und Abbrechen der Spitze ein. Wenn ich

wirken, wird man immer einige passende herausfinden können. Die ausgepumpte Röhre, welche ich verwendete, brauchte ich nicht einmal mit den Drähten in Berührung zu bringen; selbst in 10 *cm* Entfernung leuchtete sie noch, sowie elektrische Oscillationen in den Drähten stattfanden. (Bei directer Induction durch die primäre Schwingung konnte ich bis auf 1 *m* Entfernung gehen.) So konnte ich mich leicht davon überzeugen, dass beim directen Überlegen der Röhre die Schwingungsbäuche an derselben Stelle liegen, wie wenn die Röhre die Drähte gar nicht berührt, dass wir somit wirklich einen Indicator für die elektrischen Oscillationen haben, ohne dass dieselben dadurch merklich gestört wurden.

Bei Vorlesungsexperimenten jedoch, wo es sich in erster Linie um ein brillantes Leuchten handelt oder bei sehr grossen Drahtlängen, wo die Schwingung schon sehr schwach ist, empfiehlt es sich, an jener Stelle der luftleeren Röhre, wo dieselbe an den Drähten anliegt, je einen kleinen Drahtring oder einen Staniolstreifen nach Art der Gassiot'schen Röhren herumzubiegen. Ja, selbst ein direktes Einschalten der Geißler'schen Röhre ändert die Lage der Wellen nur wenig.

Was den Hauptcondensator AB und $A'B'$ betrifft, so ist auch dessen Beschaffenheit an einige Bedingungen geknüpft. Seine Capacität soll möglichst gross sein, damit die Schwingungen in den Drähten kräftig ausfallen. Macht man aber diese Capacität zu gross, so hört die ganze Erscheinung auf. Wir werden in späteren Messungen einige Male Gelegenheit haben, zu sehen, dass die Capacität des Condensators bei gewissen Drahtlängen einen Maximalwerth nicht übersteigen darf, dass somit wirklich, wie dies ja die Theorie auch fordert, dann ein Oscilliren der Elektricität aufhört. Bei einer Vergrösserung des Condensators

---

nun die Luft um das kleine Fünkchen, welches zwischen Quecksilber und Kupfer übersprang, durch Auspumpen entfernte, änderte das Fünkchen weder Helligkeit noch Gestalt, so dass sich mit freiem Auge nicht einmal entscheiden liess, ob die Entladung im luftleeren Raume oder unter gewöhnlichem Atmosphärendruck vor sich ging.

Auch möchte ich noch erwähnen, dass besonders bei nahen Distanzen manche der Funken, wie sie Hertz bei seinen Versuchen in secundären Leitern erzeugt, Knallgas zur Explosion bringen, durch welches Mittel man gleichfalls das Vorhandensein des Fünkchens einem grösseren Auditorium bemerkbar machen kann.

wird die Erscheinung immer verschwommener und capriciöser, die sonst gleichförmig leuchtende Röhre leuchtet nur alle paar Secunden einmal auf, um schliesslich ganz dunkel zu bleiben, so dass man es nicht mit einem plötzlichen Versagen, sondern mit einem immer Undeutlicherwerden des Phänomens zu thun hat.

Ferner habe ich der Bequemlichkeit wegen versucht, den Luftcondensator durch einen an Capacität gleich grossen, aber räumlich kleineren Glascondensator zu ersetzen. Hier tritt nun ein anderer Übelstand störend hervor: die Dichtigkeit der Elektricität wird eine zu grosse. Ich habe ein Glas von 22 *mm* Dicke verwendet und darüber entsprechend grosse Staniolscheiben geklebt, das Ganze überdies in Paraffin oder in Schellack gebettet, und trotzdem war die Ausstrahlung der Elektricität am Rande der Scheibe eine so grosse, dass man die Lichterscheinung durch das Paraffin sah.

Um das lästige Aufpoliren der Kugeln, zwischen welchen der Funken überspringt, zu vermeiden, habe ich diese Kugeln excentrisch gestellt, so dass beim Drehen der Elektroden um die Längsachse ohne Änderung der Funkendistanz stets neue Partien der Kugeln in die Funkenbahn kamen. Die Länge des Funkens ist von keinerlei Einfluss, solange er nicht zu gross oder zu klein wird, in welch' ersterem Falle die Oscillation ganz aufhört, in letzterem aber die Potentialschwankung eine zu kleine wird.

Des Ferneren fand ich, dass die Lage der Schwingungsbäuche abhängig ist von der Entfernung, in welcher die beiden parallelen Drähte von einander gespannt sind. Hingegen konnte ich einen Einfluss der umliegenden Gegenstände, der Wände, Gasarme etc. auf die Schwingungsdauer kaum beobachten. Gleichwohl habe ich es vermieden, den Platz eventueller grösserer Leiter in der Nähe der Drähte während der Versuchsdauer zu verändern.

Weiter zeigte sich, dass bei Versuchsreihen, welche mit einander zu vergleichen sind, der Zuleitungsdraht vom Inductorium her der primären Schwingung stets an der nämlichen Stelle zugeführt werden muss; es ist somit nicht gleichgiltig, ob die Zuleitung mehr in der Nähe der Elektroden, in der Mitte der Leitung oder am Condensator endet. Auch die Gestalt des Zuleitungsdrahtes ist von Einfluss auf die Lage der Schwingungs-

bäuche. Jedenfalls schwingt der Zuleitungsdraht mehr oder weniger mit. Ich will die betreffenden Messungen hier nicht mittheilen, da einige Schlüsse, welche ich im Laufe der Arbeit experimentell ziehen werde, diese Behauptung erhärten.

Nachdem alle diese Bedingungen ausprobirt waren, schritt ich zu folgender Anordnung sollen.

Wellenlänge in verschieden langen Drähten.

Fig. 4 gibt die Anordnung der Versuche. Die primäre Schwingung findet zwischen den vertical stehenden Platten A und A' (Quadrate mit 40 *cm* Seitenlänge) durch den Funken F statt. Die Entfernung von A bis A' ist 66 *cm*. Von A und A' je 6 *cm* entfernt stehen die secundären Platten B und B'; es ist

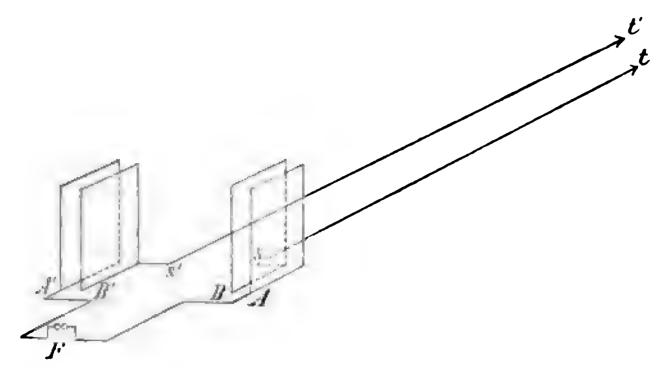


Fig. 4.

zwischen den Platten A und B überdies noch je ein dünnes Paraffinpapier eingeschoben (in der Fig. 4 nicht gezeichnet), um jedes Überströmen der Elektricität unmöglich zu machen. Die Drahtlänge von der Ecke der Platte B bis zu s beträgt 10 *cm*, die Strombahn von A bis F 100 *cm*.

Die Zuleitung der Elektricität geschieht unmittelbar neben den Kugeln. Bei den nun zu schildernden Versuchen blieb der ganze Theil der beschriebenen Anordnung unverändert stehen, während von s und s' an ($ss' = 31$ *cm*) die beiden Drähte in gerader Richtung parallel weggeführt wurden und die Länge dieser Drähte (st und $s't'$) von 300 *cm* bis 3500 *cm* variirt werden konnte. Dann wird die in Fig. 2 gezeichnete Brücke (Strom-

länge = 42 *cm*) verschoben und jene Stelle, wo die Röhre am Ende der Drähte aufleuchtete, notirt.

Folgende Tabelle enthält einen Theil dieser Beobachtungen, und zwar beschränke ich mich auf eine Länge von 2000 *cm*, da die Resultate der grösseren Distanzen mir nichts wesentlich Neues zu geben und auch weniger genau zu sein scheinen.

Länge des Drahtes in *cm*	Entfernung der Bäuche von *ss'* in *cm*					
247	—	—	—	—	—	—
348	33	—	—	—	—	—
451	73*g*	—	—	—	—	—
648	113*g*	477*s*	—	—	—	—
870	243*gg*	591*s*	712*ss*	—	—	—
1062	34	329*g*	733	892*s*	—	—
1270	77	435	890	1036	1270	—
1435	0	99	591	803*ss*	1006	1166
1632	22	145	631	1151	1232	—
1801	40	174	756	1293	1469	1562
1956	58	197	758	821	1385	1588
			u. s. w.			

Ein neben den Zahlen für die Schwingungsbäuche stehendes *g* bedeutet, dass die Erscheinung deutlich erscheint, das Licht der Röhre hell ist; *gg* bedeutet sehr gut, *s* schlecht, *ss* sehr schlecht.

Diese Zahlen scheinen besonders bei weiteren Distanzen ganz willkürlich über die Drahtlängen zerstreut zu liegen. Folgender Versuch gibt eine Erklärung hiefür.

Verschieben wir, während der erste Drahtbügel an seiner Stelle bleibt, einen zweiten gleich grossen Querbügel längs der Drähte, so finden wir neuerlich Stellen, wo die Röhre aufleuchtet, immer aber nur an solchen Orten, wo bereits der erste Versuch mit dem einen Drahtbügel allein einen Schwingungsbauch ange-

zeigt. Liegen diese zwei Bügel an ihrer richtigen Stelle, so kann man auch noch einen dritten aufsetzen, u. s. f. Die Zahlen, welche in obiger Tabelle einmal, respective zweimal unterstrichen sind, zeigen an, dass sie in dieser Weise zusammengehören.

Legen wir z. B. bei der Drahtlänge 1632 einen Bügel über 22, so leuchtet die Röhre. Wir lassen den Bügel ruhig liegen und nehmen nun einen zweiten, und wenn wir diesen verschieben, leuchtet die Röhre bei 631 oder bei 1232, nicht aber bei 145, 1151 oder an sonstigen Stellen. Legen wir diesen zweiten Bügel jetzt (der erste bleibt auf 22) auf 631 und suchen den Draht mit einem dritten Bügel ab, so müssen wir genau auf 1232 gehen, damit die Röhre wieder leuchte.

Ebenso können wir anderseits bei der gleichen Drahtlänge von 1632 auch in ähnlicher Weise 145 und 1151 gleichzeitig überbrücken.

Es gehören also bei dieser Drahtlänge von den fünf Knotenpunkten zusammen 22, 631 und 1232, welche gleichzeitig überbrückt zusammen leuchten, oder aber 145 und 1151.

Diese Versuche machen eine ohnehin naheliegende Erklärung selbstverständlich. Die Elektricität in einem Drahte von bestimmter grösserer Länge schwingt ähnlich, wie die Luft in einer Pfeife. Denken wir uns eine lange Röhre mit Luft gefüllt und am Anfange der Röhre eine Vorrichtung ähnlich der einer Zungenpfeife. Eine kurze Strecke hinter dieser Pfeife sei die Röhre durch eine in der Längsrichtung verschiebbare, ziemlich starre Quermembrane geschlossen. Die Schwingungsdauer der Pfeifenzunge bestimme die Tonhöhe, werde aber bis zu einem gewissen Grade von der Schwingung der anliegenden, bis zur Membrane reichenden Luftsäule beeinflusst. Wenn ich hier die Membrane längs der Röhre verschiebe, so wird das Ende der Röhre in gewissen Fällen resoniren, in anderen nicht, und die Erscheinung wird nur dadurch scheinbar complicirter, weil wir mit dem Verschieben der Membrane nicht nur das Verhältniss der beiden Röhrentheile, sondern gleichzeitig auch — bis zu einem gewissen Grade — die Schwingungsdauer der erregenden Zunge ändern.

Ähnlich ist es bei unseren elektrischen Schwingungen.

Fig. 5 stelle der Reihe nach die verschiedenen Drahtlängen der Tabelle auf Seite 350 vor. Die Drahtlängen sind so aufge-

zeichnet, dass die Enden derselben eine gerade Linie bilden. Bei der Länge 348 *cm* und 451 *cm* liegt der Schwingungsbauch *a* in der elektrischen Mitte zwischen dem Drahtende und *BB'*. Bei 648 und 870 müssen wir mit diesem Punkte noch weiter hinausrücken; es ist somit auch die primäre Schwingung vergrössert worden. Gegen das Ende der Drähte liegen zwei weitere, undeutlich ausgesprochene Punkte *c* und *b*, deren Bedeutung erst bei

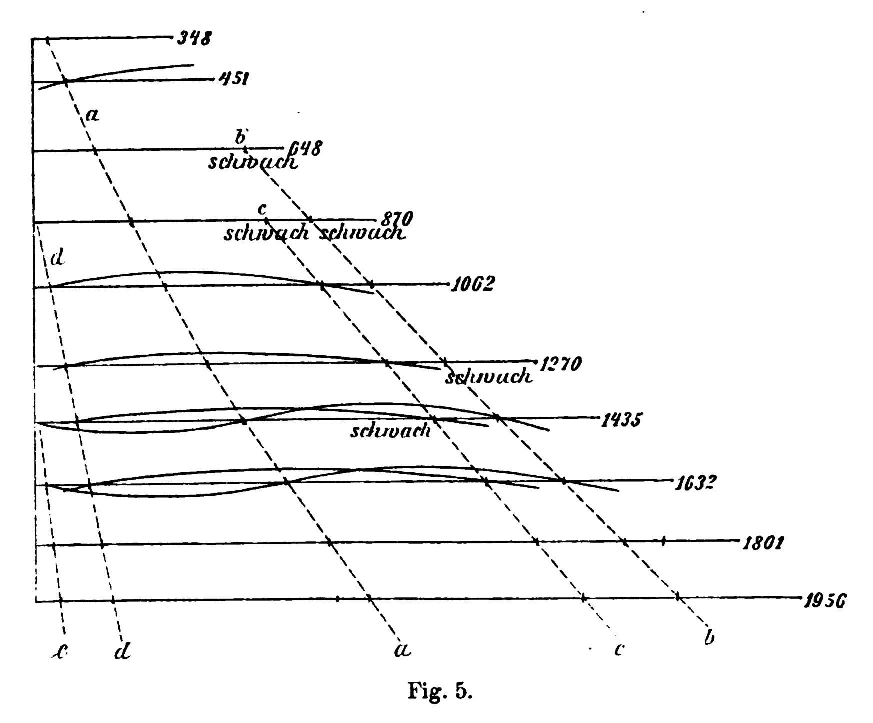


Fig. 5.

grösseren Längen, sagen wir z. B. 1435, klar wird. Es sind dann neue Schwingungsbäuche vom Anfange her in den Draht hineingerückt.

Betrachten wir zuerst den mittleren Schwingungsbauch *a*. Wenn wir den Draht immer länger gemacht haben, mussten wir mit *a*, wie die Zeichnung zeigt, ganz symmetrisch hinausrücken, d. h. da zunächst die secundäre Drahtlänge vergrössert wurde, mussten wir, um Resonanz zu erzielen, auch die primäre vergrössern. In einem gewissen Momente aber lässt sich die primäre Schwingung durch den angehängten Draht nicht weiter ver-

grössern (genau wie im obigen akustischen Beispiel die Schwingung der Pfeifenzunge stärker wird, als die der mitschwingenden Luftmasse). Wir sehen das zum erstenmal bei einer Drahtlänge von 1435, wiewohl die ersten Anzeichen schon viel früher eintreten. Vom Schwingungsbauch *a* aus haben wir nicht, wie früher, eine halbe Wellenlänge bis zum Ende, sondern drei halbe, es hat sich zwischen *a* und dem Ende ein neuer Schwingungsbauch herausgebildet, ebenso natürlich auch auf der anderen Seite zwischen *a* und *B*, und wir können daher jetzt drei Brücken auflegen. Die eine Curve zeigt die betreffende Schwingungsform; sie schneidet die horizontale in drei Punkten, den Schwingungsbäuchen, jenen Stellen, die man gleichzeitig überbrücken kann, *c*, *a* und *b*. Diese Längen, 1435 und die benachbarten, können aber auch noch so schwingen, dass sich bei *d* und *e* je ein Schwingungsbauch herausbildet.

Aus diesen Versuchen lässt sich auch ersehen, wie gering der Einfluss der umliegenden Gegenstände ist. Die Zahlen 0, 591, 1166 für die Länge 1435 ergeben die Wellenlängen 591 und 575, die Zahlen 22, 631, 1232 für die Länge 1632 ergeben die Wellenlängen 609 und 601; endlich die Zahlen 40, 756 und 1469 für die Länge 1801 ergeben die Wellenlänge 716 und 713 u. s. f., woraus ersichtlich, dass die Wellenlängen rechts und links von *a* bis auf einige Percent einander gleich sind, wiewohl die erste Drahthälfte ziemlich knapp durch einen Thürstock, die zweite jedoch ganz frei durch einen grossen Saal ging. Nur wenn metallische Leiter in der Nähe wären, welche auf die Schwingungen ungefähr resonirten und dabei auch einen beträchtlichen Theil der Energie der ursprünglichen Schwingung absorbirten, nur dann würde sich ein Einfluss auf die Lage der Bäuche herausstellen.

Dass dem so ist, ergibt ja gerade die ganze Versuchsreihe, und dieses Ergebniss erscheint mir nicht unwichtig. Die Oscillation einer primären Schwingung ist nicht unter allen Umständen unveränderlich. In den eben geschilderten Versuchen, die allerdings dadurch, dass ein grosser Energie-Theil der Hauptschwingung für die Nebenschwingung verwendet wird, besonders dazu geeignet sind, erhalten wir ja bei einer und derselben primären Oscillation alle möglichen Wellenlängen innerhalb gewisser Grenzen.

Ich werde im zweitnächsten Abschnitte zeigen, dass auch bei der Anordnung, wie sie Hertz verwendet, die primäre Schwingung zwar nicht so energisch, wie hier, aber immerhin auch geändert werden kann.

Capacitäten an den Drahtenden.

Die beiden Drähte hatten je eine Länge von 1122 *cm*; die primäre Schwingung und die Hauptcondensatoren *AB* waren genau wie früher. Das Ende der Drähte war durch je einen weichen Draht von 69·7 *cm* Länge mit einer kreisförmigen Condensatorplatte ($R = 8·96$ *cm*) verbunden.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in *cm*	Entfernung der Schwingungsbäuche von *ss'* in *cm*	
	c	*a*
1·6	561·3	1020·5
1·2	590·3	1043·3
0·9	630·4	sehr schwach 1071·3
0·7	659·1	sehr schwach 1081·5
0·6	679·8	nichts zu sehen —
0·5	695·5	nichts zu sehen —

Aus dieser Tabelle ist zu ersehen, dass eine Vergrösserung der Capacität am Ende die Schwingungsdauer verlängert; ich muss mit dem Bügel hinaus. Des Ferneren zeigt sich, dass diese Vergrösserung, absolut durch die Verschiebung in Centimetern gemessen, für die kleinere Schwingungsdauer viel weniger ausgibt. Die Zahlen steigen von 1020 auf 1081 um 61, während die entsprechenden Zahlen 561 und 659 sich um 98 unterscheiden. Es ist dies eine Folge der Äquivalenz des Selbstpotentials und der Capacität. Bei einer Vergrösserung der Capacität muss, wenn die Schwingungsdauer gleich bleiben soll, der längere Draht viel stärker verkleinert werden, als der kürzere.

Weiters zeigt sich, dass bei Vergrösserung der Capacität die Schwingung, wie bereits eingangs angedeutet, eventuell ganz aufhört, und zwar nur die raschere, denn nur für diese ist dann

die Capacität im Verhältnisse zum Selbstpotential zu gross. Wäre das Versagen ein präciseres, so könnte man daraus den enormen Widerstand des Kupferdrahtes gegen so rasche Schwingungen berechnen.

Schliesslich möchte ich an dieser Stelle darauf hinweisen, dass man denselben Knotenpunkt sowohl durch Änderung der Drahtlänge als auch der Capacität erreichen und auf diese Weise die Äquivalenz des Selbstpotentials und der Capacität nachweisen kann. Obige Messungen sind wegen nicht genügend genauer Parallelstellung der Condensatorplatten wohl kaum zu einer genaueren Rechnung zu verwenden.

Ebenso kann derselbe Schwingungsbauch dadurch erhalten werden, dass man die Condensatorplatten auseinanderzieht und dafür ein Dielektricum einschiebt. Über eine auf diese Weise vorgenommene Bestimmung der Dielektricitätsconstanten, will ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit referiren.[1]

Geschwindigkeit der Elektricität in Drähten.

Ich glaube, dass die von mir geschilderte Methode eine einwurfsfreie Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer elektrischen Welle im Drahte gestattet. Zu dem Zwecke wurden die Condensatorplatten am Ende der Drähte in eine Entfernung von 0·990 *cm* gebracht. (Da die Platten, trotzdem sie für diesen Versuch ganz besonders vom Mechaniker montirt wurden, nicht genau parallel standen, so wurden sie zunächst mittelst einer Mikrometerschraube soweit zusammengeschraubt, bis der Contact derselben durch die Leitung eines elektrischen Hilfsstromes sich zeigte und hierauf mit einem sehr flachen Keil die nicht auf einander liegenden Stellen von der Seite her gemessen. Obige Zahl ist bereits das Mittel dieser Messungen.) Die beiden geraden Drähte hatten, wie früher, eine Länge von 1122 *cm*; von ihren Enden ging, wie früher, je ein lose gespannter Draht von 69·7 *cm* Länge zur Mitte der beiden Condensatorplatten OO'. Die Glasröhre gg' liegt über diesem Condensator OO'.

Die beiden langen Drähte wurden nun an zwei Stellen, d und c, gleichzeitig überbrückt und d und c sorgfältig so gewählt, dass die Röhre am Ende möglichst schön aufleuchtete. d liegt

[1] Vorgelegt in der Sitzung am 16. Mai 1890.

121·5, c 1061·1 *cm* vom Anfange ss' entfernt (Mittel aus 20 Versuchen).

Wir haben jetzt zwei Schwingungen scharf abgegrenzt: eine halbe Schwingung geht zwischen den beiden Condensatorplatten über cc' hin und her, während die entsprechende ganze Schwingung die geschlossene Strombahn der Strecke $dcc'd'$ ausfüllt (Fig. 6). Es ist somit die halbe Wellenlänge der ganzen Schwingung gleich cd + Querbrücke = 982 *cm*, weil der Querbügel = 42·0 *cm* ist.

Die Schwingungsdauer hiefür lässt sich aber aus der zweiten

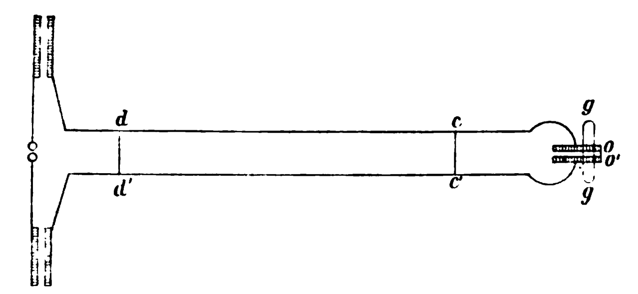


Fig. 6.

Schwingung nach der Formel $\pi\sqrt{PC}/v$ berechnen, wo P das Selbstpotential, C die Capacität und v die Lichtgeschwindigkeit respective die Verwandlungszahl des elektromagnetischen in elektrostatisches Masssystem ist, da ich P und C in diesen beiden Massen ausdrücke. Für das Selbstpotential P verwenden wir die einfache Neumann'sche Formel $2L\{\log \text{nat.}(4L/d)-0\cdot 75\}$ und erhalten $P = 5248$ *cm*, wenn wir für die Länge L der Strombahn hier einsetzen:

2 × (Abstand des Bauches c vom Ende + Condensatorzuleitungsdraht) + Querbrücke, d. i. 303·2 *cm*, und für den Durchmesser des Drahtes $d = 0\cdot 1$ *cm*.

Die Capacität berechnet sich mit 20 *cm* nach der einfachen Formel $\frac{R^2}{4\delta}$; würde ich die Kirchhoff'sche[1] Formel anwenden, so käme ich auf ungefähr 22 ($R = 8\cdot 96$ *cm* und $\delta = 0\cdot 990$ *cm*). Da

[1] Monatsbericht der Berliner Akademie, 1877, Gesammelte Abhandlungen, S. 101.

die Strombahn eine verhältnissmässig kurze ist und in der Mitte der kreisförmigen Platten eigentlich nicht endet, so glaube ich, dass der Condensator nicht ganz ausgenützt wird, dass man, ohne den Effect wesentlich zu ändern, noch aus der Mitte der Platte ein kreisförmiges Loch herausschneiden könnte. Man könnte vielleicht durch einen solchen Versuch ersehen, inwieweit die Condensatorplatten ihrer theoretischen Aufgabe, die Enden der Stromschwankung zu bilden, nachkommen. Ich glaube daher, dass auch die Zahl 20 noch zu hoch ist, gleichwohl will ich diese Zahl in Ermanglung der richtigen anwenden. Aber auch die Zahl 22, welche nach den Messungen von Klemenčič[1] auch bei der angewandten Distanz noch annähernd richtig sein dürfte, würde das Endresultat nicht wesentlich alteriren.

Wir erhalten somit:

$$\pi \sqrt{PC} = \pi \sqrt{5248 . 20} = 1017,$$

das ist jener Weg, den das Licht während der Zeit einer Schwingungsdauer zurücklegt. Die entsprechende Wellenlänge fanden wir oben 982 *cm*.

Diese beiden Zahlen 1017 und 982 sind gleich. Daraus folgt, dass die elektrische Schwingung nicht nur in der Luft, wie dies ja von Hertz so schön und überzeugend gezeigt, sondern auch im Drahte mit Lichtgeschwindigkeit sich fortpflanzt.[2] Diese auch theoretisch sehr wahrscheinliche Gleichheit lässt umgekehrt auch einen Rückschluss auf die sicher angenäherte Richtigkeit der oben gebrauchten Schwingungsformel für elektrische Oscillationen und die Formel für das Selbstpotential zu, deren Wahrscheinlichkeit ja schon durch die Messungen von Hertz gesichert ist.

Meine Messung ist so einfach und übersichtlich, dass ich an die Richtigkeit derselben glaube, ohne zu wissen, warum Hertz andere Werthe erhielt. Ein diesbezüglicher Verdacht, der sich bei Anstellung meiner Versuche mir aufdrängte, erwies sich, wie der nächste Abschnitt zeigen wird, als unbegründet.

---

[1] Diese Berichte, 86, S. 1190, 1882.

[2] Zu demselben Resultate gelangte auch J. J. Thomson (loc. cit.); mir scheint aber seine ganze Anordnung nicht einwurfsfrei und auch die Fehlergrenze (2 Fuss auf 10 *m*) zu gross, als dass seine Messung irgend wie zur Entscheidung obiger Frage herangezogen werden könnte.

Studium einer möglichen Fehlerquelle bei Hertz.

Da in allen bisher geschilderten Versuchen die Schwingungsdauer der primären Schwingung durch das Mitschwingen der übrigen Systeme bis zu einem gewissen Grade verändert wurde (gerade darauf basiren ja meine Messungen), wobei allerdings die der primären Schwingung entnommene Energie eine sehr grosse war, so ist die Frage nicht ohne Interesse, wie weit eine solche Fehlerquelle bei den Hertz'schen Versuchen auftritt.

Zu dem Zwecke sind die beiden Drähte (Länge 1124 *cm*), wie früher, mit dem Hauptsysteme in Verbindung. An das Ende der Drähte t und t' hänge ich je eine Metallplatte (Quadrat mit 40 *cm* Seite) vertical schwebend auf. Der einen Platte bei t steht in 5 *cm* Entfernung eine zweite, gleich grosse gegenüber. (Fig. 7. Der primäre Erregungsapparat, welcher noch an ss' käme, ist weggelassen. Wieder sind die parallelen Drähte zu kurz gezeichnet.) Von der Mitte der letzteren Platte führt nun ein verschieden langer Draht $y—y'$ horizontal, aber senkrecht zu den Hauptdrähten weiter. In diesem Draht $y—y'$ werden nun genau jene

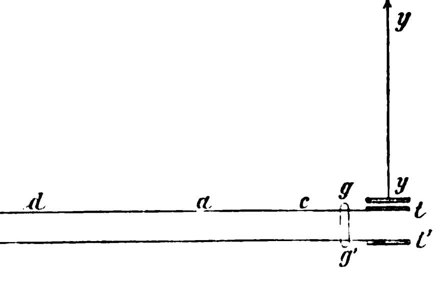


Fig. 7

Wellen erzeugt, die Hertz beobachtet. Die Glasröhre gg' liegt vor den Condensatorplatten. Wenn ich nun a oder c (a, c und d haben die Bedeutung von Fig. 5) überbrücke, so kann ich durch Verschiebung der Bäuche a und c leicht den Einfluss des Drahtes

Länge des Nebendrahtes $y—y'$		0	100	160	247	292	340	411	473	524	567	642	719	765	844	933	1003	1060
Verschiebung in *cm* des Bauches	c	0	+4	+8	+12	+17	+30	ohne Bauch				−22	− 9	−5	+1	+2	+11	+21
	a	0	+2	+3	+ 9	+15	+17	+29	+33	+45	+59	+62	+72	ohne Bauch				−40

yy' studiren. Die Länge dieses Drahtes wurde von 0—1060 *cm* variirt. Ist dieser Draht gleich 0, so liegt *d* bei 83, *a* bei 487 und *c* bei 919 *cm*. Die Tabelle gibt die Verschiebung des Knotenpunktes *a* und *c* aus dieser ihrer ursprünglichen Lage in Centimetern.

Fig. 8 zeigt in übersichtlicherer Weise, als dies die Tabelle kann, den Verlauf. In derselben stellt die Horizontale die Drahtlänge yy', die Verticale die Verschiebung des Schwingungsbauches *c* oder *a* dar, und zwar positiv eine Verschiebung gegen

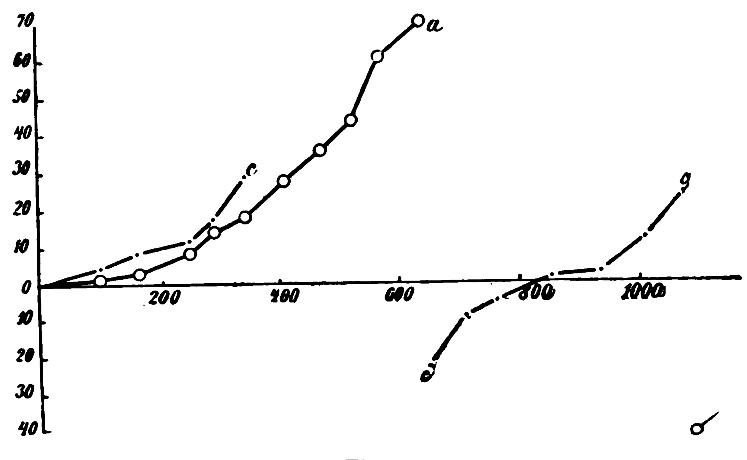


Fig. 8

tt', negativ gegen den Anfangspunkt der parallelen Drähte. Mache ich den Draht yy' immer länger, so rückt *c* mehr ans Ende, die Lichterscheinung wird immer schwächer und hört schliesslich, wenn yy' 400 *cm* lang ist, ganz auf. Wird der Nebendraht noch länger, so fängt bei 600 *cm* die Röhre wieder an zu leuchten; der Schwingungsbauch liegt aber jetzt weiter vom Ende weg, rückt langsam gegen die ursprüngliche Lage und steigt dann wieder. Genau dasselbe tritt mit dem Schwingungsbauche *a* ein; die Änderungen aber sind grösser und das Verschwinden und Wiederauftreten erfolgt aber bei grösseren Längen des Nebendrahtes.

Betrachten wir zunächst den Schwingungsbauch *c* genauer. Derselbe rückt, wenn ich den Nebendraht etwa 200 *cm* mache, gegen das Ende, d. h. ich habe, um Resonanz zu erzielen, die

Hauptschwingung vergrössern müssen; es ist somit die Schwingungsdauer durch das Anhängen dieses Drahtes vergrössert worden, und zwar umsomehr, je länger der Draht ist. Wenn aber der Nebendraht yy' ungefähr gleich $^1/_4$ Wellenlänge ist, dann scheint dieser zweite Draht nicht mehr unisono und vergrössernd mit der Hauptschwingung zu schwingen; es scheint sich jetzt in dem Drahte vielmehr eine solche Schwingung zu etabliren, welche mit der Hauptschwingung interferirt, daher das Ausbleiben des Bauches. Wird der Draht noch länger, so wirkt diese an und für sich schnellere Nebenschwingung, wie das Zurücktreten des Bauches anzeigt, beschleunigend auf die Hauptschwingung, aber immer weniger, je länger der Draht wird. Ist yy' (siehe Fig. 8) circa 830 *cm* lang, so ist der Einfluss des Drahtes ganz geschwunden, um bei noch grösserer Länge, wo ja die Nebenschwingung wieder langsamer wird, verzögernd auf die Hauptschwingung zu wirken. Als Mass für die Schwingungsdauer können wir die Wellenlänge von d bis c nehmen. Ist yy' gleich Null, so liegt d bei 83 *cm*. Es ist somit

$$c - d + \text{Querbrücke} = 919 - 83 + 42 = 878$$

gleich der halben Wellenlänge, während die Länge des Nebendrahtes yy' 830 sein musste, um eine Übereinstimmung des neuen und alten Bauches zu erwirken. Die Differenz zwischen 878 und 830 dürfte zum grossen Theil von dem Condensator bei y herrühren.

Genau dasselbe gilt auch für den Schwingungsbauch a. Soweit hier die Messungen reichen, haben wir gleichfalls zuerst eine Verzögerung; wenn ungefähr $^1/_4$ Wellenlänge, die hier grösser ist als früher, in yy' Platz hat, Aufhebung und schliesslich Beschleunigung der Hauptschwingung.

Es ist somit nachgewiesen, dass bei der Hertz'schen Anordnung die Hauptschwingung eventuell gestört werden kann. Es lässt sich aber nun aus unseren Versuchen leicht berechnen, dass diese Störung eine verhältnissmässig geringe ist. Die grösste Störung des Bauches c ist 30 *cm* bei $y - y' = 340$ *cm*. Der Punkt d liegt dann bei 88 *cm*; die halbe Wellenlänge ist hier wieder leicht wie oben zu finden:

$$c - d + \text{Querbrücke} = (919 + 30) - 88 + 42 = 903.$$

Die halbe Wellenlänge ändert sich von 878 auf 903, welche Änderung das Maximum der eventuellen Fehlerquelle ergäbe.

Ebenso habe ich in der Nähe der parallelen Leitungsdrähte Resonatoren von gleicher und verschiedener Schwingungsdauer in ganz geringen Entfernungen aufgespannt, und auch hier betrugen die Änderungen in der Originalschwingung im ungünstigsten Falle nur einige Percente.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. V. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



XI. SITZUNG VOM 8. MAI 1890.

Seine Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter setzt die kaiserliche Akademie mit hohem Erlasse vom 25. April l. J. in Kenntniss, dass Seine kaiserliche Hoheit der durchlauchtigste Herr Erzherzog-Curator in der diesjährigen feierlichen Sitzung am 21. Mai erscheinen und dieselbe mit einer Ansprache eröffnen werde.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der oberösterreichischen Statthalterei vorgelegten Tabellen und graphischen Darstellungen über die Eisbildung auf der Donau während des Winters 1889/90 in den Pegelstationen Aschach, Linz und Grein.

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner in Wien übersendet eine Arbeit: „Beobachtungen, betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge“, von den Herren J. Elster und H. Geitel, Oberlehrern am herzoglichen Gymnasium zu Wolfenbüttel.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt übersendet eine im botanischen Institute der k. k. Universität zu Graz ausgeführte Arbeit, betitelt: „Die Reservestoffbehälter der Knospen von *Fraxinus excelsior*“, von Herrn Ferdinand Schaar.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Theorie einer Gattung windschiefer Flächen“, von Prof. A. Sucharda an der k. k. Staatsmittelschule in Tabor.

2. „Über Plancurven vierter Ordnung vom Geschlechte Eins", von Prof. W. Binder an der Landesoberrealschule in Wiener-Neustadt.

Ferner legt der Secretär eine von Herrn H. Prohazka in Buchberg behufs Wahrung der Priorität eingesendete Mittheilung: Beschreibung und Zeichnung seiner Erfindung einer hydrauisch-atmosphärischen Maschine vor.

Das w. M. Herr Hofrath G. Tschermak berichtet über eine Arbeit des Herrn Prof. C. Dölter in Graz: „Versuche über die Löslichkeit der Minerale".[1]

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine Abhandlung des Herrn Regierungsrathes Prof. Dr. F. Mertens in Graz, betitelt: „Die Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen".

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine Abhandlung von Dr. J. M. Eder, Director der k. k. Lehr- und Versuchsanstalt für Photographie und Reproductionsverfahren in Wien: „Über das sichtbare und ultraviolette Emissionsspectrum schwach leuchtender verbrennender Kohlenwasserstoffe (Swan'sches Spectrum) und der Oxyhydrogenflamme (Wasserdampfspectrum)".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsoberrealschule im II. Bezirk von Wien: „Neue Eiweissreactionen", von C. Reichl.

Das c. M. Herr Prof. A. Schrauf in Wien überreicht folgende Mittheilung: „Über die thermische Veränderung der Brechungsexponenten des prismatischen Schwefels".

Herr Prof. Dr. Franz Toula überreicht eine Arbeit des Herrn G. N. Zlatarski in Sofia, welche betitelt ist: „Ein geologischer Bericht über die Srednja Gora zwischen den Flüssen Topolnica und Strema".

Die Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen

von

F. Mertens.

1.

In dem Folgenden wird ein Complex von Invarianten dreier quaternären quadratischen Formen aufgestellt, durch welche alle ganzen Invarianten dieser Formen in ganzer Weise darstellbar sind.

Es seien drei quaternäre quadratische Formen

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \\ f'(x) &= \Sigma a'_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \\ f''(x) &= \Sigma a''_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \end{aligned}\right\} \qquad 1)$$

der Veränderlichen

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4$$

gegeben, wo die Stellenzeiger α, β von 1 bis 4 laufen und in üblicher Weise

$$a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta} \qquad a'_{\beta\alpha} = a'_{\alpha\beta} \qquad a''_{\beta\alpha} = a''_{\alpha\beta}$$

angenommen wird. Man bezeichne die Determinanten

$$\Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44}$$
$$\Sigma \pm a'_{11} a'_{22} a'_{33} a'_{44}$$
$$\Sigma \pm a''_{11} a''_{22} a''_{33} a''_{44}$$

dieser Formen mit

$$A, \qquad A', \qquad A''$$

und setze

$$F(u) = \sum \frac{\partial A}{\partial a_{\alpha\beta}} u_\alpha u_\beta$$

$$F'(u) = \sum \frac{\partial A'}{\partial a'_{\alpha\beta}} u_\alpha u_\beta$$

$$F''(u) = \sum \frac{\partial A''}{\partial a''_{\alpha\beta}} u_\alpha u_\beta$$

$$\varphi(s) = \Sigma(a_{\mu\mu'} a_{\nu\nu'} - a_{\mu\nu'} a_{\nu\mu'}) s_{\mu\nu} s_{\mu'\nu'}$$

$$\varphi'(s) = \Sigma(a'_{\mu\mu'} a'_{\nu\nu'} - a'_{\mu\nu'} a'_{\nu\mu'}) s_{\mu\nu} s_{\mu'\nu'}$$

$$\varphi''(s) = \Sigma(a''_{\mu\mu'} a''_{\nu\nu'} - a''_{\mu\nu'} a''_{\nu\mu'}) s_{\mu\nu} s_{\mu'\nu'},$$

wo $\mu\nu$, $\mu'\nu'$ die Zahlenpaare

14, 24, 34, 23, 31, 12

durchlaufen.

Alle ganzen Invarianten Θ des Formensystems 1) sind[1] linear-homogen aus Ausdrücken von der Form

$$\mathfrak{B}_0 \psi(x, p, u)\, \psi'(y, q, v)\, \psi''(z, r, w)$$

zusammensetzbar, wo ψ, ψ', ψ'' beziehungsweise ganze invariante Gebilde der Formen f, f', f'' und $\mathfrak{B}_0$ einen die Variablenreihen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, \ldots, z_1, \ldots$$

$$p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}, p_{31}, p_{12}, q_{14}, \ldots, r_{14}, \ldots$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, \ldots, w_1, \ldots$$

genau erschöpfenden Verband der Operationen

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial^2}{\partial w\, \partial y}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial v\, \partial z}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial z}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial w\, \partial x}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial v\, \partial x}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial y}\right) \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial q\, \partial r}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial r\, \partial p}\right), \left(\frac{\partial^2}{\partial p\, \partial q}\right) \\
\left(\frac{\partial^3}{\partial p\, \partial y\, \partial z}\right), \left(\frac{\partial^3}{\partial q\, \partial z\, \partial x}\right), \left(\frac{\partial^3}{\partial r\, \partial x\, \partial y}\right) \\
\left(\frac{\partial^3}{\partial p\, \partial v\, \partial w}\right), \left(\frac{\partial^3}{\partial q\, \partial w\, \partial u}\right), \left(\frac{\partial^3}{\partial r\, \partial u\, \partial v}\right) \\
\left(\frac{\partial^4}{\partial q\, \partial x\, \partial r\, \partial u}\right), \left(\frac{\partial^4}{\partial r\, \partial y\, \partial p\, \partial v}\right), \left(\frac{\partial^4}{\partial p\, \partial z\, \partial q\, \partial w}\right)
\end{array}\right\} \quad 2)$$

---

[1] Über invariante Gebilde quaternärer Formen, 7, 2. Diese Berichte Bd. XCVIII, Abth. II. a., Mai 1889.

bezeichnen. Da aber alle invarianten Gebilde ψ von f in ganzer Weise aus den Ausdrücken

$$\begin{array}{lll} A, & u_x, & (ss) \\ f(x), & f(x, su), & f(su) \\ \varphi(s), & \varphi(s, xsu), & \varphi(xsu) \\ F(u), & F(u, sx), & F(sx) \end{array}$$

zusammensetzbar,[1] also linear-homogen durch Potenzproducte $\mathfrak{P}$ dieser Ausdrücke darstellbar sind, so erscheint jede ganze Invariante Θ des Formensystems 1) als Summe von besonderen Invarianten, welche die Gestalt

$$c\,\mathfrak{B}_0\,\mathfrak{P}\,\mathfrak{P}'\,\mathfrak{P}''$$

haben, wo c einen Zahlencoëfficienten bezeichnet und $\mathfrak{P}', \mathfrak{P}''$ für die Formen f', f'' eine ähnliche Bedeutung haben, wie $\mathfrak{P}$ für f. Da man sich überdies auf Potenzproducte beschränken kann,[2] welche keine zusammengesetzten Coordinaten enthalten, so ist Θ, wenn allgemein

$$\left.\begin{aligned} T &= f^{\alpha}(x)\,\varphi^{\beta}(p)\,F^{\gamma}(u) \\ T' &= f'^{\alpha'}(y)\,\varphi'^{\beta'}(q)\,F'^{\gamma'}(v) \\ T'' &= f''^{\alpha''}(z)\,\varphi''^{\beta''}(r)\,F''^{\gamma''}(w) \end{aligned}\right\} \qquad 3)$$

gesetzt wird, linear-homogen aus Ausdrücken von der Form

$$A^{\rho}\,A'^{\sigma}\,A''^{\tau}\,\mathfrak{B}_0\,T\,T'\,T'' \qquad 4)$$

zusammensetzbar.

2.

Zur weiteren Entwicklung der Ausdrücke 4) dient der Zerlegungssatz, welcher in 7, 3 des citirten Aufsatzes steht.

Lässt sich $\mathfrak{B}_0$ in zwei Verbände $\mathfrak{B}_0'$ und $\mathfrak{B}_0''$ und T, T', T'' gleichzeitig in je zwei Factoren T_1 und T_2, T_1' und T_2', T_1'' und T_2'', welche dieselbe Gestalt 3), wie beziehungsweise T, T', T'' haben,

---

[1] Ebendaselbst 9.

[2] Ebendaselbst 7, 2.

derart zerlegen, dass die Operation $\mathfrak{B}_0'$ die in $T_1\, T_1'\, T_1''$ enthaltenen Variablen, $\mathfrak{B}_0''$ die in $T_2\, T_2'\, T_2''$ genau erschöpft, so ist der Ausdruck

$$\mathfrak{B}_0\, T\, T'\, T'' \tag{5}$$

linear auf das Product

$$(\mathfrak{B}_0'\, T_1\, T_1'\, T_1'') . (\mathfrak{B}_0''\, T_2\, T_2'\, T_2'')$$

und andere Ausdrücke 4) zurückführbar, in welchen das Operationsobject $T\, T'\, T''$ geringere Gradsummen besitzt, als der den Ausgangspunkt bildende Ausdruck 5).

Es folgt hieraus, wie in 8 des citirten Aufsatzes, dass jede Invariante Θ eine ganze Function der drei Determinanten

$$A, \qquad A', \qquad A''$$

und derjenigen Ausdrücke 5) ist, in welchen sich die Operation $\mathfrak{B}_0$ und ihr Object $T\, T'\, T''$ nicht mehr in der angegebenen Weise zerlegen lassen.

Um diese Ausdrücke zu ermitteln, hat man die Gleichungen aufzustellen, welche zwischen den in $T\, T'\, T''$ vorkommenden Exponenten und denen der einzelnen in $\mathfrak{B}_0$ enthaltenen Operationen 2) stattfinden müssen, damit die Variablen von $T\, T'\, T''$ durch $\mathfrak{B}_0$ genau erschöpft werden. Sind

$$\begin{array}{cccccc} a, & a', & b, & b', & c, & c' \\ & \lambda, & & \mu, & & \nu \\ & f, & & g, & & h \\ & f', & & g', & & h' \\ & \mathfrak{a}, & & \mathfrak{b}, & & \mathfrak{c} \end{array}$$

die Exponenten der Operationen 2) in $\mathfrak{B}_0$, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} b' + c + g + h + \mathfrak{a} &= 2\alpha \\ c' + a + h + f + \mathfrak{b} &= 2\alpha' \\ a' + b + f' + g + \mathfrak{c} &= 2\alpha'' \\ \mu + \nu + f + f' + \mathfrak{b} + \mathfrak{c} &= 2\beta \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
\nu+\lambda+g+g'+\mathfrak{c}+\mathfrak{a} &= 2\beta' \\
\lambda+\mu+h+h'+\mathfrak{a}+\mathfrak{b} &= 2\beta'' \\
b+c'+g'+h'+\mathfrak{a} &= 2\gamma \\
c+a'+h'+f'+\mathfrak{b} &= 2\gamma' \\
a+b'+f'+g'+\mathfrak{c} &= 2\gamma''
\end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

deren unzerlegbare Lösungen in ganzen nicht negativen Zahlen aufzusuchen sind.

3.

Zunächst bieten sich die Lösungen dar, in welchen alle Zahlen bis auf eine $= 0$ sind und letztere den Werth 2 hat. Es sind dies, wenn immer nur die von Null verschiedenen Zahlen angegeben werden, die 18 Lösungen

$$\begin{aligned}
a &= 2 & f &= 2 \\
a' &= 2 & g &= 2 \\
b &= 2 & h &= 2 \\
b' &= 2 & f' &= 2 \\
c &= 2 & g' &= 2 \\
c' &= 2 & h' &= 2 \\
\lambda &= 2 & \mathfrak{a} &= 2 \\
\mu &= 2 & \mathfrak{b} &= 2 \\
\nu &= 2 & \mathfrak{c} &= 2.
\end{aligned}$$

4.

Die übrigen Lösungen enthalten nur Zahlen, welche die Werthe 0 oder 1 haben. Da einige derselben sich als überflüssig erweisen, insoferne die ihnen entsprechenden Invarianten ganze Verbindungen der anderen sind, so sollen einige Formeln vorausgeschickt werden, welche identische Beziehungen zwischen Operationsverbänden ausdrücken und die Ausdrücke 5) auf eine geringere Anzahl zurückzuführen gestatten.

Hiebei ist zu bemerken, dass man von Operationsverbänden $\mathfrak{B}$ absehen kann, welche die Symbole

$$\left.\begin{array}{llll}\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial x}\right), & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial p}\right) & & \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial x}\right)_1, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial x}\right)_2, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial x}\right)_3, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial x}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial u}\right)_1, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial u}\right)_2, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial u}\right)_3, & \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial u}\right)_4\end{array}\right\} \qquad 7)$$

enthalten. Denkt man sich nämlich in dem betreffenden Operationsobjecte $TT'T''$ den Ausdruck T nach reducirten invarianten Gebilden[1] entwickelt und setzt

$$T = T_0 + T_1 + \ldots,$$

so ist

$$\mathfrak{B}\,T_0\,T'T'' = 0$$

und die Ausdrücke $\mathfrak{B}\,T_1 T'T''$, ... lassen sich wieder auf Ausdrücke 4) zurückführen, in welchen jedoch das Operationsobject $TT'T''$ geringere Gradsummen besitzt.

Dasselbe gilt von Operationen $\mathfrak{B}$, welche eines der Symbole

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial y}\right), & \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial q}\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial y}\right)_1, \ldots & \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial v}\right)_1, \ldots\end{array}\right\} \qquad 8)$$

oder eines der Symbole

$$\left.\begin{array}{ll}\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right), & \left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial r}\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\right)_1, \ldots & \left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial w}\right)_1, \ldots\end{array}\right\} \qquad 9)$$

enthalten.

5.

Man ersetze in der Identität

$$\begin{aligned}&(syz)(tvw)u_x + (szx)(tvw)u_y + (sxy)(tvw)u_z \\ &+ (syz)(twu)v_x + (szx)(twu)v_y + (sxy)(twu)v_z \\ &+ (syz)(tuv)w_x + (szx)(tuv)w_y + (sxy)(tuv)w_z\end{aligned}$$

[1] Ebendaselbst 7, 1.

$$+(tyz)(svw)u_x+(tzx)(svw)u_y+(txy)(svw)u_z$$
$$+(tyz)(swu)v_x+(tzx)(swu)v_y+(txy)(swu)v_z$$
$$+(tyz)(suv)w_x+(tzx)(suv)w_y+(txy)(suv)w_z$$
$$=(st)\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

die Variablenreihen

$$s,\quad t,\quad x,\quad y,\quad z,\quad u,\quad v,\quad w$$

beziehungsweise durch die Symbole

$$\left(\frac{\partial}{\partial p}\right),\ \left(\frac{\partial}{\partial q}\right),\ \left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial w},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}.$$

Deutet man Operationen, welche eines oder mehrere von den Symbolen 7), 8), 9) enthalten, durch Punkte an und beachtet, dass

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial v\,\partial r\,\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial x\,\partial r\,\partial v}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial w\,\partial r\,\partial x}\right)=-\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial w}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)&=\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\\&+\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\\&-\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\\&+\ldots\end{aligned}\qquad 10)$$

Ebenso folgt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)&=\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\\&+\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\\&-\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\\&+\ldots\end{aligned}\qquad 11)$$

6.

Multiplicirt man die Gleichung

$$(svw)u_x+(swu)v_x+(suv)w_x = (uvwsx)$$

mit (tt'), so ergibt sich, da identisch

$$(tt')(uvwsx) = (tvw)(t'usx)+(twu)(t'vsx)+(tuv)(t'wsx)$$
$$+ (t'vw)(tusx)+(t'wu)(tvsx)+(t'uv)(twsx)$$

ist,

$$(tt')(svw)u_x+(tt')(swu)v_x+(tt')(suv)w_x$$
$$= (tvw)(t'usx)+(twu)(t'vsx)+(tuv)(t'wsx)$$
$$+ (t'vw)(tusx)+(t'wu)(tvsx)+(t'uv)(twsx).$$

Hierin ersetze man die Variablenreihen

$$s,\quad t,\quad t',\quad u,\quad v,\quad w,\quad x$$

einmal durch die Symbolreihen

$$\frac{\partial}{\partial q},\ \frac{\partial}{\partial p},\ \frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial w}$$

und einmal durch die Symbolreihen

$$\frac{\partial}{\partial q},\ \frac{\partial}{\partial p},\ \frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial u}$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial x\,\partial q\,\partial w}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial w\,\partial q\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\partial x}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial x\,\partial q\,\partial u}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial x}\right)$$
$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial u}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial u\,\partial q\,\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)$$

ist. Es ergeben sich dann die Formeln

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\partial y}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial w}\right) \qquad 12)$$
$$+ \dots$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)$$
$$=-\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) \qquad 13)$$
$$+\cdots$$

und in ähnlicher Weise

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial w\,\partial q\,\partial z}\right) \qquad 14)$$
$$+\cdots$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$
$$=\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) \qquad 15)$$

7.

Geht man von der Identität

$$(svw)\,u_x+(swu)\,v_x+(suv)\,w_x=(uvw\dot{s}\dot{x})$$

aus und setzt

$$u_1=(ty)_1,\quad u_2=(ty)_2,\quad u_3=(ty)_3,\quad u_4=(ty)_4,$$

so ergibt sich

$$(svw)\,(txy)-(swty)\,v_x+(svty)\,w_x=(vw\dot{s}\dot{x}\dot{t}\dot{y}).$$

Durch gleichzeitige Vertauschung von s mit t und x mit y folgt hieraus

$$-(tvw)\,(sxy)-(twsx)\,v_y+(tvsx)\,w_y=-(vw\dot{s}\dot{x}\dot{t}\dot{y})$$

und man hat identisch

$$(svw)(txy)-(tvw)(sxy)-(swty)\,v_x+(svty)\,w_x-(twsx)\,v_y+(tvs\bar{y})\,w_y=0.$$

Setzt man hierin

$$\frac{\partial}{\partial q},\ \frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial z},\ \frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial u},\ \frac{\partial}{\partial v}$$

für

$$s, \quad t, \quad v, \quad w, \quad x, \quad y$$

und beachtet, dass

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial v}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial v\,\partial r\,\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial x\,\partial q\,\partial u}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial x}\right)$$

ist, so wird

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) \qquad 16)$$
$$+ \cdots$$

Ähnlich ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right) - \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right) \qquad 17)$$
$$+ \cdots$$

8.

Man ersetze in der Identität[1]

$$(sztw)(sz't'w') + (szt'w)(sz'tw') - (sztw')(sz't'w) - (szt'w')(sz'tw)$$
$$= (st)(szz')(t'ww') + (st')(szz')(tww') - (tt')(szz')(sww')$$
$$-(ss)(tzz')(t'ww') - (ss)(t'zz')(tww') + (ss')(tt')(w_z w'_{z'} - w_{z'} w'_z)$$

die Variablenreihen

$$s, \quad t, \quad t', \quad z, \quad z', \quad w, \quad w'$$

durch

$$\frac{\partial}{\partial p}, \quad \frac{\partial}{\partial q}, \quad \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{\partial}{\partial w}, \quad \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial z}, \quad \frac{\partial}{\partial y}$$

und beachte, dass

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial w\,\partial r\,\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial y\,\partial r\,\partial w}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial v\,\partial q\,\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial v}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial w\,\partial q\,\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial w}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial z}\right);$$

[1] Ebendaselbst 10.

es wird dann

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial y\,\partial p\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial w}\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right) \qquad 18)$$
$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)$$
$$+\dots$$

9.

Man ziehe nun unter den Lösungen, welche keine über 1 liegende Zahl enthalten, zunächst diejenigen in Betracht, in welchen

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$$

ist. Dieselben lassen sich zweckmässig nach den Werthen der Summe $\lambda+\mu+\nu$ ordnen.

I. $\lambda+\mu+\nu=3$.

In diesem Falle gibt es nur die eine Lösung

$$\lambda=\mu=\nu=1.$$

II. $\lambda+\mu+\nu=2$.

Eine der Zahlen λ, μ, ν muss den Werth 0, die anderen beiden den Werth 1 haben.

Es sei $\mu=\nu=1$, $\lambda=0$. Man hat in diesem Falle die Congruenzen

$$\left.\begin{array}{lll} b'+c+g+h\equiv 0 & c'+a+h+f\equiv 0 & a'+b+f+g\equiv 0 \\ b+c'+g'+h'\equiv 0 & c+a'+h'+f'\equiv 0 & a+b'+f'+g'\equiv 0 \\ f+f'\equiv 0 & g+g'\equiv 0 & h+h'\equiv 0 \quad (\text{mod. } 2) \end{array}\right\} \qquad 19)$$

und darf $f=f'=0$ annehmen. Nimmt man nämlich $f=f'=1$ und etwa $g=h=1$, so liesse sich der Verband $\mathfrak{V}_0$ mittelst Formel 10) auf andere Verbände zurückführen, in welchen die Summe $\lambda+\mu+\nu$ den Werth 3 hätte und sonach entweder eine der Zahlen $\lambda, \mu, \nu=2$ oder alle $=1$ wären. Solche Verbände entsprechen aber zerlegbaren Lösungen.

Man hat also nur die Lösungen

$$\mu = \nu = g = h = b = c' = 1 \qquad 20)$$

$$\mu = \nu = g = h = a = a' = b' = c = 1 \qquad 21)$$

$$\mu = \nu = g' = h' = b' = c = 1 \qquad 22)$$

$$\mu = \nu = g' = h' = a = a' = b = c' = 1 \qquad 23)$$

$$\mu = \nu = g = h' = b = c = 1 \qquad 24)$$

$$\mu = \nu = g' = h = a = a' = b' = c' = 1 \qquad 25)$$

$$\mu = \nu = g' = h = b' = c' = 1 \qquad 26)$$

$$\mu = \nu = g' = h = a = a' = b = c = 1 \qquad 27)$$

in Betracht zu ziehen.

Der aus der Lösung 20) hervorgehende Operationsverband lässt sich auf zerfallende Verbände zurückführen. Erhebt man nämlich die Identität 13) ins Quadrat, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)^2\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)^2$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial y}\right)^2 + \cdots$$

Aus demselben Grunde kann nach Formel 15) von Lösung 22) abgesehen werden.

Gleiches gilt nach Formel 12) und 14) für die Lösungen 21) und 23). Multiplicirt man nämlich die erste der genannten Formeln mit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right),$$

so wird

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right) + \cdots$$

Die Lösungen 25) und 27) führen nach 16) und 17) ebenfalls auf zerlegbare Verbände. Denn die Identität 16) geht, mit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)$$

multiplicirt, in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial p}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right)+\cdots$$

über. Es bleiben also nur die Lösungen

$$\mu=\nu=g=h'=b=c=1$$
$$\mu=\nu=g'=h=b'=c'=1$$

nebst den durch Permutation entstehenden

$$\nu=\lambda=h=f'=c=a=1$$
$$\nu=\lambda=h'=f=c'=a'=1$$
$$\lambda=\mu=f=g'=a=b=1$$
$$\lambda=\mu=f'=g=a'=b'=1.$$

III. $\lambda+\mu+\nu=1$.

Es sei $\lambda=1$, $\mu=\nu=0$. Die Gleichungen 6) nehmen auch hier die Form 19) an und man hat die Lösungen

$$\lambda=g=h=b=c'=1 \tag{28}$$
$$\lambda=g=h=a=a'=b'=c=1 \tag{29}$$
$$\lambda=g'=h'=b'=c=1 \tag{30}$$
$$\lambda=g'=h'=a=a'=b=c'=1 \tag{31}$$
$$\lambda=g=h'=b=c=1 \tag{32}$$
$$\lambda=g=h'=a=a'=b'=c'=1 \tag{33}$$
$$\lambda=g'=h=b'=c'=1 \tag{34}$$
$$\lambda=g'=h=a=a'=b=c=1. \tag{35}$$

Die Lösungen 32), 34) führen nach 16), 17) auf zerfällbare Verbände. Erhebt man nämlich Formel 16) ins Quadrat, so ergibt sich

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)^2$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right)^2 + \cdots$$

Dasselbe gilt nach 16), 17) für die Lösungen 33) und 35). Denn Formel 16) geht, mit

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$

multiplicirt, in

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)$$
$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right) + \cdots$$

über. Es bleiben also nur die Lösungen

$$\lambda = g = h = b = c' = 1$$
$$\lambda = g' = h' = b' = c = 1$$
$$\lambda = g = h = a = a' = b' = c = 1$$
$$\lambda = g' = h' = a = a' = b = c' = 1$$

nebst den durch Permutation entstehenden

$$\mu = h = f = c = a' = 1$$
$$\mu = h' = f' = c' = a = 1$$
$$\mu = h = f = b = b' = c' = a = 1$$
$$\mu = h' = f' = b = b' = c = a' = 1$$

$$\nu = f = g = a = b' = 1$$
$$\nu = f' = g' = a' = b = 1$$
$$\nu = f = g = c = c' = a' = b = 1$$
$$\nu = f' = g' = c = c' = a = b' = 1.$$

IV. $\lambda + \mu + \nu = 0$.

Die Gleichungen 6) lauten in diesem Falle

$$\begin{array}{lll} b'+c+g+h \equiv 0 & c'+a+h+f \equiv 0 & a'+b+f+g \equiv 0 \\ b+c'+g'+h' \equiv 0 & c+a'+h'+f' \equiv 0 & a+b'+f'+g' \equiv 0 \\ f+f' \equiv 0 & g+g' \equiv 0 & h+h' \equiv 0. \pmod{2} \end{array}$$

Ist

$$f = g = h = f' = g' = h' = 0,$$

so hat man die Lösung

$$a = a' = b = b' = c = c' = 1.$$

Hat eine der Zahlen f, g, h, etwa f, den Werth 1, so ist auch $f' = 1$, und man hat die Lösungen

$$f = f' = a = a' = 1$$
$$f = f' = b = c = b' = c' = 1$$

nebst den durch Permutation entstehenden

$$g = g' = b = b' = 1$$
$$g = g' = c = a = c' = a' = 1$$
$$h = h' = c = c' = 1$$
$$h = h' = a = b = a' = b' = 1.$$

Haben zwei von den Zahlen f, g, h, etwa g, h, den Werth 1, so ist auch $g' = h' = 1$, und der Verband $\mathfrak{V}_0$ enthält die Operation

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)$$

welche, wie aus der Multiplication der Formeln 16), 17) hervorgeht, die Gestalt annimmt:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)+\cdots$$

Der Operationsverband ist daher in diesem Falle auf zerlegbare und solche Verbände zurückführbar, in welchen $\lambda+\mu+\nu>0$ ist.

10.

Es sind nun noch die Operationsverbände in Betracht zu ziehen, in welchen $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}>0$ ist.

Da aus den Gleichungen 6)

$$a+a'+f+f'+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\equiv 0 \pmod{2}$$

folgt, so ergibt sich, wenn eine der Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, etwa $\mathfrak{a}$, $=1$ und die beiden anderen $=0$ sind,

$$a+a'+f+f'\equiv 1 \pmod{2}$$

und es muss wenigstens eine der Zahlen a, a', f, f' den Werth 1 haben. Für a oder $a'=1$ ist der Verband $\mathfrak{V}_0$ nach 16), 17), für f oder $f'=1$ nach 13), 15) auf andere zurückführbar, in welchen $\mathfrak{a}=\mathfrak{b}=\mathfrak{c}=0$ ist.

Haben zwei von den Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ den Werth 1, so ist der Verband $\mathfrak{V}_0$ nach 18) auf andere zurückführbar, in welchen die Summe $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}$ kleiner ist.

Die Verbände, in welchen eine oder mehrere von den Zahlen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ den Werth 1 haben, liefern also überhaupt keine neuen Gebilde.

11.

Die Zusammenfassung der vorstehenden Ergebnisse führt zu folgenden Invarianten, durch welche alle ganzen Invarianten des Formensystems f, f', f'' in ganzer Weise ausdrückbar sind.

I. Invarianten mit geradem Exponenten.

Ordnung 4.

$$A, \qquad A', \qquad A''$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)^2 f'(y)F''(w), \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)^2 F'(v)f''(z)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)^2 F(u)f''(z) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)^2 f(x)F''(w)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)^2 f(x)F'(v), \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)^2 F(u)f'(y)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)^2 \varphi'(q)\varphi''(r), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial p}\right)^2 \varphi(p)\varphi''(r), \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)^2 \varphi(p)\varphi'(q)$$

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)^2 \varphi(p)f'(y)f''(z), \left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)^2 \varphi'(q)f(x)f''(z), \left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)^2 \varphi''(r)f(x)f'(y)$$

Ordnung 8.

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)^2 \varphi(p)F'(v)F''(w), \left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)^2 \varphi'(q)F(u)F''(w), \left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)^2 \varphi''(r)F(u)F'(v)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial q\,\partial x\,\partial r\,\partial u}\right)^2 f(x)F(u)\varphi'(q)\varphi''(r)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial r\,\partial y\,\partial p\,\partial v}\right)^2 f'(y)F'(v)\varphi(p)\varphi''(r)$$

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial p\,\partial z\,\partial q\,\partial w}\right)^2 f''(z)F''(w)\varphi(p)\varphi'(q)$$

Ordnung 12.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right).$$
$$.f(x)F(u)f'(y)F'(v)f''(z)F''(w).$$

II. Invarianten mit ungeradem Exponenten.

Ordnung 6.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial p}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\varphi(p)\varphi'(q)\varphi''(r).$$

Ordnung 10.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\cdot$$
$$\cdot f(x)\,F(u)\,f'(y)\,\varphi'(q)\,f''(z)\,\varphi''(r)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial v\,\partial w}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\varphi(p)\,f'(y)\,F'(v)\,f'(z)\,F''(w)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

Ordnung 14.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\cdot$$
$$\cdot f(x)\,\varphi(q)\,F(u)\,\varphi'(q)\,F'(v)\,f''(z)\,\varphi''(r)$$

nebst den fünf durch Permutation entstehenden Gebilden.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial z\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial x\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\cdot$$
$$\cdot f^2(x)\,f'(y)\,\varphi'(q)\,F'(v)\,f''(z)\,\varphi''(r)\,F''(w)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial y\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial p\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\cdot$$
$$\cdot f(x)\,\varphi(p)\,F(u)\,f'(y)\,F'(v)\,f''(z)\,F''(w)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial u}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial x}\right)\cdot$$
$$\cdot f(x)\,F(u)\,\varphi'(q)\,F'(v)\,\varphi''(r)\,F''(w)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

Ordnung 18.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial q\,\partial r}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial q\,\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial r\,\partial u\,\partial v}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial v\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial z}\right)\cdot$$
$$\cdot F^2(u)\,f'(y)\,\varphi'(q)\,F'(v)\,f''(z)\,\varphi''(r)\,F''(w)$$

nebst den zwei durch Permutation entstehenden Gebilden.

XII. SITZUNG VOM 16. MAI 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1890) des 99. Bandes, Abtheilung III, der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine im physiologischen Institute der k. k. deutschen Universität in Prag mit Unterstützung der kaiserlichen Akademie ausgeführte Arbeit von Prof. Dr. J. Singer und Dr. E. Münzer, betitelt: „Beiträge zur Anatomie des Centralnervensystems, insbesondere des Rückenmarkes".

Das c. M. Herr Hofrath Prof. A. Bauer in Wien überreicht eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Bielitz: „Über die Constitution einiger Derivate des Cyanamids", von Alois Smolka.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer übersendet eine Abhandlung: „Über einen arithmetischen Satz des Herrn Charles Hermite".

Herr Prof. Dr. Otto Stolz in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen".

Herr Prof. Dr. Veit Graber in Czernowitz übersendet eine Abhandlung: „Vergleichende Studien am Keimstreif der Insecten".

Der Secretär legt eine eingesendete Arbeit von Dr. Max Blanckenhorn in Cassel, betitelt: „Das marine Miocän in Syrien", vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Dr. Friedrich Jünnemann in Hietzing vor, welches die Aufschrift führt: „Abhandlung über den chemisch reinen flüssigen Kohlenstoff, seine Bereitungsweise und seine Eigenschaften".

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine Arbeit des Herrn Leopold Schneider, Adjunct am k. k. Probiramte in Wien, unter dem Titel: „Studien über chemisch-gebundenes Wasser (Hydratwasser, Krystallwasser)".

Ferner überreicht Herr Prof. Loschmidt eine Arbeit aus dem Laboratorium der k. k. Lehr- und Versuchsanstalt für Photographie und Reproductionsverfahren in Wien, von Herrn Alexander Lainer, betitelt: „Ein neues wasserfreies Goldchloridkalium".

Herr Prof. Dr. Franz Toula berichtet über eine Anzahl von Säugethierresten, welche ihm von Seite des Dr. Halil Edhem Bey in Constantinopel zur Verfügung gestellt worden sind.

Herr Prof. Dr. Franz Toula macht eine vorläufige Mittheilung über einige bei Gelegenheit einer Studienexcursion an die untere Donau (zwischen Orsova-Neu Moldava einer- und Golubac abwärts andererseits) gemachte geologische Beobachtungen.

Herr Dr. Ernst Lecher überreicht eine Arbeit: „Über die Messung der Dielektricitätsconstanten mittelst Hertz'scher Schwingungen".

Über einen arithmetischen Satz des Herrn Charles Hermite

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Herr Charles **Hermite** hat in seiner interessanten Mittheilung „Sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numériques"[1] für die Anzahl $f(n)$ der Darstellungen einer ganzen Zahl n als Summe von zwei Quadraten aus der bekannten Formel der Theorie der elliptischen Functionen

$$\frac{2kK}{\pi} = 4\sum_{x=1}^{x=\infty} (-1)^{x-1} q^{\frac{(2x-1)^2}{2}} \frac{1+q^{4x-2}}{1-q^{4x-2}}$$

$$= \sum_{x=0}^{x=\infty} f(4x+1) q^{\frac{4x+1}{2}}$$

die Relation

$$\sum_{x=0}^{x=n} f(4x+1) = 2\left\{1+(-1)^{\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]}\right\} +$$

$$+8\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} (-1)^{x-1} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]$$

---

[1] Extrait d'une lettre adressée à M. Fuchs par Ch. Hermite. Journal f. d. reine u. angewandte Mathematik v. Kronecker u. Weierstrass, 99. Bd., S. 324—328.

und aus derselben die asymptotische Beziehung

$$\sum_{x=0}^{x=n} f(4x+1) = \frac{(4n+1)\pi}{2} + \alpha\sqrt{n}$$

abgeleitet.

Die Hermite'sche Formel bildet ein Glied in einer Kette von Relationen, die sich aus einer allgemeinen, die ganzen Zahlen von der Form $4s+1$ betreffenden Gleichung ergeben, welche ich in den folgenden Zeilen nebst der entsprechenden für die ganzen Zahlen von der Form $4s+3$ zunächst in einfacher Weise ableiten und auf einige bemerkenswerthe specielle Fälle von zahlentheoretischem Interesse anwenden will, während ich deren Verwendbarkeit für die Theorie der elliptischen Functionen bei einer anderen Gelegenheit darzuthun gedenke. Zum Schlusse werde ich sodann eine auf die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch das System der quadratischen Formen einer gegebenen Discriminante sich beziehende asymptotische Relation ermitteln.

1. Da jeder Theiler einer ungeraden ganzen Zahl m nach dem Modul 4 seinem positiv oder negativ genommenen complementären Divisor congruent ist, je nachdem m von der Form $4s+1$ oder $4s+3$ ist, da ferner zwei um 4 von einander verschiedene ungerade Zahlen theilerfremd sind, so besitzt die Differenz

$$\left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] - \left[\frac{4n-3-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]$$

beziehungsweise

$$\left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right] - \left[\frac{n-x^2}{2x-1}\right] =$$

$$= \left[\frac{4n+3-(2x-1)^2}{4(2x-1)} - \frac{1}{2}\right] - \left[\frac{4n-1-(2x-1)^2}{4(2x-1)} - \frac{1}{2}\right]$$

den Wert 1 oder 0, je nachdem $2x-1$ ein $\sqrt{4n+1}$, beziehungsweise $\sqrt{4n+3}$, nicht übersteigender Theiler der ganzen Zahl $4n+1$, beziehungsweise $4n+3$, ist oder nicht, und es stellt demnach der Ausdruck

$$F(4n+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left\{ \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{4n-3-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] \right\} f(2x-1)$$

$$F(4n+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left\{ \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right] - \left[\frac{n-x^2}{2x-1}\right] \right\} f(2x-1)$$

die Summe derjenigen Werthe vor, welche die willkürliche Function $f(y)$ annimmt, wenn ihr Argument alle nicht oberhalb $\sqrt{4n+1}$, beziehungsweise $\sqrt{4n+3}$, befindlichen Theiler der ganzen Zahl $4n+1$, beziehungsweise $4n+3$, durchläuft.

Da jede Primzahl p nur einen nicht oberhalb $\sqrt{p}$ liegenden Theiler besitzt, während jede zusammengesetzte Zahl mindestens zwei solche Divisoren hat, so ergeben sich sofort die Theoreme:

Die ganze Zahl $4n+1$ ist Primzahl, wenn für alle $\sqrt{4n+1}$ nicht übersteigenden ungeraden Zahlen y oberhalb 1

$$\left[\frac{4n+1-y^2}{4y}\right] = \left[\frac{4n-3-y^2}{4y}\right]$$

ist.

Die ganze Zahl $4n+3$ ist Primzahl, wenn für alle $\sqrt{n+1}$ nicht übersteigenden ganzen Zahlen y oberhalb 1

$$\left[\frac{n+1-y^2}{2y-1}\right] = \left[\frac{n-y^2}{2y-1}\right]$$

ist.

Die ganze Zahl $4n+3$ ist Primzahl, wenn für alle $\sqrt{4n+3}$ nicht übersteigenden ungeraden Zahlen y oberhalb 1

$$\left[\frac{4n+3-y^2}{4y} - \frac{1}{2}\right] = \left[\frac{4n-1-y^2}{4y} - \frac{1}{2}\right]$$

ist.

Die eben abgeleiteten Gleichungen kann man offenbar auch in folgender Weise schreiben:

$$F(4n+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] f(2x-1) - \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+3}-1}{2}\right]} \left[\frac{4n-3-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] f(2x-1) + \varepsilon f\left(2\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]-1\right)$$

$$F(4n+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right] f(2x-1) - \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n}]} \left[\frac{n-x^2}{2x-1}\right] f(2x-1) + \eta f(2[\sqrt{n+1}]-1),$$

wo ε den Werth 0 oder 1 hat, je nachdem die grössten in $\sqrt{4n-3}$ und $\sqrt{4n+1}$ enthaltenen ungeraden Zahlen gleich oder verschieden sind, während η gleich 1 oder Null ist, je nachdem $n+1$ das Quadrat einer ganzen Zahl ist oder nicht.

Schreibt man in diesen Gleichungen der Reihe nach für n: n, $n-1$, $n-2$, ..., 3, 2, 1 und addirt die so entstehenden Formeln, so ergeben sich die allgemeinen Relationen

$$\sum_{x=0}^{x=n} F(4x+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right] f(2x-1) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} f(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} F(4x+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n-1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right] f(2x-1) + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} f(2x-1).$$

Durch zweckmässige Specialisirung der Function $f(y)$ erhält man leicht folgendes Resultat:

Bezeichnet

$\psi_{\varkappa, \sqrt{x}, D}(x)$ die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen zur ungeraden Zahl D theilerfremden Divisoren der ganzen Zahl x, welche nicht grösser als $\sqrt{x}$ sind,

$\psi^{(r)}_{\varkappa, \sqrt{x}, D}(x)$ die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen zur ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen Divisoren der ganzen Zahl x, welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind,

$\overline{\psi}_{\varkappa, \sqrt{x}, D}(x)$ die Differenz aus der Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter den zur ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ gelegenen Divisoren der ganzen Zahl x, welche aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primfactoren zusammengesetzt sind, und der Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen der übrigen von diesen Theilern,

$\tilde{\psi}_{\varkappa, \sqrt{x}, D}(x)$ die Differenz aus der Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen derjenigen unter den zur ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ liegenden, durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren Divisoren der ganzen Zahl x, welche aus einer geraden Anzahl von Primfactoren zusammengesetzt sind, und der Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen der übrigen von diesen Theilern,

$p_{\varkappa, \sqrt{x}, D}(x)$ die Summe der $\varkappa^{ten}$ Potenzen der zur ungeraden Zahl D theilerfremden Primtheiler der ganzen Zahl x, welche nicht grösser als $\sqrt{x}$ sind,

$\{\Delta; D\}_x$ die Summe der Werthe, welche das Legendre-Jacobi'sche Symbol $\left(\frac{\Delta}{y}\right)$ annimmt, wenn y alle zur ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen Theiler der ganzen Zahl x durchläuft,

so bestehen die Relationen:

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi_{x,\sqrt{4x+1},D}(4x+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa} + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi_{x,\sqrt{4x+3},D}(4x+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa} + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi^{(r)}_{x,\sqrt{4x+1},D}(4x+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu_r(2x-1) +$$
$$+ \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu_r(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi^{(r)}_{x,\sqrt{4x+3},D}(4x+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu_r(2x-1) +$$
$$+ \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu_r(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \bar{\psi}_{x,\sqrt{4x+1},D}(4x+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \lambda(2x-1) +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \lambda(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \bar{\psi}_{x,\sqrt{4x+3},D}(4x+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \lambda(2x-1) +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \lambda(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \tilde{\psi}_{x,\sqrt{4x+1},D}(4x+1) = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \mu(2x-1) +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^x \mu(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \tilde{\psi}_{x,\sqrt{4x+3},D}(4x+3) = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right]\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu(2x-1) +$$

$$+ \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\varkappa}\mu(2x-1)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} p_{\varkappa,\sqrt{4x+1},D}(4x+1) = \sum_{p}\left[\frac{4n+1-p^2}{4p}\right]\left(\frac{D^2}{p}\right)p^{\varkappa} + \sum_{p}\left(\frac{D^2}{p}\right)p^{\varkappa}$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} p_{\varkappa,\sqrt{4x+3},D}(4x+3) = \sum_{p}\left[\frac{4n-1-p_1^2}{4p_1}\right]\left(\frac{D^2}{p_1}\right)p_1^{\varkappa}$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \{\Delta; D\}_{4x+1} = \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left[\frac{4n+1-(2x-1)^2}{4(2x-1)}\right]\left(\frac{D^2\Delta}{2x-1}\right) + \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{\sqrt{4n+1}+1}{2}\right]} \left(\frac{D^2\Delta}{2x-1}\right)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \{\Delta; D\}_{4x+3} = \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left[\frac{n+1-x^2}{2x-1}\right]\left(\frac{D^2\Delta}{2x-1}\right) + \sum_{x=1}^{x=[\sqrt{n+1}]} \left(\frac{D^2\Delta}{2x-1}\right),$$

wo die Summation bezüglich p beziehungsweise p_1 über alle $\sqrt{4n+1}$, beziehungsweise $\sqrt{4n+3}$ nicht übersteigenden ungeraden Primzahlen zu erstrecken ist.

Beachtet man, dass die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl von der Form $4s+1$ als Summe von zwei Quadraten gleich der über alle $\sqrt{4s+1}$ nicht übersteigenden Theiler d dieser Zahl ausgedehnten Summe

$$8\sum_d (-1)^{\frac{d-1}{2}} = 8\sum_d \left(\frac{-1}{d}\right)$$

ist, wo, falls $\sqrt{4s+1}$ eine ganze Zahl ist, das auf dieselbe bezügliche Glied auf die Hälfte zu reduciren ist, so erhält man als speciellen Fall der vorletzten Gleichung für $D = -\Delta = 1$ die im Anfange erwähnte Hermite'sche Relation.

Aus diesen Formeln sollen nun asymptotische Ausdrücke für die in denselben auftretenden zahlentheoretischen Functionen abgeleitet werden. Von den bei dieser Bestimmung nothwendigen Summen habe ich alle mit Ausnahme von

$$\sum_{x=1}^{x=m} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\lambda} \quad (\lambda \geqq -1)$$

schon vor Kurzem [1] mitgetheilt. Die eben genannte Summe stellt nun offenbar die Summe der λ^{ten} Potenzen der zu $2D$ theilerfremden ganzen Zahlen des Intervalles $1 \ldots 2m-1$ dar, und demnach ist

$$\sum_{x=1}^{x=m} \left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^{\lambda} = \sum_d S_{\lambda}\left(\left[\frac{2m-1}{d}\right]\right) d^{\lambda} \mu(d),$$

wo die Summation bezüglich d über alle Theiler von $2D$ zu erstrecken ist.

Da nun

$$S_{\lambda}(\mu) = \frac{\mu^{\lambda+1}}{\lambda+1} + \frac{\mu^{\lambda}}{2} + \binom{\lambda}{2}\frac{B_1}{\lambda-1}\mu^{\lambda-1} - \binom{\lambda}{4}\frac{B_2}{\lambda-3}\mu^{\lambda-3} + \\ + \binom{\lambda}{6}\frac{B_3}{\lambda-5}\mu^{\lambda-5} - \ldots$$

---

[1] „Zahlentheoretische Sätze“, Denkschriften der mathem. naturw. Classe, 56. Band.

ist, so wird

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^\lambda = \sum_d \left\{\frac{1}{\lambda+1}\left[\frac{2m-1}{d}\right]^{\lambda+1} + \frac{1}{2}\left[\frac{2m-1}{d}\right]^\lambda + \right.$$

$$+\binom{\lambda}{2}\frac{B_1}{\lambda-1}\left[\frac{2m-1}{d}\right]^{\lambda-1} - \binom{\lambda}{4}\frac{B_2}{\lambda-3}\left[\frac{2m-1}{d}\right]^{\lambda-3} +$$

$$\left. +\binom{\lambda}{6}\frac{B_3}{\lambda-5}\left[\frac{2m-1}{d}\right]^{\lambda-5} - \ldots\right\} d^\lambda \mu(d)$$

oder

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)(2x-1)^\lambda = \frac{\varphi(2D)}{2D(\lambda+1)}(2m-1)^{\lambda+1} + \Delta_1$$

wo

$$|\Delta_1| < A(2m-1)^\lambda$$

ist und A eine für alle Werthe von m endliche Grösse vorstellt.

Für $\lambda = -1$ hat man

$$\sum_{x=1}^{x=m}\left(\frac{D^2}{2x-1}\right)\frac{1}{2x-1} = \sum_d \sum_{x=1}^{x=\left[\frac{2m-1}{d}\right]} \frac{\mu(d)}{dx}$$

$$= \sum_d \frac{\mu(d)}{d}\left\{\log\left[\frac{2m-1}{d}\right] + C + \frac{\vartheta d}{2m-1}\right\} \quad (|\vartheta| < 1)$$

$$= \frac{\varphi(2D)}{2D}\{\log(2m-1) + C\} - \sum_d \frac{\mu(d)\log d}{d} + \frac{A_1}{2m-1}$$

wo A_1 für alle Werthe von m unterhalb einer angebbaren endlichen Grenze bleibt.

Aus den aufgestellten Formeln folgen nun die asymptotischen Relationen:

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi_{\varkappa, \sqrt{4x+\alpha}, D}(4x+\alpha) = \frac{\varphi(2D)}{4\varkappa(\varkappa+2)D}(4n+\alpha)^{1+\frac{\varkappa}{2}} + \Delta_2 \quad (\varkappa > 0)$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi_{0,\sqrt{4x+\alpha},D}(4x+\alpha) = \frac{\varphi(2D)}{16D}(4n+\alpha)\{\log(4n+\alpha)+2C-1\} - $$
$$- \frac{4n+\alpha}{2}\sum_d \frac{\mu(d)\log(d)}{d} + \Delta_3$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi_{-\varkappa,\sqrt{4x+\alpha},D}(4x+\alpha) = \frac{\varphi_{\varkappa+1}(2D)\,\zeta(\varkappa+1)}{4(2D)^{\varkappa+1}}(4n+\alpha)+\Delta_4$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \psi^{(r)}_{-\varkappa\sqrt{4x+\alpha},D}(4x+\alpha) = \frac{\varphi_{\varkappa+1}(2D)(2D)^{(r-1)(\varkappa+1)}\zeta(\varkappa+1)}{4\varphi_{r(\varkappa+1)}(2D)\,\zeta(r(\varkappa+1))}(4n+\alpha)+\Delta_5$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \bar{\psi}_{-\varkappa,\sqrt{4x+\alpha},D}(4x+\alpha) = \frac{\varphi_{2\varkappa+2}(2D)\,\zeta(2(\varkappa+1))}{4(2D)^{\varkappa+1}\varphi_{\varkappa+1}(2D)\,\zeta(\varkappa+1)}(4n+\alpha)+\Delta_6$$

$$\sum_{x=0}^{x=n} \bar{\bar{\psi}}_{-\varkappa,\sqrt{4x+\alpha},D}(4x+\alpha) = \frac{(2D)^{\varkappa+1}}{4\varphi_{\varkappa+1}(2D)\,\zeta(\varkappa+1)}(4n+\alpha)+\Delta_7,$$

wo

$$|\Delta_2| < An^{\frac{\varkappa+1}{2}}$$
$$|\Delta_3|, |\Delta_4|, \ldots, |\Delta_7| < B\sqrt{n}+D\log n; \quad \alpha = 1, 3$$

ist.

Von den in diesen Formeln enthaltenen Theoremen mögen die folgenden erwähnt werden.

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0$$

so beträgt für jede dem Intervalle $4(n-\eta)+\alpha \ldots 4(n+\eta)+\alpha$ angehörige ganze Zahl x von der Form $4s+\alpha (\alpha=1,3)$ die Summe der $\varkappa$ten Potenzen der nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen zur ungeraden Zahl D theilerfremden Divisoren im Mittel

$$\frac{\varphi(2D)}{2D\varkappa}(4n+\alpha)^{\frac{\varkappa}{2}}.$$

Ist

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\eta}{n} = 0$$

$$\lim_{\eta, n=\infty} \frac{\sqrt{n}}{\eta} = 0,$$

so besitzt jede dem Intervalle $4(n-\eta)+\alpha \ldots 4(n+\eta)+\alpha$ angehörige ganze Zahl x von der Form $4s+\alpha (\alpha = 1,3)$ im Mittel

$$\frac{\varphi(2D)}{4D} \{\log(4n+\alpha)+2C\} - \sum_d \frac{\mu(d)\log(d)}{d}$$

nicht oberhalb $\sqrt{x}$ liegende, zur ungeraden Zahl D theilerfremde Divisoren.

Jede s-zifferige Zahl x von der Form $4s+\alpha (\alpha = 1,3)$ hat im Mittel

$$\frac{\varphi(2D)}{4D} \{s\log 10 + \frac{\log 10}{9} + 2C - 1\} - 2\sum_d \frac{\mu(d)\log(d)}{d}$$

nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindliche, zur ungeraden Zahl D theilerfremde Divisoren.

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen der zu einer ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen Theiler einer ganzen Zahl x von der Form $4s+\alpha$ $(\alpha = 1, 3)$ beträgt im Mittel

$$\frac{\varphi_{\varkappa+1}(2D)}{(2D)^{\varkappa+1}} \zeta(\varkappa+1).$$

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen zu einer ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ liegenden Theiler einer ganzen Zahl x von der Form $4s+\alpha$ $(\alpha = 1, 3)$, welche durch keine r^{te} Potenz (ausser 1) theilbar sind, ist im Mittel gleich

$$\frac{(2D)^{(r-1)(\varkappa+1)} \varphi_{\varkappa+1}(2D)\, \zeta(\varkappa+1)}{\varphi_{r(\varkappa+1)}(2D)\, \zeta(r(\varkappa+1))}$$

Die Summe der reciproken $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenzen derjenigen unter den zu einer ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen Theiler einer ganzen Zahl x von der Form

$4s+\alpha$ ($\alpha = 1, 3$), welcher aus einer geraden Anzahl von (gleichen oder verschiedenen) Primzahlen zusammengesetzt ist, übertrifft die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen der übrigen Theiler derselben Beschaffenheit im Mittel um

$$\frac{\varphi_{2\varkappa+2}(2D)\,\zeta(2\varkappa+2)}{(2D)^{\varkappa+1}\varphi_{\varkappa+1}(2D)\,\zeta(\varkappa+1)}$$

Die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen derjenigen unter den zu einer ungeraden Zahl D theilerfremden, nicht oberhalb $\sqrt{x}$ befindlichen, durch kein Quadrat (ausser 1) theilbaren, Divisoren einer ganzen Zahl x von der Form $4s+\alpha$ ($\alpha = 1, 3$), welche aus einer geraden Anzahl von Primfactoren bestehen, übertrifft die Summe der reciproken $\varkappa$ten Potenzen der übrigen von ihnen im Mittel um

$$\frac{(2D)^{\varkappa+1}}{\varphi_{\varkappa+1}(2D)\,\zeta(\varkappa+1)}$$

2. Ich habe unlängst a. a. O. folgende Relation mitgetheilt:

$$\sum_{x=1}^{x=n}\varphi(\Delta,x)\mathrm{M}_2\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \sum_{x=1}^{x=n}\Phi\left(\Delta,\left[\frac{n}{x}\right]\right)\mu_2(x) \qquad (\Delta < 0)$$

$$= \tau\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)$$

$$= \tau\sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) + \tau\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)$$

Vereinigt man alle Glieder der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichung, in denen $\left[\frac{n}{x}\right]$ denselben Werth s hat, so erhält man als Coëfficienten von $\Omega(s)$ eine Summe von aufeinander folgenden Legendre-Jacobi'schen Symbolen, und daher besteht, weil bekanntlich

$$\left|\sum_{x=\lambda}^{x=\mu}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\right| \leqq \frac{\Delta}{2}$$

ist, die Beziehung

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\right|\leqq\frac{\Delta}{2}\sum_{x=1}^{x=\left[\frac{n}{\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}\right]}\Omega(x)$$

oder, da

$$\left[\frac{n}{\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}\right]\leqq\left[n^{\frac{1}{\sigma}}\right]$$

ist,

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\right|\leqq\frac{\Delta}{2}\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{\sigma}}\right]}\Omega(x).$$

Nun ist bekanntlich

$$\Omega(m)=\frac{6m}{\pi^2}\{\log m+12\mathfrak{F}+2C-1\}+$$
$$+\varepsilon_m\left\{2+\sqrt{m}\left(\frac{1}{2}\log m+5+3C+2\log 2\right)\right\}\qquad(|\varepsilon_m|<1)$$

wo

$$\mathfrak{F}=\sum_{x=2}^{x=\infty}\frac{\log x}{x^2}=0\cdot 9375482543\ldots$$

ist, und demnach hat man

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)\right|\leqq\frac{\Delta}{2}\sum_{x=1}^{x=\left[n^{\frac{1}{\sigma}}\right]}\left\{\frac{6x}{\pi^2}[\log x+12\mathfrak{F}+2C-1]+\right.$$
$$\left.+\varepsilon_x\left[\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\log x+5+3C+2\log 2\right)+2\right]\right\}$$
$$<An^{\frac{2}{\sigma}}\log n$$

wo A für alle Werthe von n endlich bleibt.

Es ist ferner

$$\sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]} \left(\frac{\Delta}{x}\right)\Omega\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right) = \frac{6}{\pi^2}\sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\left[\frac{n}{x}\right]\left\{\log\left[\frac{n}{x}\right]+12\mathfrak{F}+2C-1\right\}+$$

$$+\sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]}\varepsilon_x\left(\frac{\Delta}{x}\right)\left\{2+\sqrt{\left[\frac{n}{x}\right]}\left[\frac{1}{2}\log\left[\frac{n}{x}\right]+5+3C+2\log 2\right]\right\}$$

$$=\frac{6n}{\pi^2}\left\{(\log n+12\mathfrak{F}+2C-1)\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}-\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\log x}{x}\right\}+\Delta_8$$

wo:

$$\Delta_8 = \sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]}\varepsilon_x\left(\frac{\Delta}{x}\right)\left\{2+\sqrt{\left[\frac{n}{x}\right]}\left(\frac{1}{2}\log\left[\frac{n}{x}\right]+5+3C+2\log 2\right)\right\}-\frac{6}{\pi^2}\sum_{x=1}^{x=n}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\varepsilon'_x\left\{\log\left[\frac{n}{x}\right]+12\mathfrak{F}+2C-1\right\}+\frac{6n}{\pi^2}\cdot$$

$$\cdot\sum_{x=1}^{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}\log\left(1-\frac{\varepsilon'_x x}{n}\right)-\frac{6n}{\pi^2}\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}\{\log n-\log x+12\mathfrak{F}+2C-1\}$$

ist.

Ist $f(x)$ eine mit wachsenden x schwächer als x wachsende Function, so hat man

$$\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}=\sum_{=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\varkappa\Delta}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}+$$

$$+\sum_{x=\varkappa\Delta+1}^{(\varkappa+1)\Delta}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}+\sum_{x=(\varkappa+1)\Delta+1}^{(\varkappa+2)\Delta}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}+\cdots$$

Da bekanntlich, wenn x von $\alpha\Delta$ bis $(\alpha+1)\Delta$ sich bewegt, das Zeichen $\left(\frac{\Delta}{x}\right)$ ebenso oft positiv als negativ wird, da ferner eine Reihe von Legendre-Jacobi'schen Symbolen hiebei gleich 0 wird, so ist offenbar

$$\left|\sum_{\alpha\Delta}^{(\alpha+1)\Delta}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{f\{(\alpha+1)\Delta\}}{2\alpha^2}$$

und daher

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{1}{2}\sum_{\varkappa=\left[\frac{n^{1-\frac{1}{\sigma}}}{\Delta}\right]}^{\varkappa=\infty}\frac{f((\varkappa+1)\Delta)}{\varkappa^2}$$

und speciell

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x}\right|<\frac{\pi^2\Delta}{12\left(n^{1-\frac{1}{\sigma}}-\Delta\right)}$$

$$\left|\sum_{x=\left[n^{1-\frac{1}{\sigma}}\right]+1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\log x}{x}\right|<\frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\left(n^{1-\frac{1}{\sigma}}-\Delta\right)}}.$$

Berücksichtigt man nun, dass, wie Herr Berger[1] bewiesen hat,

---

[1] „Sur une sommation de quelques séries". Nova Acta regiae societatis scientiarum Upsalensis. Seriei III, Vol. XII, Fasc. 1. — „Sur une générali-

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\log x}{x}=\frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|}\sum_{h=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\left\{\log\Gamma\left(\frac{h}{-\Delta}\right)+\frac{h}{-\Delta}(\log 2\pi+C)\right\}$$

$$\sum_{x=1}^{x=\infty}\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{1}{x^m}=-\frac{(2\pi i)^m}{\{1+\varepsilon(-1)^m(\sqrt{\Delta})\}}B(m,\Delta)\quad(\varepsilon\Delta>0)$$

ist, wo

$$(\sqrt{\Delta})=|\sqrt{\Delta}|\qquad(\Delta>0)$$
$$(\sqrt{\Delta})=i|\sqrt{-\Delta}|\qquad(\Delta<0)$$

ist, so erhält man schliesslich

$$\sum_{x=1}^{x=n}\varphi(\Delta,x)M_2\left(\left[\frac{n}{x}\right]\right)=-\frac{6n}{\pi^2}\left\{(\log n+12\mathfrak{F}+2C-1)\frac{2\pi i B(1,\Delta)}{(1+(\sqrt{\Delta}))}+\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|}\sum_{h=1}^{h=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)\left\{\log\Gamma\left(\frac{h}{-\Delta}\right)+\frac{h}{-\Delta}(\log 2\pi+C)\right\}\right\}+\Delta_8\quad(\Delta<0)$$

$$\Delta_8<An^{\frac{2}{3}}+Bn^{\frac{5}{6}}\log n+Cn^{\frac{2}{3}}\log n+Dn^{\frac{1}{3}}\log n.$$

---

sation des nombres et des fonctions de Bernoulli". Bihang till kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Bandet 13, Afdelning I.

Bahnbestimmung des Kometen 1846, VIII

von

Dr. S. Oppenheim,

Privatdocenten für Astronomie an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. April 1890.)

Der Komet 1846, VIII wurde am 23. September von De-Vico in Rom entdeckt, jedoch erst am 15. October von Wichmann in Königsberg wiedergesehen und dann an diesem und dem folgenden Tage in Königsberg, ferner am 21. October in Altona und am 21., 22., 23. und 25. October in Hamburg beobachtet. Wenn sich auch so die Beobachtungen über den nicht gar zu geringen Zeitraum von 32 Tagen erstrecken, so ist doch einerseits die Zahl derselben eine so kleine und anderseits ihre Vertheilung eine so ungünstige, dass eine sichere Bestimmung der Bahn dieses Kometen, insbesondere was den Charakter derselben anlangt, nur wenig Aussicht auf Erfolg hat. Hiezu kommt noch, dass nur die Beobachtungen von Rom, Königsberg und Altona in einer Weise veröffentlicht sind, dass die durch die Beobachtung am Fernrohre gegebenen Differenzen zwischen Komet und Vergleichstern sich ermitteln und danach die angegebenen Kometenorte durch Benützung neuerer und besserer Catalogpositionen der Vergleichsterne corrigiren liessen, während die Beobachtungen von Hamburg nur in der Form verwendet werden konnten, wie sie vom Beobachter Georg Rümker in den Astronomischen Nachrichten mitgetheilt sind.

Ebenso gering, wie die Zahl der Beobachtungen, sind auch die Angaben über das Aussehen des Kometen. Ich fand nur eine diesbezügliche Notiz vor, und zwar in der Entdeckungsanzeige von De-Vico an die Pariser Akademie, welche wörtlich lautet:

„Hier soir vers les 8 heures nous avons vu une nouvelle comète dans la Grande-Ourse; elle ressemble beaucoup à celle du 29 juillet, mais la nébulosité est plus large.“ [1]

Bahnelemente dieses Kometen wurden von Powalky, Wichmann und Hind abgeleitet; von allen diesen in den Astr. Nachr., Bd. 25, mitgetheilten führe ich nur die von Hind gerechneten hier an, weil dieselben die Grundlage für die folgende definitive Bahnbestimmung bilden. Diese Elemente, aus den Beobachtungen Rom September 23, Königsberg October 15 und Hamburg October 21 abgeleitet, lauten:

$T =$ 1846 Oct. 29·74708 mittl. Zeit Greenwich

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 98°35'49"9 \\ \Omega &= 4\ 41\ 3\cdot7 \\ i &= 49\ 41\ 17\cdot1 \end{aligned}\right\}\ \text{Ekliptik und Äqu. 1846 Nov. 0}$$

$\log q = 9\cdot9193956$

Interessant sind ferner die von Quirling aus Rom September 23, Königsberg October 16 und Hamburg October 22 berechneten elliptischen Elemente:

$T =$ 1846 Oct. 29·9538425 mittl. Zeit Berlin

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 98°\ 47'\ 15"09 \\ \Omega &= 4\ \ 38\ \ 17\cdot80 \\ i &= 49\ \ 39\ \ 2\cdot68 \end{aligned}\right\}\ \text{Ekliptik und Äqu. 1846 Oct. 1}$$

$\log q = 9\cdot9187601$

$\log a = 2\cdot09351$

$\log e = 9\cdot9970860$

doch können diese keineswegs als richtig bezeichnet werden, weil die Declination des mittleren Ortes, Königsberg October 16, in der Form, wie Quirling dieselbe zur Bahnbestimmung verwendete, um 17″ falsch ist.

Zur Ableitung einer Ephemeride, um mit derselben die Beobachtungen zu vergleichen, habe ich zunächst die Sonnenorte den Leverrier'schen, sowie die Reductionselemente den Oppolzer'schen Tafeln entnommen. Dieselben sind:

---

[1] Comptes rendus 1846, pag. 687.

Mittl. Berl. Zeit	Länge			Breite	Log. Rad. Vector
	der Sonne, bezogen auf das Äquinoctium 1846·0				
1846 Sept. 22·5	179°	31'	38″43	+0″11	0·0012619
24·0	180	1	2·97	+0·17	0·0011999
23·5	180	30	27·98	+0·23	0·0011377
24·0	180	59	53·46	+0·29	0·0010753
Oct. 15·0	201	42	48·65	—0·15	9·9984571
16·0	202	42	23·62	—0·06	9·9983361
17·0	203	42	0·81	+0·03	9·9982151
18·0	204	41	40·17	+0·14	9·9980941
19·0	205	41	21·65	+0·26	9·9979731
20·0	206	41	5·15	+0·40	9·9978521
21·0	207	40	50·66	+0·54	9·9977311
22·0	208	40	38·12	+0·67	9·9976102
23·0	209	40	27·46	+0·78	9·9974895
24·0	210	40	18·54	+0·88	9·9973692
25·0	211	40	11·83	+0·95	9·9972494
26·0	212	40	5·83	+0·96	9·9971302

Hieraus erhielt ich die folgenden rechtwinkeligen Sonnencoordinaten *X*, *Y*, *Z*, ebenfalls auf das mittlere Äquinoctium von 1846·0 bezogen, und die mittlere Schiefe der Ekliptik zu 23° 27′ 33″73 angenommen:

Mittl. Berl. Zeit	*X*	*Y*	*Z*
1846 Sept. 22·5	—1·002876	+0·007589	+0·003294
23·0	—1·002767	—0·000281	—0·000121
23·5	—1·002584	—0·008151	—0·003536
24·0	—1·002327	—0·016021	—0·006951
Oct. 15·0	—0·925751	—0·338182	—0·146761
16·0	—0·918966	—0·352751	—0·153083
17·0	—0·911905	—0·367215	—0·159360
18·0	—0·904570	—0·381569	—0·165589
19·0	—0·896962	—0·395809	—0·171768

Mittl. Berl. Zeit	X	Y	Z
1846 Oct. 20·0	—0·889083	—0·409930	—0·177895
21·0	—0·880935	—0·423927	—0·183968
22·0	—0·872522	—0·437796	—0·189986
23·0	—0·863846	—0·451532	—0·195947
24·0	—0·854909	—0·465130	—0·201848
25·0	—0·845714	—0·478587	—0·207687
26·0	—0·836266	—0·491899	—0·213464

Die den Oppolzer'schen Tafeln entlehnten Reductionsconstanten für die mittleren Tage sind:

Mittl. Berl. Zeit	f	log g	G	log h	H	i
1846 Sept. 22·5	+41"33	1·2898	22°44'8	1·2725	89°26'	+8"12
23·5	+41·40	1·2905	22 43·4	1·2726	88 24	+8·12
Oct. 15·5	+43·10	1·3075	22 34·2	1·2816	65 1	+7·52
17·5	+43·27	1·3092	22 35·0	1·2828	62 55	+7·41
19·5	+43·44	1·3110	22 35·9	1·2842	60 50	+7·29
21·5	+43·63	1·3129	22 36·9	1·2855	58 45	+7·16
23·5	+43·81	1·3148	22 38·1	1·2869	56 41	+7·02
25·5	+44·00	1·3168	22 39·3	1·2884	54 37	+6·87

Mit diesen Werthen und unter Zugrundelegung der schon oben mitgetheilten, jedoch approximativ auf den Jahresanfang reducirten parabolischen Elemente von Hind ergab sich schliesslich die folgende Ephemeride:

$T = 1846$ Oct. $29 \cdot 78429$ mittl. Berl. Zeit

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 98°35'\ 1''4 \\ \Omega &= \ \ 4\ 40\ 15 \cdot 2 \\ \omega &= 93\ 54\ 46 \cdot 2 \\ i &= 49\ 41\ 17 \cdot 1 \end{aligned}\right\} \text{Ekliptik und Äqu. } 1846 \cdot 0$$

$$\log q = 9 \cdot 919396$$

$$x = r(9 \cdot 999161) \sin (v + 186°56'18''8)$$

$$y = r(9 \cdot 473446) \sin (v + 108\ 27\ 24 \cdot 0)$$

$$z = r(9 \cdot 980798) \sin (v + \ 95\ 51\ 19 \cdot 4)$$

Mittl. Berl. Zeit	α app.	δ app.	log r	log Δ	Aberr. Zeit
1846					
Sept. 22·5	124°22'15"8	+64°15'35"8	0·032390	9·856490	5m57s7
23·0	126 45 31·6	64 15 52·1	0·030124	9·857070	5 58·2
23·5	129 7 58·4	64 13 53·0	0·027866	9·857765	5 58·8
24·0	131 29 16·6	+64 9 39·6	0·025612	9·858572	5 59·4
Oct. 15·0	187 10 43·5	+44 52 0·7	9·942419	9·956699	7 30·5
15·5	187 44 36·5	44 19 46·3			33·6
16·0	188 17 26·3	43 47 43·0	9·939566	9·962729	36·8
16·5	188 49 16·5	43 15 50·9			40·0
17·0	189 20 10·2	42 44 10·3	9·936874	9·968752	43·2
17·5	189 50 10·1	42 12 41·3			46·4
18·0	190 19 18·8	41 41 24·0	9·934349	9·974756	49·7
18·5	190 47 38·5	41 10 18·4			52·9
19·0	191 15 11·3	40 39 24·7	9·932000	9·980732	56·2
19·5	191 41 59·3	40 8 43·0			7 59·4
20·0	192 8 4·4	39 38 13·4	9·929832	9·986670	8 2·7
20·5	192 33 28·5	39 7 55·8			6·0
21·0	192 58 13·4	38 37 50·2	9·927853	9·992563	9·3
21·5	193 22 20·6	38 7 56·6			12·6
22·0	193 45 51·8	37 38 15·0	9·926070	9·998403	16·0
22·5	194 8 48·5	37 8 45·4			19·3
23·0	194 31 12·2	36 39 27·8	9·924487	0·004184	22·6
23·5	194 53 4·2	36 10 22·1			25·9
24·0	195 14 25·8	35 41 28·1	9·923111	0·009896	29·3
24·5	195 35 18·3	35 12 45·8			32·6
25·0	195 55 43 0	34 44 15·1	9·921946	0·015541	35·9
25·5	196 15 41·1	34 15 55·8			39·2
26·0	196 35 13·8	+33 47 47·5	9·920995	0·021100	8 42·6

Da die Zahl der Beobachtungen nur 10 ist, so erlaube ich mir dieselben im Folgenden detaillirter, als es sonst üblich ist, anzuführen.

Im Rom wurde der Komet am 23. September zweimal beobachtet. Diese von Director Rümker in Hamburg reducirten Beobachtungen sind:

1846 Sept. 23	8ʰ 6ᵐ36ˢ5	α = 128°21'44"5	δ = +64°14'23"4
23	10 25 34·9	128 48 29·5	+64 14 18·5

und beruhen auf den zwei Sternen B. D. + 64° Nr. 274, σ Urs. maj. und B. D. + 64 Nr. 711, für welche die scheinbaren Orte zu

Nr. 1....	α = 130° 0'15"6	δ = +64°15'23"2	B. D. 64°711
Nr. 2....	134 32 52·9	+64 7 42·8	B. D. 64·724

nach Hamburger Meridianbeobachtungen angenommen wurden. Neuere Beobachtungen geben nun für diese zwei Sterne folgende mittlere Orte:

Nr. 1 Rümker, Hamburg	α = 129°59'42"6	δ = 64°15'50"2	Epoche 1846·7
Krüger Zon. d. A. G.	129 59 57·0	64 15 44 9	„ 1874·3
Ottakring Mer. Beob.	129 59 61·2	64 15 43·9	„ 1890·1

Eigenbewegung in α = +0"405 in δ = —0"159

Nr. 2 Radcliffe.......	α = 134°32'24"1	+64°8'4"5
Greenw. 1864...	23·4	2·6
Brüssel 1865 ...	24·4	2·5
Greenw. 1872...	24·9	2·4
Krüger 1875....	25·8	3·6

denen zufolge

für Nr. 1. ...	α = 129°59'42"4	δ = +64°15'50"3
Reduction...	+33·0	—27·0
für Nr. 2. ...	α = 134 32 24·6	δ = +64 8 3·1
Reduction...	+27·7	—26·8

angenommen wurde. Die Beobachtungen von De-Vico in Rom erfordern daher mit Rücksicht auf diese neuen Sternorte die Correctionen

$$\Delta\alpha = -0''2 \qquad \Delta\delta = +0''1$$
$$= -0\cdot6 \qquad = -6\cdot5$$

und lauten:

1846 Sept. 23:

α = 128°21'44"3	δ = 64°14'23"5	Parallaxe Δα = + 1"5	Δδ = +11"8
128 48 28·9	64 14 12·3	—10·6	+10·7

Für dieselben zwei, jedoch schon wegen Aberration corrigirten und auf Berliner Zeit reducirten Beobachtungszeiten ergibt die obige Ephemeride

Sept. 23·336311	$\alpha = 128°21'27''0$	$\delta = 64°14'46''8$
23·432819	128 48 53·5	14 16·8

so dass man folgende Differenzen, im Sinne Beob.—Rechnung, erhält:

1)	$\Delta\alpha = +18''8$	$\Delta\alpha \cos\delta = +\ 8''2$	$\Delta\delta = -11''5$
2)	$-35·2$	$-15·3$	$+\ 6·2$

Aus denselben folgt im Mittel als Correction der Ephemeride, welche als für September 23·384566 giltig angenommen wurde,

$$\Delta\alpha = -8''2 \quad \Delta\alpha\cos\delta = -3''6 \quad \Delta\delta = -2''6.$$

Es ergab sich derart als erster Normalort, schon auf 1846·0 bezogen,

1846 Sept. 23·384566 $\alpha = 128°34'1''7$ $\delta = +64°14'47''0$

In Königsberg wurde der Komet von Wichmann am 15. und 16. October beobachtet. Die Details der Beobachtung sind vollständig in den Astr. Nachr. mitgetheilt und lauten

Königsberg:

Oct. 15	$8^h 39^m 19^s$	$\Delta\alpha = -12'40''1$	$\Delta\delta = -26'26''2$	Vergl. St. 3
16	7 45 11	+27 5·2	− 8 13·2	„ „ 4.

Die Positionen der Vergleichsterne zu denselben sind

Nr. 3.	$\alpha = 187°45'46''2$	$\delta = +44°57'\ 3''4$	nach Groombridge
	47·5	4·7	„ Weisse
	46·6	6·2	„ Radcliffe
	41·7	6·3	„ Königsberg, Mer. Beob.
Nr. 4.	$\alpha = 188\ \ 9\ 10·5$	$\delta = +43\ 37\ 20·6$	nach Lalande
	6·9	16·7	„ Weisse
	10·8	18·0	„ Königsberg, Mer. Beob.

und wurden zu

Nr. 3..	$\alpha = 187°45'44''2$	$\delta = 44°57'\ 6''3$	im Mittel aus Radcl. u. Königsb.
Red...	+ 7·0	−16·2	
Nr. 4..	$\alpha = 188\ \ 9\ 10·8$	$\delta = 43\ 37\ 18·0$	Königsberg
Red...	+ 8·8	−16·2	

angenommen, so dass die daraus abgeleiteten Kometenorte

Oct. 15	$\alpha = 187°33'11''1$	$\delta = +44°30'32''8$	Parall. $\Delta\alpha = +4''4$	$\Delta\delta = +8''9$
16	188 36 24·1	43 28 48·7	+5·7	+8·2

sind und die folgenden Correctionen der obigen Ephemeride geben:

Oct. 15·335672 m. Berl. Z. $\Delta\alpha = -20''0$ $\Delta\alpha \cos\delta = -14''3$ $\Delta\delta = +12''0$
16·298010 $-\ 2·0$ $-\ 1·4$ $+14·9$

Das Mittel derselben,

$$\Delta\alpha \cos\delta = -7''8 \qquad \Delta\alpha = -10''9 \qquad \Delta\delta = +13''4,$$

als für October 16·0 giltig angesehen, lieferte so den zweiten Normalort

Oct. 16·0 $\alpha = 188°16'42''2$ $\delta = +43°48'13''8$ Äqu. 1846·0

Zwei Beobachtungen von Peters in Altona und eine von Rümker in Hamburg, alle am 21. October angestellt, gaben den dritten Normalort. Die einzelnen Beobachtungen sind:

Altona	Oct. 21 6h 42m 19s7	$\Delta\alpha = +59'\ 5''7$	$\Delta\delta = -48'\ 2''3$	Vergl. St. 5
	21 7 5 12·6	−25 13·9	—	„ „ 6 u. 7
Hamburg	Oct. 21 7 5 18·3	−34 53·1	+ 9 25·8	„ „ 6

dazu die Positionen der Vergleichsterne

Nr. 5..	$\alpha = 192°12'15''1$	$\delta = +39°\ 9'\ 4''0$	12. Can. ven. aus dem Fund.
Red...	+10·5	−15·2	Cat. der A. G.
Nr. 6..	$\alpha = 193\ 47\ 21·1$	$\delta = +38\ 10\ 43·5$	Lund: Zonen der A. G.
Red...	+10·6	−15·0	
Nr. 7..	$\alpha = 193\ 28\ \ 9·2$	$\delta = +38\ 13\ 40·1$	ebenso
Red...	+10·6	−15·0	

so dass die Kometenorte sind:

				Parallaxe	
Altona	Oct. 21	$\alpha = 193°11'31''3$	$\delta = +38°20'46''5$	$\Delta\alpha = +6''0$	$\Delta\delta = +7''2$
„	21	193 12 41·9	—	+5·7	—
Hamburg	Oct. 21	193 12 38·6	38 19 45·3	+5''7	+7·4

Mit der Ephemeride verglichen, geben dieselben folgende Differenzen im Sinne Beob.—Rechn.:

Altona	Oct. 21·283300	$\Delta\alpha = -20''6$	$\Delta\alpha \cos\delta = -16''2$	$\Delta\delta = +1''3$
	21·299189	+ 3·8	+ 3·0	—
Hamburg	Oct. 21·299168	+ 0·6	+ 0·5	−2·9

Da die erste Beobachtung nur auf einem einzigen Vergleich des Kometen mit dem Sterne beruht, so erhielt dieselbe gegen die beiden anderen das Gewicht $^1/_2$, so dass die Correction der Ephemeride für

Oct. 21·3 $\Delta\alpha \cos\delta = -1''8$ $\Delta\alpha = -2''3$ $\Delta\delta = -1''5$

und der daraus folgende Normalort:

Oct. 21 3 $\alpha = 193°12'9''7$ $\delta = +38°20'7''7$ Äqu. 1846·0

sind.

Drei weitere Beobachtungen von Hamburg konnten nur in der Form benützt werden, wie sie in den Astr. Nachr. mitgetheilt sind. Dieselben sind:

Hamburg:				Parallaxe	
Oct. 22	$16^h 20^m 50^s 1$	$\alpha = 194°17'34''3$	$\delta = +36°57'52''6$	$\Delta\alpha = -6''5$	$\Delta\delta = +6''1$
23	16 23 20·7	195 1 31·0	35 59 38·2	−6·3	+6·0
25	15 24 4·8	196 21 56·5	34 7 41·2	−5·5	+6·5

und geben mit der Ephemeride verglichen, die Differenzen (Beobachtung—Rechnung):

Hamburg Oct.	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
22·684846	$+18''6$	$+14''9$	$+4''5$
23·686628	+18·9	+15·3	+10·2
25·645213	+26·7	+22·1	+3·3

Da die letzte Beobachtung nur auf einem Durchgang dès Kometen und Vergleichsternes beruht, so erhielt dieselbe gegen die beiden ersten das Gewicht $^1/_2$. Es folgt so als Mittel, welches als für October 24·0 giltig angesehen wurde,

$\Delta\alpha \cos\delta = +16''5$ $\Delta\alpha = +20''3$ $\Delta\delta = +6''5$

und weiters als vierter Normalort

Oct. 24·0 $\alpha = 195°14'11''5$ $\delta = +35°41'51''0$ Äqu. 1846·0

Ich stelle nun noch im Folgenden die vier Normalorte, welche die Grundlage der nachfolgenden Rechnung bilden, zusammen:

	Zeit (mittl. Berl. Z.)	α (Äqu. 1846·0)	δ (Äqu. 1846·0)	Zahl d. Beob.
1	Sept. 23·384566	$\alpha = 128°34'\ 1''7$	$\delta = +64°14'47''0$	2
2	Oct. 16·0	188 16 42·2	+43 48 13·8	2
3	„ 21·3	193 12 9·7	+38 20 7·7	3
4	„ 24·0	195 14 11·5	+35 41 51·0	3

Entsprechend der geringen Anzahl der Beobachtungen versuchte ich zuerst die Bahn des Kometen nur mit genäherter Berücksichtigung der Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und

zwar unter Anwendung der Methode der Variation des Verhältnisses der geocentrischen Distanzen M zu bestimmen und leitete aus den beiden äusseren Orten 1 und 4 unter den drei Annahmen

1) $\log M = 0\cdot151844$ $\log a = \infty$
2) $= 0\cdot154000$ $= \infty$
3) $= 0\cdot151844$ $= 2\cdot0935$ (Quirlings Ellipse)

die folgenden drei Elementensysteme ab:

	I. Parabel	II. Parabel	III. Ellipse	
$T=$	1846 Oct. 29·819712	1846 Oct. 29·655916	1846 Oct. 29·953326	
☊ $=$	4°41'45"8	4°37' 3"1	4°37'56"2	Ekliptik
$\omega=$	93 58 44·4	93 38 34·8	94 8 52·9	u. Äqu.
$i=$	49 42 16·7	49 39 36·3	49 39 6·5	1846·0
$\log q=$	9·919446	9·919264	9·918798	
$\log a=$	∞	∞	2·093500	
$\log e=$	0·00	0·00	9·997085	

welche die beiden äusseren Orte nahezu vollständig darstellen, und in den beiden mittleren Orten 2 und 3 die Fehler

		I.	II.	III.
2)	$\Delta\alpha \cos\delta =$	− 4"9	−79"4	− 0"4
3)		−12·1	−37·0	−10·4
2)	$\Delta\delta =$	− 7·6	+65·0	−25·3
3)		−12·3	+10·5	−20·2

zurücklassen. Aus denselben erhielt ich nach der bekannten Methode zunächst als die wahrscheinlichste Parabel ($\log M = 0\cdot151804$):

$T = 1846$ Oct. $29\cdot822718$
☊ $= 4°41'51"0$ Ekl. u.
$\omega = 93\ 59\ \ 6\cdot6$ Äqu. 1846
$i = 49\ 42\ 19\cdot6$
$\log q = 9\cdot919449$

mit der Darstellung der beiden mittleren Orte

2)	$\Delta\alpha \cos\delta =$ − 3"5	$\Delta\delta =$ − 8"9
3)	−11·6	−12·7

und sodann mit Berücksichtigung einer Variation der grossen Axe als wahrscheinlichste Bahn überhaupt die Hyperbel:

$$\log M = 0\cdot151457$$
$$\log a = 1\cdot983000_n$$
$$T = 1846 \text{ Oct. } 29\cdot679194$$
$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 4°47'32''6 \\ \omega &= 93\ 49\ 26\cdot6 \\ i &= 49\ 46\ 48\cdot4 \end{aligned}\right\} \text{Ekl. u. Äqu. } 1846\cdot0$$
$$\log q = 9\cdot920312$$
$$\log e = 0\cdot003743$$
$$\log(e-1) = 7\cdot937313$$

welche in den mittleren Orten die Fehler übrig liess:

2)	$\Delta\alpha\cos\delta = +2''6$	$\Delta\delta = +2''2$
3)	$-9\cdot7$	$-6\cdot2$

Der Umstand, dass die Bahn des Kometen sich so als eine Hyperbel mit einer ziemlich grossen Excentricität erweist, sowie ferner, dass die übrig bleibenden Fehler in den Normalorten auch beträchtlich sind, liessen mich nun dennoch an eine strenge Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate schreiten.

Als Ausgangselemente nahm ich hiebei das obige parabolische System I an, das ich hier mit den entsprechenden, auf den Äquator reducirten Grössen nochmals anführe:

$$T = 1846 \text{ Oct. } 29\cdot819712$$
$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 4°41'45''8 \\ \omega &= 93\ 58\ 44\cdot4 \\ i &= 49\ 42\ 16\cdot7 \end{aligned}\right\} \text{Ekl.} \qquad \left.\begin{aligned} \Omega' &= 3°44'30''7 \\ \omega' &= 95\ 55\ 51\cdot7 \\ i' &= 73\ \ 6\ 10\cdot7 \end{aligned}\right\} \text{Äqu.}$$
$$\log q = 9\cdot919446$$

und welches in den vier Normalorten folgende, nunmehr auszugleichende Fehler zurücklässt:

	1)	2)	3)	4)
$\Delta\alpha\cos\delta =$	$+0''5$	$-4''9$	$-12''1$	$+0''1$
$\Delta\delta =$	$+0\cdot6$	$-7\cdot6$	$-12\cdot3$	$+0\cdot6$

Die Differentialquotienten der Elemente für diese vier Orte sind, nach den von Schönfeld in den Astr. Nachr. gegebenen Formeln gerechnet:

	1 = Sept. 23·3	2 = Oct. 16·0	3 = Oct. 21·3	4 = Oct. 24·0
$\cos\delta\, d\alpha : d\lambda =$	9·65265	9·91469	9·89170	9·87763
$d\delta : d\lambda =$	9·83615	9·13210	9·03201	9·00176
$\cos\delta\, d\alpha : d\nu =$	$9\cdot82769_n$	$9\cdot57652_n$	$9\cdot33450_n$	$9\cdot15198_n$
$d\delta : d\nu =$	$0\cdot01119_n$	$8\cdot79393_n$	$8\cdot47481_n$	$8\cdot27611_n$

	1 = Sept. 23·3	2 = Oct. 16·0	3 = Oct. 21·3	4 = Oct. 24·0
$\cos\delta\, d\alpha : d\varkappa =$	9·76855	$9·20192_n$	$9·23453_n$	$9·25958_n$
$d\delta : d\varkappa =$	$9·41058_n$	$9·60691_n$	$9·60848_n$	$9·61481_n$
$\cos\delta\, \delta\alpha : dq =$	9·26108	$9·55957_n$	$9·52498_n$	$9·49921_n$
$d\delta : dq =$	8·87177	9·76789	9·81721	9·83754
$\cos\delta\, d\alpha : dT =$	$8·35709_n$	7·49826	7·66698	7·70726
$d\delta : dT =$	8·11608	8·23650	8·19641	8·17811
$\cos\delta\, d\alpha : \left(\frac{de}{2}\right) =$	$9·74633_n$	7·95846	8·18315	8·10620
$d\delta : \left(\frac{de}{2}\right) =$	9·55947	9·18114	8·89817	8·69395

Um die Coëfficienten der aus diesen Grössen zu bildenden Bedingungsgleichungen möglichst homogen zu machen, führte ich die Substitutionen

$$x = (9·91469)\, d\lambda \quad \text{Coëff. logarithmisch}$$
$$y = (0·01119)\, d\nu$$
$$z = (9·76855)\, d\varkappa$$
$$u = (9·83754)\, dq$$
$$v = (8·35709)\, dT$$
$$w = (9·74633)\, \frac{de}{2}$$

log Fehlereinheit = 1·08911

ein. Es ergaben sich derart die Bedingungsgleichungen:

für die Rectascensionen:

	x	y	z	u	v	w	
1)	$+0·5469x$	$-0·6544y$	$+1·0000z$	$+0·2652u$	$-1·0000v$	$-1·0000w$	$= +0·0407$
2)	+1·0000	−0·3676	−0·2712	−0·5273	+0·1384	+0·0163	= −0·3984
3)	+0·9484	−0·2105	−0·2924	−0·4869	+0·2041	+0·0273	= −0·9837
4)	+0·9192	−0·1383	−0·3098	−0·4588	+0·2240	+0·0228	= +0·0081

für die Declinationen:

	x	y	z	u	v	w	
1)	$+0·8346x$	$-1·0000y$	$-0·4386z$	$+0·1082u$	$+0·5741v$	$+0·6503w$	$= +0·0488$
2)	+0·1650	−0·0606	−0·6892	+0·8518	+0·7569	+0·2721	= −0·6179
3)	+0·1310	−0·0291	−0·6917	+0·9543	+0·6908	+0·1419	= −1·0000
4)	+0·1222	−0·0184	−0·7019	+1·0000	+0·6602	+0·0886	= +0·0488

aus denselben die Normalgleichungen:

x	y	z	u	v	w	
$+3·7976x$	$-1·9034y$	$-0·9421z$	$-0·7874u$	$+0·7662v$	$+0·1333w$	$= -1·4879$
−1·9034	+1·6328	+0·0621	−0·0201	−0·1217	−0·0363	= +0·3427
−0·9421	+0·0621	+2·8935	−1·3039	−2·8832	−1·6525	= +1·4957
−0·7874	−0·0201	−1·3039	+3·4438	+1·4885	+0·2287	= −0·7304
+0·7662	−0·1217	−2·8832	+1·4885	+2·9303	+1·7507	= −1·3933
+0·1333	−0·0363	−1·6525	+0·2287	+1·7507	+1·5265	= −0·3479

Die Auflösung dieser Gleichungen, respective die Bildung der Eliminationsgleichungen aus ihnen, führte ich nur bis zu der Unbekannten w durch, da schon der Coëfficient der Unbekannten v sich als sehr klein ergab. Ich erhielt so:

$$\begin{array}{rrrrrrl}
+3\cdot797600\,x & -1\cdot903400\,y & -0\cdot942100\,z & -0\cdot787400\,u & +0\cdot766200\,v & +0\cdot133300\,w & =-1\cdot487900 \\
 & +0\cdot678794 & -0\cdot410091 & -0\cdot414754 & +0\cdot262328 & +0\cdot030511 & =-0\cdot403053 \\
 & & +2\cdot412031 & -1\cdot749808 & -2\cdot534638 & -1\cdot600998 & =+0\cdot883082 \\
 & & & +1\cdot757722 & -0\cdot031090 & -0\cdot886459 & =-0\cdot644536 \\
 & & & & +0\cdot010305 & +0\cdot013959 & =-0\cdot020768
\end{array}$$

und daraus die Unbekannten $x\ y\ z\ u\ v\ldots$ als Functionen von w

$$\left.\begin{array}{l}
x = 0\cdot08807_n + 9\cdot69743\,.\,w \\
y = 0\cdot11239_n + 9\cdot71902 \\
z = 0\cdot31038_n + 9\cdot61406_n \\
u = 9\cdot60459_n + 9\cdot68157 \\
v = 0\cdot30435_n + 0\cdot13181_n
\end{array}\right\}\ \text{Coëff. logarithmisch}$$

woraus durch Multiplication mit der Fehlereinheit und durch Division durch die Substitutionscoëfficienten als Correctionen der Elemente

$$d\lambda = -18''33 + 69''74\,.\,10^3\,\frac{de}{2}$$

$$d\nu = -15\cdot53 + 58\cdot69\,.\,10^3\,\frac{de}{2}$$

$$d\varkappa = -42\cdot83 - 80\cdot58\,.\,10^3\,\frac{de}{2}$$

$$dq = -0\cdot0000349 + 0\cdot0003897\,.\,10^3\,\frac{de}{2}$$

$$dT = -0\cdot0052814 - 0\cdot033193\,.\,10^3\,\frac{de}{2}$$

folgen. Die drei ersten geben ausserdem:

$$di = -17''2 + 65''50.10^3 \frac{de}{2} \qquad di' = -16''6 + 63''30.10^3 \frac{de}{2}$$

$$d\Omega = -22\cdot0 + 83\cdot11.10^3 \frac{de}{2} \qquad d\Omega' = -18\cdot1 + 68\cdot54.10^3 \frac{de}{2}$$

$$d\omega = -28\cdot6 - 134\cdot34.10^3 \frac{de}{2} \qquad d\omega' = -37\cdot6 - 100\cdot51.10^3 \frac{de}{2}$$

Für $de = 0$ erhält man zunächst die wahrscheinlichste Parabel, und zwar:

$$T = 1846 \text{ Oct. } 29\cdot814431$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= \ \ 4°41'23''8 \\ \omega &= 93\ \ 58\ \ 15\cdot8 \\ i &= 49\ \ 41\ \ 59\cdot5 \end{aligned}\right\} \text{Ekl.} \qquad \left.\begin{aligned} \Omega' &= \ \ 3°44'12''6 \\ \omega' &= 95\ \ 55\ \ 14\cdot1 \\ i' &= 73\ \ \ 5\ \ 54\cdot1 \end{aligned}\right\} \text{Äqu. } 1846\cdot0$$

$$\log q = 9\cdot919428$$

Durch dieselbe wird die Fehlerquadratsumme von 380·85 auf 165·03 herabgedrückt, während die in den einzelnen Normalorten übrigbleibenden Fehler, wie sie durch Substitutionen der gefundenen Correctionen der Elemente in die Bedingungsgleichungen sich ergeben, sind:

	1)	2)	3)	4)
$\Delta\alpha \cos\delta =$	$+1''0$	$-1''7$	$-5''9$	$+7''2$
$\Delta\delta =$	$+1\cdot0$	$+0\cdot4$	$-6\cdot3$	$+5\cdot9$

deren Fehlerquadratsumme 166·20 beträgt und mit dem eben angeführten theoretischen Werthe 165·03 gut harmonirt. Die directe Rechnung mit den obigen Elementen lässt in ebensolch' guter Übereinstimmung finden:

	1)	2)	3)	4)
$\Delta\alpha \cos\delta =$	$+0''2$	$-2''1$	$-6''4$	$+6''7$
$\Delta\delta =$	$+0\cdot6$	$-1\cdot2$	$-7\cdot0$	$+6\cdot0$

wodurch bekanntlich der grösste Theil der bisherigen Rechnungen ausreichend geprüft erscheint.

Die Substitution der Werthe für x, y, z, u und v als Functionen von w in die Bedingungsgleichungen lieferte schliesslich noch zur Bestimmung der Excentricität e die Gleichungen:

$$\text{für } \alpha \begin{cases} +0\cdot000061\left(\frac{de}{2}\right) = +1''0 \\ -0\cdot003997 \qquad -1\cdot7 \\ -0\cdot000285 \qquad -5\cdot9 \\ +0\cdot006365 \qquad +7\cdot2 \end{cases}$$

$$\text{für } \delta \begin{cases} -0\cdot001586 \qquad +1\,0 \\ -0\cdot006023 \qquad -0\cdot4 \\ -0\cdot000530 \qquad -6\cdot3 \\ +0\cdot006521 \qquad +5\cdot9 \end{cases}$$

und man sieht, dass aus diesen Gleichungen eine sichere Bestimmung der Excentricität wohl nicht möglich ist, indem die meisten Coëfficienten derselben sehr klein sind und weit innerhalb der Unsicherheit der logarithmischen Rechnung liegen.

Dieselben zeigen nur, inwieweit die einzelnen Orte durch eine bestimmte Annahme über die Excentricität beeinflusst werden, und zwar hat man

	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
Normalort 1)	$+1''0-0''013.10^3.\frac{de}{2}$	$+1''0+0''326.10^3.\frac{de}{2}$
2)	$-1\cdot7+0\cdot824$	$-0\cdot4+1\cdot263$
3)	$-5\cdot9+0\cdot059$	$-6\cdot3+0\cdot109$
4)	$+7\cdot2-1\cdot313$	$+5\cdot9-0\cdot134$

Aus diesem Tableau ist ersichtlich, dass wohl im Allgemeinen durch einen positiven Werth von *de* die Fehler verringert werden, insbesondere in dem vierten Orte, dass daher, wenn die Bahn des Kometen als von einer Parabel abweichend zu denken ist, diese Abweichung jedenfalls mehr gegen die Seite der Hyperbel als die der Ellipse hinneigt. Bei der geringen Zahl der Beobachtungen aber, aus denen jeder einzelne Normalort besteht, bei dem Umstande ferner, als diese Beobachtungen vielleicht wegen der verschwommenen Gestalt des Kometen, die die Beobachtung erschwerte, nicht gerade als die besten zu bezeichnen sind und durch geringfügige Variationen derselben, wie etwa eine verschiedene Gewichtsvertheilung, sich leicht Änderungen der Normalorte bis zum Betrage von 3″ bis 4″ vornehmen liessen, möchte ich dennoch auf dieses Resultat nur wenig Gewicht legen und die obige Parabel als die aus dem geringen Beobachtungsmaterial zu erzielende beste Bahn betrachten.

Nur um die Lösung des vorliegenden Problems auch in diesem Sinne vollständig abzuschliessen, habe ich die obigen

Bedingungsgleichungen in Bezug auf e, trotz der grossen Unbestimmtheit der Coëfficienten derselben, auch noch, wie üblich, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt und erhielt so als den wahrscheinlichsten Werth der Excentricität

$$\log \frac{de}{2} = 7\cdot53113 \qquad e = 1\cdot0067945.$$

Daraus folgt die Hyperbel:

$$T = 1846 \text{ Oct. } 29\cdot807907 \text{ mittl. Berl. Zeit}$$

$$\left.\begin{aligned} \Omega &= 4°46'\ 6''2 \\ \omega &= 93\ 50\ 39\cdot4 \\ i &= 49\ 45\ 42\cdot0 \end{aligned}\right\} \text{Ekl.} \qquad \left.\begin{aligned} \Omega' &= 3°48'\ 5''4 \\ \omega' &= 95\ 49\ 32\cdot7 \\ i' &= 73\ \ 9\ 29\cdot1 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}\text{Äquat. u.} \\ \text{Äqu. } 1846\cdot0\end{matrix}$$

$$\log q = 9\cdot920119$$
$$\log e = 0\cdot002941$$
$$\log (e-1) = 7\cdot83216$$

Die Darstellung der Normalorte durch diese Hyperbel ist

	1)	2)	3)	4)
	1846 Sept. 23·38...	Oct. 16·0	Oct. 21·3	Oct. 24·0
$\Delta\alpha \cos\delta =$	$+1''0$	$+1''1$	$-5''7$	$+2''7$
$\Delta\delta =$	$+2\cdot1$	$+3\cdot9$	$-5\cdot9$	$+1\cdot3$

Wenn auch die Fehlerquadratsumme durch diese von 166·2 der wahrscheinlichsten Parabel auf 98·1 herabgedrückt wird, so ist doch, wie schon erwähnt, auf diesen Umstand wenig Gewicht zu legen, da in der That nur der vierte Ort wesentlich verbessert, die ersten zwei dagegen vielmehr mehr oder weniger schlechter dargestellt werden.



Beobachtungen, betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge

von

J. Elster und H. Geitel,
Oberlehrern am herzoglichen Gymnasium in Wolfenbüttel.

(Mit 3 Tafeln.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. Mai 1890.)

Einleitung.

In einer früheren Veröffentlichung[1] haben wir eine Vorrichtung beschrieben, welche es ermöglichen soll, das Vorzeichen der Elektricität atmosphärischer Niederschläge zu bestimmen. Einige Beobachtungsreihen, die mit dem Apparate erhalten waren, theilten wir schon damals mit. Nachdem nun innerhalb eines Zeitraumes von zwei Jahren das Material erheblich gewachsen und der Apparat, wie wir glauben, in mehrfacher Beziehung vervollkommnet ist, möchten wir im Folgenden aus den seither gewonnenen Resultaten diejenigen zusammenstellen, die uns am zuverlässigsten erscheinen.

Zuvor jedoch sei es uns verstattet, unsere Bestrebungen, ein wegen seiner grossen Schwierigkeiten noch wenig bearbeitetes Gebiet meteorologischer Beobachtung in Angriff zu nehmen, unter Darlegung dieser Schwierigkeiten, sowie unseres Zieles und unserer Methoden soweit zu rechtfertigen, dass sie nicht von vorneherein als vergebliche erscheinen möchten.

Dass die Kenntniss der elektrischen Natur der atmosphärischen Niederschläge für die richtige Auffassung der elektrischen Vorgänge in der Atmosphäre von hoher Bedeutung sein

---

[1] J. Elster und H. Geitel, Über eine Methode, die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge zu bestimmen. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. V, S. 95, 1888.

würde, dürfte allgemein zugestanden werden.[1] Hiebei ist nicht etwa vorzugsweise an die eigentlichen Gewittererscheinungen zu denken; eine jede Theorie der atmosphärischen Elektricität bedarf zur Erklärung der Schwankungen des Potentialgefälles an der Erdoberfläche eines in der Luft vorhandenen Trägers veränderlicher Elektricitätsmengen, welche bei Condensation des Wasserdampfes durch die Niederschläge zur Erde herabgeführt werden und somit in den Bereich unserer Messapparate gelangen. Das niedrigste Ziel, das der Beobachter sich setzen kann, würde in der blossen Zeichenbestimmung der Elektricität der Niederschläge bestehen, das heisst in der Entscheidung der Frage, ob und in welchem Sinne die letzteren eine elektrische Potentialdifferenz gegen den Erdkörper zeigen. Solche Beobachtungen gewinnen an Werth, wenn sie mit gleichzeitiger Zeichenbestimmung (besser noch Messung) des atmosphärischen Potentialgefälles verbunden sind; man wird auf diesem Wege den Vorgängen näher treten können, welche in unserer Atmosphäre eine Scheidung der Elektricitäten bewirken. Hiedurch würde im Hinblick auf einige Theorien der atmosphärischen Elektricität schon viel erreicht sein. Doch ist selbst bei dieser Beschränkung, die auch wir uns auferlegt haben, eine zuverlässige Lösung der Aufgabe mit grossen Schwierigkeiten verknüpft.

Fehlerquellen.

Das naheliegende Verfahren, während des Falles der Niederschläge das Vorzeichen der Luftelektricität zu bestimmen und dasselbe für das der Elektricität der Niederschläge auszugeben, trägt, wie von verschiedenen Seiten hervorgehoben und erst kürzlich von Linss[2] in überzeugender Weise nachgewiesen wurde, keinerlei Berechtigung in sich. Man erhält durch diese Methode nichts als die Resultante einer Reihe elektrischer Influenzwirkungen, ausgehend von dem normalen Potentialgefälle der atmosphärischen Elektricität, der elektrischen Ladung der Wolken und schliesslich des Niederschlages selbst. Welche Ein-

[1] U. A. von Kollert, Über atmosphärische Elektricität. Elektrotechn. Zeitschrift. Bd. 10, 437, 1889.

[2] Linss, Über einige die Wolken- und Luftelektricität betreffende Probleme. Meteorolog. Zeitschrift, Bd. 4, S. 345, 1887.

wirkung in Bezug auf das Vorzeichen die massgebende sein wird, ist von vorneherein nicht festzustellen.

Es bleibt daher nichts anderes übrig, als die Niederschläge in elektrischer Beziehung von den übrigen genannten Factoren zu trennen. Man könnte vorschlagen, dieselben in frei aufgestellten, isolirten, leitenden Gefässen aufzufangen und die letzteren in metallische Verbindung mit einem Elektroskope zu setzen. Aber hiedurch ist eine Sonderung keineswegs erreicht. Gesetzt auch, die Niederschläge liessen sich, ohne zum Theil verspritzt zu werden, in dem Auffanggefäss sammeln, so wird doch die Inconstanz des elektrischen Feldes, in dem sich dasselbe befindet, jede Beobachtung werthlos machen. Während des Falles der Niederschläge, besonders bei einem Gewitter, wechselt bekanntlich[1] das Potentialgefälle an der Erdoberfläche in unvermittelter Weise in so weiten Grenzen, dass die hiedurch verursachten Elektrisirungen des isolirten Gefässes die zu messenden verdecken müssen. Aber selbst im constanten elektrischen Felde bewirkt das Abspritzen, beziehungsweise Herausspringen von Niederschlagstheilchen aus der Auffangschale, dass sich dieselbe mit gleichnamiger Influenzelektricität ladet. Man wird hiedurch genöthigt, das Auffanggefäss innerhalb einer leitenden, mit der Erde verbundenen, oben offenen Umhüllung aufzustellen, die, wenn die Ablesung des Elektrometers erfolgen soll, allseitig geschlossen werden muss. Aber gerade durch diese unumgänglich nothwendige Vorrichtung wird eine neue Fehlerquelle geschaffen. Zerspritzt ein Tropfen an einem Leiter in der Nähe des Auffangegefässes, in diesem Falle an dem Rande der Schutzhülle, so dass reflectirte Wassertröpfchen in dasselbe gelangen können, so nimmt dieses eine elektrische Ladung an, deren Zeichen dem des herrschenden Potentialgefälles entgegengesetzt ist, und die ihren Ursprung der Influenz des letzteren verdankt. Diese Fehlerquelle ist indessen einer Art von Überwachung dadurch zugänglich, dass man, wie wir schon oben als wünschenswerth hinstellten, neben dem elektrischen Vorzeichen der Niederschläge auch das des atmosphärischen Potentialgefälles bestimmt.

---

[1] Neuerdings auch bestätigt durch die Beobachtungen von L. Weber. Elektrotechnische Zeitschrift, X, S. 571, 1889.

Bei Übereinstimmung der Vorzeichen kann eine Fälschung des Resultates auf die bezeichnete Weise nicht stattgefunden haben. Doch ist es auf jeden Fall rathsam, einerseits die Influenz des äusseren Potentialgefälles auf den Rand der Schutzhülle möglichst einzuschränken, anderseits den verspritzten Niederschlagstheilchen den Weg zur Auffangschale nach Möglichkeit zu verlegen.

Von verschiedenen Seiten ist auch die etwaige Elektrisirung der Auffangschale durch Reibung an den Niederschlagstheilchen hervorgehoben worden. Wir müssen gestehen, dass wir diese Fehlerquelle nur als untergeordneter Art betrachten, vorausgesetzt, dass man bei Windstille beobachtet. Besonders bei Bestimmungen des Vorzeichens der Elektricität des Regens scheint sie uns ungefährlich zu sein. Eine Elektricitätserregung durch Reibung von Wasser an benetzbaren Oberflächen ist nämlich, wenn überhaupt vorhanden, doch nur so schwach, dass sie gegenüber den thatsächlich beobachteten Spannungen ausser Betracht fällt.[1]

Schnee sinkt aber bei ruhigem Wetter so langsam in die Schale hinab, dass eine Bewegung der Flocken nach ihrer Berührung mit der Oberfläche derselben so gut wie ausgeschlossen ist.

Nach Besprechung der Fehlerquellen, die man bei Bestimmung des elektrischen Vorzeichens der atmosphärischen Niederschläge zu vermeiden hat, wenden wir uns nun zu der Einrichtung, die wir jetzt zu unseren Beobachtungen benutzen. Sie ist aus der in unserer ersten Publication beschriebenen schrittweise hervorgegangen; einige der getroffenen Abänderungen verdanken wir den freundlichen Rathschlägen von Herrn Linss in Darmstadt, wir sprechen ihm auch an dieser Stelle unseren wärmsten Dank aus.

Apparat.

Als Auffanggefäss für die Niederschläge dient eine kreisrunde Zinkschale *A* (Fig. 1) von 23 *cm* Durchmesser mit 3 *cm* hohem

[1] J. Elster u. H. Geitel, Über die Elektricitätserregung bei der Tröpfchenreibung. Wied. Ann., 32, S. 74, 1887.

Rande, welche von einem Mascart'schen Stativ getragen wird. Die eine hygroskopische Substanz (Chlorcalcium) enthaltende Flasche *C* aus Zinkblech wird vermittelst des auf der Glasstange *B* verschiebbaren Korkes *E* geschlossen gehalten, solange der Apparat nicht im Gebrauch ist; vor dem Gebrauch schiebt man den Kork hinauf und isolirt damit die Schale. Die Mündung der Flasche wird in dieser Stellung durch den kleinen umgekehrten Trichter *F* aus Zinkblech vor dem Eindringen der Niederschläge geschützt. Der ganze Apparat steht auf der Ostseite des Hauses, 6 *m* von der Wand desselben entfernt, auf einem Rasenplatze, der nächste Punkt des Daches (einer Veranda angehörig) hat eine Höhe von 5·8 *m* über dem Erdboden und eine Entfernung von 8·2 *m* von der Schale. Bäume, die den Apparat kaum überragen, finden sich erst in einer Entfernung von 10·5 *m*. Von der Auffangschale aus führt ein Leitungsdraht *gg'* durch eine durchbrochene Blechscheibe im Fenster in den im Erdgeschoss gelegenen Beobachtungsraum zu einem Thomson'schen Quadrantelektrometer.

Das Mascart'sche Stativ mit Auffangschale und Leitungsdraht ist vollständig von einem metallischen Gehäuse umhüllt, bestehend aus einem vermittelst spitzer Eisenstäbe im Boden befestigten Cylinder *S* aus Schwarzblech, von 1·28 *m* Höhe, mit 25 *cm* weiter conischer Öffnung und seitlicher Thür *T*, an welchen sich ein Eisenrohr *L* von 12 *cm* Durchmesser anschliesst. (*L* ist in der Figur seitlich gezeichnet, in Wirklichkeit aber nach Hinten verlaufend.) Letzteres ist der Länge nach in zwei Hälften durchschnitten, deren obere durch Abheben entfernt werden kann und umschliesst den Leitungsdraht auf seinem Wege vom Cylinder *S* aus bis eng an die Öffnung der Blechscheibe, durch welche er in das Laboratorium eintritt.

Der Cylinder ist durch einen um eine vertikale Achse *MN* drehbaren Deckel *J* verschlossen, das Öffnen geschieht durch Anziehen einer Schnur vom Beobachtungsraum aus, das Schliessen erfolgt selbstthätig durch eine Feder *O*. Bei geöffnetem Cylinder ist der Deckel soweit zurückgezogen, dass die kürzeste Entfernung zwischen Cylinder- und Deckelrand 25 *cm* beträgt. Die Schale *A* befand sich bei fast allen Beobachtungen 47 *cm* tief unter dem oberen Rande des Cylinders *S* und war durch einen unmittelbar

über ihr eingefügten conischen Einsatz *P*, dessen Öffnung enger ist, als die obere des Schutzcylinders, gegen die Tropfen nach Möglichkeit geschützt, die in verdächtiger Nähe des Schutzcylinders herabfallen. In dieser Lage brachte bei isolirter Schale ein in grosser Nähe (300—400 *m*) vom Apparat niedergehender Blitzstrahl eine kaum merkbare Schwankung der Elektrometernadel hervor. Nur bei sehr spärlichem Niederschlagsfall und schwachen elektrischen Anzeichen wurde der conische Ring entfernt und die Schale höher gerückt.

Schliesslich umgeben den Cylinder *S* vier in den Eckpunkten eines Rechteckes von 1·6 und 1·1 *m* Seitenlängen eingerammte Pfähle *Q*, von 2·5 *m* Höhe, die ein weitmaschiges Geflecht *R* aus verzinktem Eisendraht tragen, das bis etwa zur Höhe des oberen Randes des Cylinders *S* hinabreicht und durch einen Metalldraht mit der Gasleitung in Verbindung steht. Der Deckel *J* wurde durch dasselbe in seiner Bewegung nicht gehemmt.

Die Beobachtung des Zeichens der atmosphärischen Elektricität geschieht an einem Bohnenberger'schen Elektroskop, das mit einer isolirten 1 *m* vom Hause entfernten, grossen Petroleumflamme, die einem kräftigen Regen- oder Schneefalle Widerstand leistet, durch einen Metalldraht verbunden ist. Das Elektroskop steht in demselben Raume, in dem sich das zur Zeichenbestimmung der Niederschläge dienende Quadrantelektrometer befindet.

Handhabung des Apparates.

Die Beobachtungen mittelst des Apparates werden in folgender Weise angestellt:

Zuerst überzeugen wir uns bei geschlossenem Deckel des Schutzcylinders und aufgezogenem Kork des Mascart'schen Stativs, dass die Isolation der Schale eine genügende ist, kleine, vermittelst einer Zamboni'schen Säule mitgetheilte Ladungen müssen eine Minute lang bis auf den Verlust weniger Scalentheile gehalten werden. Stellt sich die Isolation als mangelhaft heraus, so wird sowohl der Cylinder *S*, wie auch das den Leitungsdraht umhüllende Rohr *L* mittelst einer Bürste ausgekehrt: nach diesem Verfahren ist fast immer vollständige Isolation erreicht; dasselbe beseitigt die feinen Spinnenfäden, die, dem Auge häufig

unentdeckbar, eine unerwünschte Verbindung zwischen den zu isolirenden Theilen des Apparates und der Schutzhülle herstellen. Nur bei sehr lange fortgesetzten Beobachtungen bei warmem Regen bemerkten wir zuweilen, dass die Isolationsfähigkeit der Glasstange *B* litt. Wir stellten sie in diesem Falle dadurch wieder her, dass wir die Flasche durch den Kork *E* eine zeitlang geschlossen hielten, während innerhalb des Schutzcylinders *S* eine grosse Gasflamme entzündet wurde. Ist genügende Isolation erreicht, so wird neben dem Apparate die isolirte Petroleumflamme aufgestellt und mit dem zur Erde abgeleiteten Bohnenberger'schen Elektroskop verbunden.

Nach diesen Vorbereitungen können die Beobachtungen beginnen.

Zuerst wird die Erdleitung des Bohnenberger'schen Elektroskopes für einen Augenblick unterbrochen und dadurch das Zeichen der Luftelektricität bestimmt. Dann wird bei geschlossenem Deckel des Schutzcylinders die Erdleitung des Thomson'schen Quadrantelektrometers aufgehoben und dasselbe mit der Auffangschale metallisch verbunden, der Deckel geöffnet und den Niederschlägen der Weg zur Schale freigegeben.

Nach Verlauf von 5 Sekunden bis 2 Minuten (je nach der Intensität des erfolgenden Ausschlages) schliesst einer der Beobachter den Cylinder und der andere nimmt die Ablesungen und Notirungen vor, während der erste sofort das Zeichen der Luftelektricität aufs Neue bestimmt und die zur folgenden Beobachtung nöthigen Umschaltungen macht. Jede Bestimmung der Niederschlagselektricität wird also in zwei Beobachtungen der Luftelektricität eingeschlossen. Das eben geschilderte Verfahren war das gewöhnliche; aus noch zu entwickelnden Gründen wurde zuweilen auch so operirt, dass einer von uns draussen am Apparate den Fall der Niederschläge in die Schale überwachte, und mittelst eines cylindrischen Aufsatzes das Öffnen und Schliessen des Apparates vornahm, während der andere auf ein gegebenes Zeichen die beiden Elektrometer ablas. Es versteht sich von selbst, dass jedes nur dann abgelesen wurde, während das Andere zur Erde abgeleitet war.[1]

[1] Gegen Ende 1889 erhielten wir aus einer Abhandlung von Sir William Thomson (Roy. Institution of Great Britain., S. 277, Mai 1860) Kenntniss

Wir verhehlen uns nicht, dass die geschilderte Einrichtung des Apparates **allein** noch keine **vollkommene** Bürgschaft dafür bietet, dass eine während des Falles von Niederschlägen beobachtete Elektrisirung der Auffangschale thatsächlich von einer ihnen ursprünglich anhaftenden Eigenelektricität herrührt. Vor Allem sind diejenigen Beobachtungen als verdächtig zu bezeichnen, die bei bewegter Luft erhalten sind. Doch auch bei fast windstillem Wetter können vielleicht schwache, seitlich gerichtete Strömungen feine Tröpfchen in die Schale hineinführen, die schon vorher mit leitenden Körpern, etwa den Rändern des Schutzcylinders in Berührung waren, also durch Influenz geladen sind. Hier kann nun einerseits eine unmittelbare Beobachtung der Bahn der fallenden Tropfen, beziehungsweise Flocken, die an sich nicht unberechtigten Bedenken zerstreuen helfen, während anderseits die gewonnenen Resultate durch ihre Eigenartigkeit selbst Zutrauen erwecken müssen.

Besonders beim ruhigen Falle grossflockigen Schnees und bei feinem Sprühregen, dessen Tropfen so langsam heruntersinken, dass sie beim Aufschlagen überhaupt nicht zerspritzen, lässt sich der Eintritt des Niederschlages in das Innere des Schutzcylinders mit dem Auge im Einzelnen verfolgen. Wir haben häufig starke Elektrisirungen der Schale beobachtet, während eine Berührung des Niederschlages mit dem Rande des Schutzcylinders durchaus nicht bemerkt werden konnte. Unsere subjective Meinung ist, dass hier eine Fälschung der Beobachtungen durch abspritzende Theilchen ausser dem Bereiche der Möglichkeit liegt.

Inwiefern aus der Natur der Resultate selbst ein Schluss auf ihre Zuverlässigkeit erlaubt ist, möge nach Mittheilung derselben erörtert werden.

Beobachtungen.

Wir wenden uns nun zur Zusammenstellung der mit dem Apparate erhaltenen Beobachtungen. Aus der Gesammtzahl (610)

---

davon, dass vor vielen Jahren in Kew ein „Elektropluviometer“ versucht sei. Welche Schutzmassregeln zur Ausschliessung der a. a. O. auch von Sir W. **Thomson** hervorgehobenen Fehlerquellen verwandt wurden, ist aus der betreffenden Stelle nicht zu ersehen.

scheiden wir zunächst diejenigen aus, bei denen der Vermerk „Windstille“ fehlt und behandeln Schnee- und Regenfälle getrennt. Einige der längeren Reihen theilen wir vollständig aus dem Beobachtungsjournal mit, um einen Einblick in das Material, wie es uns vorliegt, zu geben, zugleich aber wählen wir für diese und die übrigen aus mehr als circa fünf Einzelbeobachtungen bestehenden Folgen eine Art von graphischer Darstellung. Als Abscisse ist die vom Anfange der Beobachtungsreihe an verflossene Zeit abgetragen, und zwar haben wir den Zeitraum zwischen zwei aufeinander folgenden Ablesungen, der nahezu constant (1—2 Minuten) war, als Einheit (= 1 *mm* in der Zeichnung) gewählt. Die Ordinaten stellen die zu dieser Zeit gemessene und auf eine Beobachtungsdauer von 1 Minute reducirte Ladung des aus Auffangschale, Leitungsdraht und Elektrometer bestehenden Systemes, bezogen auf Volt, dar. Die einzelnen Curven unter sich sind demnach vermittelst der an der Ordinatenaxe beigefügten Zahlen, welche die aufgetragenen Spannungen in Volt angeben, vergleichbar. Das Zeichen ∾ in den Tabellen bedeutet, dass die betreffende Ladung mittelst des Elektrometers nicht mehr zu messen war; in der graphischen Darstellung wurde dafür der äusserste noch messbare Werth gesetzt. Zugleich mit der Ladung der Auffangschale ist auch der wechselnde Gang des atmosphärischen Potentialgefälles wiedergegeben. Da wir aber nur Zeichenbestimmungen, nicht Messungen, vornahmen, so konnten auch nur die Zeichenwechsel veranschaulicht werden. Wir haben dies in der Weise ausgeführt, dass wir über jeder Darstellung einer Reihe von Niederschlagsbeobachtungen die Abscissenaxe noch einmal zeichneten, und als Ordinate das dem absoluten Werthe nach constant angenommene Potentialgefälle dem beobachteten Zeichen entsprechend abtrugen. Wir erhielten so eine gebrochene, abgesehen von den sprungweisen Änderungen der Abscissenaxe parallel laufende Gerade. Überall, wo in vertikal übereinander liegenden Punkten die beiden Curven auf derselben Seite der Abscissenaxe verlaufen, fand Gleichheit, wo sie auf entgegengesetzter Seite liegen, Ungleichheit der Vorzeichen der Elektricität der Niederschläge und des atmosphärischen Potentialgefälles statt.

Kürzere Unterbrechungen in den Beobachtungen, verursacht durch Störungen am Apparat (z. B. Erlöschen der Flamme) oder durch Pausen im Falle der Niederschläge sind durch punktirte Vertikallinien (Pausenstriche) angedeutet.

Alle brauchbaren Beobachtungen, auch die kleineren Reihen, werden dann noch in zwei besonderen Tabellen zusammengestellt; diese enthalten für jede Reihe:

1. Datum und Zeit.
2. Eine Charakteristik des Niederschlages.
3. Anzahl der Einzelbeobachtungen.
4. Angabe, wie oft das Zeichen:
   a) des atmosphärischen Potentialgefälles,
   b) des Niederschlages positiv oder negativ gefunden.
5. Wie oft Übereinstimmung im Zeichen, wie oft nicht, beobachtet wurde.
6. Wie oft die Luftelektricität,
7. wie oft der Niederschlag das Zeichen wechselte, u. zw.:
   a) ohne Zeichenwechsel des ersteren (*u* = unabhängig),
   b) demselben entgegengesetzt (*e* = entgegensetzt),
   c) demselben entsprechend (*c* = correspondirend).
8. Ist die Maximalladung des Apparates in Volt pro 60 Secunden angegeben und schliesslich
9. ist bemerkt, ob unter Anderem die Ladung *O* beobachtet wurde.

A. Schneefälle.

Bei reichlichem Falle grossflockigen Schnees sind die elektrischen Anzeichen sowohl an der als Collector dienenden Flamme, wie auch an dem die Flocken aufnehmenden Apparate häufig sehr stark, ähnlich wie bei Gewitterschauern im Sommer. Ausgedehnte anhaltende Fälle feinen Schnees geben dagegen nur selten unzweideutige Resultate.

Bemerkenswerth ist bei grossflockigem Schnee das zuweilen ruckweise erfolgende Vorrücken der Elektrometernadel, herrührend von den Elektricitätsmengen, die jede auf die Schale auftreffende Flocke dem Instrumente zuführt.

Wir theilen die folgenden beiden Reihen als Beispiele mit:

Erste Reihe.

(Nr. 1 der Tabelle I.)

Dichter windstiller Schneefall am 11. Februar 1888.

Schnee sehr grossflockig.

Empfindlichkeit des Elektrometers 1 Volt = 60 Scalentheilen.

Beginn des Schneefalles $1^h 45'$ p. m.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Schnees	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.
1	+ stark	—500	+	40
2	+ „	—500	+	40
3	— schwach	—500	—	15
4	— stark	—500	—	10
5	— sehr stark	—500	—	10
6	— „	— 87	—	5
7	— „	—365	—	5
8	— „	—200	—	5
9	— „	—111	—	5
10	— „	—360	—	10

Schluss 2 p.

Zweite Reihe.

(Nr. 5 der Tabelle I.)

Ausserordentlich dichter Schneefall bei absoluter Windstille am 3. Februar 1889.

Schnee sehr grossflockig.

Empfindlichkeit des Elektrometers: 1 Volt = 50 Scalentheile.

Beginn des Schneefalles $9^1/_2$ a.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Schnees	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.
1	+	+ 30	+	30
2	+	+ 68	+	30
3	+	+141	+	30
4	+	+ 96	—	30
5	— stark	—512	— stark	30
6	— „	— ∞	— „	30
7	— „	+ ∞	+ sehr stark	30
8	+ sehr stark	+ ∞	+ „	30
9	+ „	+ ∞	+ „	30

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Schnees	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.
10	+ „	+325	+ „	30
11	+ „	+106	+ „	30

Schluss $9^3/_4$ a.

Tabelle I.

Nr.	Jahr	Tag	Stunde	Charakteristik des Niederschlages	Anzahl der Beobachtungen	Luftelektricität +	Luftelektricität —
1	1888	11/II	$1^3/_4$ p.	Dichter, windstiller Schneefall; Schnee sehr grossflockig	10	3 mal	7 mal
2	„	„	$2^1/_4$ p.	Dichter, windstiller Schneefall; Schnee sehr grossflockig	3	1 „	2 „
3	„	10/III	11 a.	Windstill, feiner Schnee . . .	3	3 „	—
4	1889	21/I	—	Ruhiger, windstiller Schneefall	2	1 „	1 „
5	„	3/II	$9^1/_2$ a.	Ausserordentlich dichter Schneefall	11	8 „	3 „
6	„	10/II	$1^3/_4$ p.	Ausgedehnter Schneefall bei absoluter Windstille	21	15 „	6 „
7	„	„	4 p.	Grossflockiger Schnee, windtill	7	1 „	6 „
8	„	26/XI	$4^1/_2$ p.	Grossflockiger Schnee bei abflauendem Winde	9	9 „	—
9	„	8/XII	9 a.	Fast windstiller Schneefall bei aufklärendem Himmel . . .	3	3 „	—

B. Regenfälle.

Wir unterscheiden in Bezug auf das elektrische Verhalten am besten in Landregen, bald vorübergehende Regengüsse und Gewitter. Die elektrische Spannung ist bei den ersteren, wie bei den entsprechenden Schneefällen, meist so schwach, dass unser Apparat nicht ausreicht, sie mit einiger Sicherheit zu erkennen;

Ausserdem vergleiche die graphischen Darstellungen auf Taf. I, Fig. 2 und 3.

Alle bei Windstille gewonnenen Beobachtungen sind in Tabelle I zusammengestellt; Nr. 8 ist wegen der im Anfange herrschenden Luftbewegung nicht ganz einwandsfrei.

Schneefälle.

Niederschlag		Übereinstimmung im Vorzeichen		Zeichenwechsel der Luftelektricität	Zeichenwechsel der Elektricität des Schnees				Maximalladung der Schale in 60" (Volt)		Ladung = 0
+	—	vorhanden	nicht vorhanden		*u*	*e*	*c*	Summe	+	—	
—	10 mal	8 mal	2 mal	1 mal	—	—	—	0	—	74	—
1	2 „	3 „	—	1 „	—	—	1	1	9	19	—
—	3 „	—	3 „	—	—	—	—	0	—	0·5	—
1	1 „	1 „	1 „	2 „	—	—	1	1	0·5	0·2	—
9	2 „	10 „	1 „	2 „	—	—	2	2	24	24	—
3	18 „	4 „	17 „	2 „	2	—	—	2	0·5	4	—
2	5 „	4 „	3 „	2 „	1	—	1	2	1	2	—
7	2 „	7 „	2 „	2 „	3	—	—	3	23	3	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	0	0	3

es liegt dieser Mangel wohl in der grossen Capacität des durch die Tropfen zu ladenden Leitersystems begründet. Sehr gut eignet sich die zweite Categorie zu Beobachtungen; die eigentlichen Gewitter bewirken, wenn sie den Höhepunkt ihrer Thätigkeit erreicht haben, zuweilen so schnell aufeinander folgende Wechsel im Zeichen der Luftelektricität, dass man nicht mit

Sicherheit dasselbe als während der Dauer der Beobachtung constant ansehen kann. Schwächere Gewitter mit nicht zu häufigen Blitzentladungen und langsamer Vorwärtsbewegung sind dagegen der Beobachtung sehr günstig.

Erste Reihe.

(Nr. 19, 20 und 21 der Tabelle II.)

Gewitter aus E. am 23. Juni 1889.

Stundenlang senkrechter Regenfall. Beginn 11 a. m.

Empfindlichkeit des Elektrometers: 1 Volt = 50 Scalentheile.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
1	—	—155	—	15	Platzregen
2	—	— 64	—	15	"
3	—	— 85	—	15	"
4	—	—245	—	15	"
5	—	—220	—	15	"
6	—	—210	—	15	"
7	—	—198	—	15	Platzregen lässt nach
8	—	—215	—	15	Kräftiger Regen
9	—	—325	—	20	"
10	—	—235	—	15	"

Kurze Unterbrechung der Beobachtung.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
1	— stark	—318	— stark	15	"
2	—	—128	—	30	"
3	—	—318	—	15	"
4	—	—358	—	15	"
5	—	—388	—	15	"
6	—	— ∞	—	15	"
7	—	—308	—	15	"

Kurze Unterbrechung der Beobachtung; Prüfung der Isolation der Schale. Dieselbe ist immer noch vorzüglich.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
1	—	—211	—	15	Lebhafter Regen
2	—	—418	—	15	"
3	—	—223	—	15	"
4	—	—307	—	15	"

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
5	—	—154	+	15	Lebhafter Regen
6	+	—182	—	15	"
7	—	—140	—	15	"
8	+	— 58	+	15	Sprühregen
9	+	— 77	+	15	"

Die Isolation erweist sich als vorzüglich.

Bei vorstehender Reihe findet fast durchgehends Übereinstimmung im Vorzeichen statt. Die zum Schluss auftretenden Zeichenwechsel der Luftelektricität beeinflussen das Zeichen der Elektricität des Niederschlages nicht.

Zweite Reihe.

(Nr. 25 und 26 der Tabelle II.)

Beobachtung am gleichen Tage wie Reihe I.

Seit 11 a. hat es fast ununterbrochen geregnet; Beginn der Beobachtung 1 p.

Empfindlichkeit des Elektrometers: 1 Volt = 50 Scalentheile.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
1	+	—360	+	5	Heftigster Platzregen aus N.
2	+	—210	+	5	
3	+	+ 50	+	5	
4	+	+ 20	—	5	
Kurze Pause, der Regen lässt etwas nach.					
1	—	+160	—	15	Kräftiger Regen
2	—	+145	—	15	"
3	—	+190	—	15	"
4	—	+ 15	—	15	"
5	—	+110	—	15	"
6	—	+286	—	51	"
7	—	+ 75	—	15	"
8	—	+ 23	—	15	"
9	—	+ 53	—	15	"
10	—	+120	—	15	Schwacher Regen
11	—	+ 92	—	15	"
12	—	+ 22	—	15	"
13	—	+ 2	—	15	Hat aufgehört

Obwohl der Apparat seit 11 a. fast in ununterbrochener Thätigkeit, hat die Isolation des Systems durchaus nicht gelitten.

Bei obenstehender Reihe findet sich Übereinstimmung im Vorzeichen nur einmal. Luftelektricität und die Elektricität des Niederschlages wechseln ihr Vorzeichen fast gleichzeitig.

Dritte Reihe.

(Nr. 29 der Tabelle II.)

Spärlicher Sprühregen aus dem Rande eines Gewitters im E. Häufig entfernter Donner. Datum: 29. Juni 1889. $4^3/_4$ p.

Empfindlichkeit des Elektrometers: 1 Volt = 50 Scalentheile.

Nr.	Luftelektricität	Elektricität des Regens	Luftelektricität	Dauer der Beobachtung in Sek.	Regenfall
1	+	+101	+	15	Spärl., feiner Regen
2	+	+130	+	15	„
3	+	+128	+	15	„
4	+	+128	—	15	„
5	— stark	+106	— stark	15	„
6	— „	+153	— „	15	„
7	— „	+170	— „	15	„
8	— „	+175	— „	15	„
9	— „	+121	— „	15	„
10	—	+ 42	—	15	„
11	—	+ 15	—	15	„
12	—	—154	—	15	„
13	—	—100	—	15	„
14	—	— 35	— schwächer	15	„
15	— schwach	— 55	—	15	„
16	—	— 56	— schwächer	15	„
17	—	— 42	—	15	„
18	—	— 55	+	15	„
19	+	—115	+	15	„
20	+	—109	+	15	„
21	+	— 62	+	15	Regen wird
22	+	— 4	+	15	schwächer und
23	+	— 2	+	30	schwächer;
24	+	0	+	30	Hat aufgehört
25	+	0	+	60	„

Isolation vorzüglich.

Hier ist Übereinstimmung im Vorzeichen theils vorhanden, theils nicht. Der Zeichenwechsel der Luftelektricität eilt dem des Niederschlages bedeutend voran.

Zu den in extenso mitgetheilten Regenfällen vergleiche die graphischen Darstellungen Taf. II, Fig. 15 und Taf. III, Fig. 14, von den durch 11 a. und 1 p. gekennzeichneten Pausenstrichen ab.

Tabelle II folgt auf Seite 438.

Discussion der Resultate.

Im Folgenden sehen wir die gefundenen Resultate zunächst als zuverlässig an und legen bei der Discussion derselben neben den Tabellen I und II hauptsächlich die graphischen Darstellungen zu Grunde.

Wir entnehmen daraus, dass die Elektricität der Niederschläge kein constantes Vorzeichen hat. Positive Ladungen treten bei Regenfällen nach Anzahl und Intensität zurück, während sie sich bei starken Schneefällen mehr geltend machen. Im Allgemeinen ist die Elektricität der Niederschläge in Bezug auf Zeichenwechsel von grösserer Trägheit, als das atmosphärische Potentialgefälle; Zeichenwechsel des letzteren gehen oft spurlos an der ersteren vorüber. (Vergl. Taf. III, Fig. 13 a.)

Bei dichten Schneefällen macht die Niederschlagselektricität die Wechsel der atmosphärischen Elektricität meist in gleichem Sinne mit (Vergl. Taf. I, Fig. 2 u. 3), bei Regenfällen ist Vorzeichenwechsel im entgegengesetzten Sinne die häufigere Erscheinung. Überhaupt tritt bei Regenfällen die Neigung der Niederschlagselektricität hervor, im Zeichen dem der atmosphärischen Elektricität entgegengesetzt zu sein, doch kommen auch längere Reihen von Übereinstimmung vor. (Vergl. z. B. Taf. III, Fig. 13 a vom Pausenstrich $5^1/_4$ bis $5^1/_2$ p. sowie Fig. 14 von 11 bis $11^1/_2$ a.)

Wenngleich meist bei Platzregen starke Elektrisirungen notirt wurden, so können doch auch spärliche Regenfälle, wie die Sprühregen aus dem Rande eines Gewitters, sehr hohe Spannungen zeigen. (Vergl. Taf. III, Fig. 13 a gegen Schluss.) Berücksichtigt man die weit geringere Oberfläche der im letzteren Falle in die Schale gelangten Tropfen, so wird man dazu genöthigt, auf diesen feinen Tröpfchen Elektricität von grosser Dichtigkeit anzunehmen.

Tabelle II.

Nr.	Jahr	Tag	Stunde	Charakteristik des Niederschlages	Anzahl der Beobachtungen	Luftelektricität +	Luftelektricität —
1	1888	1/V	2 p.	Grosstropfiger Regen: windstill; gewitterschwül	4	2 mal	2 mal
2	„	9/VI	6 p.	Fernes Gewitter; kräftiger Regenfall	18	8 „	10 „
3	„	15/VI	$3^1/_2$ p.	Fernes Gewitter; nur Sprühregen	24	8 „	16 „
4	„	21/VI	—	Warmer, starker Regen . . .	7	3 „	4 „
5	„	22/VIII	1 p.	„ „ „ . . .	16	4 „	12 „
6	„	„	$1^1/_2$ p.	„ „ „ . . .	8	4 „	4 „
7	„	„	$2^1/_2$ p.	„ „ „ . . .	11	8 „	3 „
8	1889	11/V	4 p.	Warmer, gewittriger Regen. Nur Anfangs etwas Wind, dann ganz senkrechter Regenfall	15	9 „	6 „
9	„	14/V	$2^1/_2$ p.	Gewitter aus S. Stundenlanger senkrechter Regenfall; schwacher Regen	14	4 „	10 „
10	„	„	3 p.	Platzregen	9	2 „	7 „
11	„	„	$3^1/_4$ p.	Schwacher Regen	5	2 „	3 „
12	„	„	4 p.	Lebhafter Regen	16	13 „	3 „
13	„	„	5 p.	„ „	8	7 „	1 „
14	„	„	$5^1/_4$ p.	„ „	25	9 „	16 „
15	„	„	$5^1/_2$ p.	Ziemlich spärlicher Regen . .	18	4 „	14 „
16	„	„	$5^3/_4$ p.	Gewitterrand	10	6 „	4 „
17	„	„	$6^1/_4$ p.	Gewittriger Regen aus E. . .	8	7 „	1 „
18	„	23/VI	$10^3/_4$ a.	Gewitter aus E. Stundenlanger, senkrechter Regenfall; anfangs mässig stark	9	2 „	7 „
19	„	„	11 a.	Platzregen	10	—	10 „
20	„	„	$11^1/_6$ a.	„	7	—	7 „
21	„	„	$11^1/_3$ a.	Schwächer, zuletzt nur Sprühregen	9	3 „	6 „

Regenfälle.

Elektricität des Niederschlages		Übereinstimmung im Vorzeichen		Zeichenwechsel der Luftelektricität	Zeichenwechsel des Niederschlages				Maximalladung pro 60" (Volt)		Ladung = 0
+	—	vorhanden	nicht vorhanden		*u*	*e*	*c*	Summe	+	—	
4mal	—	2mal	2mal	3mal	—	—	—	0	0·3	—	—
5 „	11mal	3 „	13 „	7 „	—	2	—	2	31	44	2
15 „	9 „	1 „	23 „	4 „	1	1	—	2	14	6	—
4 „	3 „	—	7 „	1 „	—	1	—	1	20	20	—
13 „	3 „	3 „	13 „	2 „	4	2	—	6	20	0·4	—
8 „	—	4 „	4 „	1 „	—	—	—	0	3	—	—
1 „	10 „	2 „	9 „	3 „	1	—	—	1	1	1	—
11 „	4 „	4 „	11 „	5 „	2	3	—	5	14	1	—
3 „	11 „	4 „	10 „	14 „	1	—	2	3	3	11	—
4 „	5 „	2 „	7 „	6 „	—	—	1	1	11	70	—
3 „	2 „	1 „	4 „	3 „	2	1	—	3	15	5	—
4 „	12 „	1 „	15 „	1 „	1	—	—	1	12	70	—
—	8 „	—	8 „	4 „	—	—	—	0	—	46	—
—	25 „	15 „	10 „	4 „	—	—	—	0	—	42	—
4 „	14 „	10 „	8 „	2 „	6	—	—	6	7	61	—
3 „	7 „	1 „	9 „	1 „	1	—	—	1	12	75	—
5 „	3 „	4 „	4 „	1 „	1	—	—	1	8	9	—
3 „	6 „	3 „	6 „	7 „	—	—	3	3	5	3	—
—	10 „	10 „	—	—	—	—	—	0	—	10	—
—	7 „	7 „	—	—	—	—	—	0	—	40	—
—	9 „	4 „	5 „	3 „	—	—	—	0	—	17	—

Nr.	Jahr	Tag	Stunde	Charakteristik des Niederschlages	Anzahl der Beobachtungen	Luftelektricität	
						+	—
22	1889	23/VI	$11^1/_2$ a.	Regen beginnt von Neuem .	9	7mal	2mal
23	"	"	$11^3/_4$ a.	Die elektrische Thätigkeit frischt auf; Regen Anfangs lebhaft, dann Aufhellung	12	5 "	7 "
24	"	"	12 a.		20	10 "	10 "
25	"	"	1 p.	Platzregen aus N.	4	4 "	—
26	"	"	$1^1/_4$ p.	Starker Regen	13	—	13 "
27	"	"	$1^1/_2$ p.	Feiner, dichter Regen . . .	19	10 "	9 "
28	"	"	2 p.	Anfangs lebhafter Regenfall zuletzt schwächer. Die elektrische Thätigkeit ist erloschen	3	2 "	1 "
29	"	"	5 p.	Spärlicher Sprühregen aus dem Rande eines Gewitters in E.	23	10 "	13 "

In ausgedehntem Schnee- und Regenfällen scheint die elektrische Thätigkeit sehr schwach zu sein. (Vergl. die Nummern 3 und 6 der Tab. I und 6, 7 der Tab. II.)

Wie schon angedeutet, scheint uns in der Natur der erhaltenen Resultate eine gewisse Beweiskraft dafür zu liegen, dass sie im Wesentlichen verlässlich sind. Eine Übereinstimmung des Zeichens der Niederschlags- und atmosphärischen Elektricität, wie sie z. B. bei sehr dichtem, ruhigem Schneefall eintritt, kann überhaupt nicht durch Influenzwirkungen des atmosphärischen Potentialgefälles auf von der Schutzhülle reflectirte Theilchen bewirkt sein, vielmehr ist durch dieselbe der Nachweis als erbracht anzusehen, dass das letztere im Zeichen durch die elektrische Ladung des die Luft dicht erfüllenden Schnees bestimmt war. Aber auch bei Regenfällen stellt sich kein constanter Gegensatz zwischen dem Zeichen der Luftelektricität und der Ladung der Niederschläge heraus. Soviel lässt sich daher auch bei Anwendung schärfster Kritik behaupten, dass überall, wo Luftpotential und Niederschlag gleiche Elektricität zeigen, der letztere

Elektricität des Niederschlages		Übereinstimmung im Vorzeichen		Zeichenwechsel der Luftelektricität	Zeichenwechsel des Niederschlages				Maximalladung pro 60' (Volt)		Ladung = 0
+	—	vorhanden	nicht vorhanden		*u*	*e*	*c*	Summe	+	—	
—	9 mal	1 mal	8 mal	1 mal	—	—	—	0	—	16	—
8 mal	4 „	8 „	4 „	1 „	1	—	—	1	7	7	—
11 „	8 „	—	19 „	2 „	1	—	—	1	7	12	1
2 „	2 „	1 „	3 „	—	1	—	—	1	7	86	—
13 „	—	—	13 „	—	—	—	—	0	11	—	—
11 „	8 „	2 „	17 „	4 „	1	—	4	5	6	4	—
-	—	—	—	1 „	—	—	—	0	0	0	3
11 „	12 „	9 „	14 „	2 „	1	—	—	1	14	12	—

vor Eintritt in den Apparat schon gleichnamig elektrisch gewesen sein muss. Dann aber wäre es jedenfalls gewagt, die Fälle von Zeichenungleichheit allein auf Störungen durch abspritzende Tropfen zurückzuführen. In der vielfach auftretenden Unabhängigkeit des Zeichens der Niederschlagselektricität von dem des Luftpotentials erblicken wir, wie wir auch in unserer ersten Mittheilung hervorhoben, einen Beleg dafür, dass unsere Resultate ihrem wesentlichen Inhalte nach nicht durch Fehlerquellen beeinflusst sind.

Der im Ganzen negative Charakter der Regenfälle stimmt gut mit denjenigen Theorien der atmosphärischen Elektricität überein, welche, wie die von Exner und Arrhenius, ein Entweichen negativer Elektricität von der Erdoberfläche in die Atmosphäre annehmen und aus dieser Voraussetzung die Schwankungen des atmosphärischen Potentialgefälles ableiten; Regenfälle müssen negative Elektricität wieder zur Erde zurückführen.

Im Allgemeinen stehen unsere Beobachtungen in Übereinstimmung mit den von Linss[1] aufgestellten Sätzen über den Wechsel des Potentialgefälles an der Erdoberfläche unter zwei entgegengesetzt elektrisirten Schichten. Hiernach kann der von uns häufig gefundene Zeichengegensatz von Luftpotential und Niederschlagselektricität, sofern man überhaupt in der die Niederschläge entsendenden Wolke eine Scheidung der Elektricitäten annimmt, in keiner Weise überraschen.

Wenn in der That hohe positive Elektrisirungen vorzugsweise bei Schnee, hohe negative aber bei Regen vorherrschen, so ist zu erwarten, dass Regenfälle im Allgemeinen das normale positive atmosphärische Potentialgefälle erniedrigen werden, Schneefälle können sogar eine Erhöhung bewirken. In einer statistischen Zusammenstellung der Werthe der in Wolfenbüttel in den Jahren 1887—89 gemessenen Luftelektricität glaubten wir in der That einen derartigen Einfluss ferner Niederschlagsgebiete erkennen zu können.[2]

Bemerkungen zur Beobachtungsmethode.

Sollten auch von anderer Seite Beobachtungen ähnlicher Art geplant werden, so möchten wir uns den Vorschlag erlauben, die Auffangschale in einem kleinen, in die Erde getriebenen Schachte aufzustellen und die Drahtleitung ebenfalls unterirdisch anzulegen. (Von der Verwendung eines Kabels ist wegen der zu grossen Capacität desselben abzurathen.) Man würde so die Schutzvorrichtungen gegen äussere Influenz erheblich beschränken können.

Eine von der unserigen abweichende Methode, die aber auch brauchbare Resultate zu versprechen scheint, würde darin bestehen, dass man im Freien einen grösseren Raum durch Drahtgeflecht vollständig gegen die Influenz des äusseren Potentialgefälles abschliesst und das Vorzeichen der Elektricität der in denselben eintretenden Niederschläge mittelst eines im Inneren aufgestellten Tropfensammlers in Verbindung mit einem Elektroskop bestimmt. Auf die Möglichkeit dieses Verfahrens ist schon

[1] Linss, l. c. S. 348.

[2] J. Elster und H. Geitel, Messungen des normalen Potentialgefälles der atmosphärischen Elektricität. Diese Berichte, Bd. XCVIII, Abth. II. a, S. 952 ff.. Juni 1889.

von Linss (l. c.) aufmerksam gemacht. Auch hier können die an den Drähten der Umhüllung verspritzenden Tropfen die Beobachtungen fehlerhaft machen, man wird sich aber, wie bei dem vorigen Verfahren, durch gleichzeitige Feststellung des Zeichens der atmosphärischen Elektricität eine Art von Controle verschaffen können. Wir haben die Methode versuchsweise bei Schneeböen mit starkem Winde angewandt, indem wir die Drahthülle unseres Schutzcylinders auch nach oben vervollständigten und bis auf 1 *m* vom Erdboden herabführten. In dem so abgegrenzten parallelopipedischen Raume stellten wir den mit einem Exner'schen Elektroskope verbundenen Tropfensammler auf, während wir gleichzeitig vermittelst einer im ersten Stocke des Hauses nahe über dem Apparate aus dem Fenster geschobenen isolirten Flamme das Zeichen der atmosphärischen Elektricität bestimmten. Auch hier fanden wir bei drei grösseren Beobachtungsreihen keineswegs constanten Zeichengegensatz.

Es möge hinzugefügt werden, dass während des heftigsten Schneetreibens der in dem 4·4 m^3 enthaltenden Drahtkasten aufgestellte Tropfensammler eine Spannung von 150 Volt — also unmittelbar am Exner'schen Elektroskope messbar — anzeigte.

Wir theilen diese Ergebnisse kurz mit, um zu ähnlichen Beobachtungen an günstigen, von der Natur gegen Influenz des atmosphärischen Potentialgefälles geschützten Orten, etwa tief eingeschnittenen Gebirgsthälern, anzuregen.

Über die Möglichkeit von Störungen des atmosphärischen Potentialgefälles durch fallende Niederschläge.

Bekanntlich ist die Atmosphäre bei völlig heiterem Himmel der Schauplalz gewisser elektrischer Vorgänge, die sich in den mit einer Art Regelmässigkeit verlaufenden täglichen und jährlichen Schwankungen des Potentialgefälles zu erkennen geben. Während des Falles von Niederschlägen wird der Verlauf dieser Schwankungen vollständig entstellt, es treten neue von weit grösserer Amplitude auf, deren Charakter der einer fast völligen Regellosigkeit ist. Daher griff der Gedanke Platz, dass man es bei den letzteren mit Störungen des elektrischen Zustandes der Atmosphäre zu thun habe, deren normales Verhalten in der eigentlichen Schönwetterelektricität zu Tage träte. Man gab

damit die an sich nicht fern liegende und von mehreren Forschern auch der jetzigen Zeit getheilte Meinung vorläufig auf, dass die Elektricität der Wolken und Niederschläge aus einer gleichartigen Ursache mit der normalen atmosphärischen Elektricität entspringe.

Es ist das Verdienst von F. Exner,[1] unter Zugrundelegung der älteren Peltier'schen Hypothese von der negativen Eigenelektricität des Erdkörpers, diese Beschränkung scharf hervorgehoben zu haben, er stellte sich das Ziel, das Problem der Schönwetterelektricität zunächst gesondert, ohne Rücksicht auf die Wolken- und Niederschlagselektricität zu lösen. Der Erfolg hat seinem Verfahren Recht gegeben; es ist ihm gelungen, in erster Annäherung ein Gesetz für die Veränderlichkeit des normalen atmosphärischen Potentialgefälles zu finden.

Ist somit auf dem einen, beschränkten Gebiete ein werthvolles Ergebniss zu verzeichnen, so tritt auf dem anderen dafür die Aufgabe hervor, die Art jener elektrischen Störungen näher zu erforschen, die mit der Bildung der Niederschläge verknüpft sind. Es liegt nahe, an die bekannten elektromotorisch wirksamen Vorgänge, Contact und Reibung heterogener Körper zu denken oder neue Quellen ähnlicher Art, wie die noch fragliche der Condensation des Wasserdampfes zu vermuthen, aber alle diese vorgeschlagenen Quellen der Wolken- und Gewitterelektricität erscheinen, soweit sie überhaupt als experimentell begründet in Betracht kommen, keine genügende Energiequelle für die Erzeugung so hoher Potentialdifferenzen und Stromintensitäten darzustellen, wie sie die Natur thatsächlich bietet.

Wir haben schon vor längerer Zeit[2] die Ansicht zu begründen gesucht, dass Änderungen des elektrischen Potentialgefälles in der Erdatmosphäre schon allein durch den Fall der Niederschläge,

---

[1] Vergl. u. a. F. Exner, Über die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft. Diese Berichte, Bd. XCVI, Abth. II, S. 419, Juli-Heft 1887.

[2] J. Elster und H. Geitel, Über die Elektricitätsentwicklung bei der Regenbildung, Wied. Ann., Bd. 25, S. 121, 1885 und Zur Frage nach dem Ursprunge der Wolkenelektricität, 4. Jahresbericht des naturwissenschaftlichen Vereines zu Braunschweig, S. 40, 1886. (Die letzte Arbeit enthält auch eine Kritik der bekannteren Gewittertheorien.)

nämlich durch die räumliche Trennung grösserer und kleinerer Wasser-, beziehungsweise Eistheilchen bewirkt werden können. Es sei verstattet, im Folgenden das Wesentliche dieser Anschauung vorzutragen.

Stellt man einen isolirten Leiter, von dessen Oberfläche sich leitende Theilchen in schneller Folge nach oben loslösen (etwa eine Flamme oder einen Wasserstrahlcollector) im Freien an der Erdoberfläche auf, so nimmt derselbe bei heiterem Himmel eine positive Potentialdifferenz gegen den Erdkörper an. Wie Eingangs bemerkt wurde, bildet nämlich die Atmosphäre der Erde ein elektrisches Feld mit positivem Potentialgefälle in der Richtung der Verticalen; wie die Versuche zeigen, kann dasselbe als homogen betrachtet werden. Ob man sich hoch in der Erdatmosphäre positiv elektrische Massen vorhanden denkt oder mit Peltier die Erde als negativ elektrisch betrachtet, ist für die im Folgenden zu behandelnden Vorgänge ohne Belang. Nach der ersten Auffassung empfängt der Collector positive, nach der zweiten verliert er negative Elektricität. Wir ziehen die erstere der bequemeren Ausdrucksweise wegen vor, ohne damit irgend eine Hypothese über den elektrischen Zustand der Atmosphäre aussprechen zu wollen.

Ein Wassertropfen, frei in der Luft schwebend gedacht, von dessen Oberfläche kleine Tröpfchen nach oben abfliegen, würde gleichfalls eine positive Potentialdifferenz gegen die Erde annehmen, entsprechend der Niveaufläche, in der er sich befindet. Es hat keine Schwierigkeit, sich einen Wassertropfen von der Grösse vorzustellen, dass er beim Herabsinken nach Erreichung einer bestimmten Fallgeschwindigkeit nicht mehr als zusammenhängende Masse bestehen kann. Er wird zerreissen; die kleinen Theiltröpfchen bleiben im Felde zurück, die grösseren eilen voran. Erstere müssen positiv, letztere negativ geladen sein. Gesetzt, es entstünde in der Luft plötzlich eine grössere Wassermenge, die beim Herabfallen sich in einen Schwarm von Tropfen auflöst, so müssen die zuerst an der Erdoberfläche ankommenden grösseren sich positiv, die nachfolgenden staubförmigen sich negativ elektrisch erweisen.

Es gibt noch eine zweite Möglichkeit einer Elektricitätsentwicklung durch Bildung von Niederschlägen.

Wenn grössere Niederschlagstheilchen (Regentropfen oder Hagelkörner) eine Wolke durchfallen, so müssen sie auf ihrer Bahn mit den sehr feinen Elementartropfen zusammentreffen, die in ihrer Ansammlung die Wolke bilden. Nach einem in einer früheren Abhandlung[1] mitgetheilten Versuche ist anzunehmen, dass bei diesem Zusammentreffen grösserer und kleinster Tropfen keineswegs immer eine Verschmelzung derselben eintritt, sondern dass auch ein Gleiten der kleineren an den grösseren stattfinden kann. Wir glauben durch einen Versuch nachgewiesen zu haben, dass bei diesem Gleiten von Wasserstaub an ausgedehnten Wasserflächen in dem Berührungspunkte keine vollständige Isolation in elektrostatischer Beziehung vorhanden ist. Darnach werden also die feinsten Wolkenelemente, wenn sie von einem fallenden Niederschlagstheilchen getroffen werden, indem sie von diesem abgleiten, die Stelle der Tropfen eines Wassercollectors spielen, d. h. in dem elektrischen Felde der Atmosphäre selbst negativ werden, die fallenden Niederschläge aber positiv elektrisiren.

Nehmen wir an, über einer Stelle der Erdoberfläche, die noch heiteren Himmel, also positives normales Potentialgefälle hat, bilde sich eine Wolke. Solange dieselbe ihre Höhe nicht ändert und keine Niederschläge entsendet, wird eine erhebliche Beeinflussung des Potentialgefälles nicht eintreten. Sie kann allein nach Art eines Dielektricums wirken, da sämmtliche Wolkenelemente durch relativ grosse Lufträume von einander isolirt zu denken sind. Beim Eintritt des Regens ändert sich die Sachlage insofern, als jeder Regentropfen positive Elektricität zur Erde führt und die zurückbleibenden Wolkenelemente, beziehungsweise von ihm losgerissene Tröpfchen negativ elektrisch zurücklässt.

Dieser Process dauert so lange, bis eine Potentialdifferenz zwischen der Erdoberfläche und der Wolkenschichte nicht mehr besteht. Die Wolke verhält sich dann so, als sei jedes Theilchen derselben für einen Moment zur Erde abgeleitet gewesen, das heisst, sie ist mit negativer Influenzelektricität bedeckt, während das Potentialgefälle an der Erdoberfläche den Wert Null erreicht hat. Der nun entfallende Regen muss im Ganzen unelektrisch sein, das heisst, es wird jetzt für jedes Quantum negativer Elek-

[1] J. Elster und H. Geitel, Wied. Ann., 25, S. 129, 1885.

tricität, das etwa durch das aus negativ geladenen Wolkenelementen gebildete Regenwasser zur Erde herabgeführt wird, ein gleich grosses Quantum positiver in Freiheit gesetzt. Hört aus irgend einem Grunde die Neubildung des Regens auf und fällt der Rest der Wolke in Gestalt von Tropfen zu Boden, so müssen diese mit negativer Elektricität beladen sein. Sobald die Wolke aufgezehrt ist, müsste sich von selbst wieder das normale Potentialgefälle am Beobachtungsorte einstellen. In dem gedachten Falle einer über einem bestimmten Punkte sich bildenden Wolke, die zu regnen beginnt und nach einiger Zeit durch das Fallen des Niederschlages sich auflöst, wäre demnach folgendes Verhalten des letzteren in elektrischer Beziehung zu erwarten:

Anfangs ist der Niederschlag positiv, dann neutral oder in geringen Grenzen zwischen $\pm$ schwankend, zum Schlusse negativ. Das Potentialgefälle der atmosphärischen Elektricität wird anfangs positiv sein, im ferneren Verlaufe des Regens muss es zu Null abnehmen; es kann dann sehr wohl, wenn die Wolke gegen Ende des Processes beginnt, sich zu senken, ins Negative übergehen, um am Ende wieder positiv zu werden. Es ist zu bemerken, dass die elektrischen Ladungen recht bedeutend sein können. Würde doch für einen Tropfen, der sich bei normalem Potentialgefälle von $100\,\frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ in einer Höhe von 1000 Metern an den Dunsttröpfchen einer Wolke elektrisirt, bei Vernachlässigung jeden Verlustes die obere Grenze seiner Potentialdifferenz gegen die Erde bei 100.000 Volt liegen.

Wir hatten vorausgesetzt, dass eine Wolke über dem Beobachtungsorte sich bilde, zu regnen beginne und durch den Regenfall sich selbst verzehre. Im Wesentlichen müssen die vorigen Schlüsse anwendbar bleiben, wenn man ein einseitiges Wachsen der Wolke in horizontaler Richtung, verbunden mit gleichzeitiger Abnahme an der entgegengesetzten Seite, annimmt, das heisst, wenn man es mit einem vorüberziehenden Niederschlagsgebiete zu thun hat. Die Front der Wolke muss im Wesentlichen positiven, der Rücken negativen Charakter darbieten. Das Potentialgefälle der atmosphärischen Elektricität muss bei Annäherung derselben zuerst steigen, dann bis auf Null sinken, selbst negativ werden und zum Schlusse rasch wieder ins Positive umschlagen.

Auf Schneefälle ist diese Betrachtungsweise nicht ohneweiters anwendbar; es würden hier Zeichenverschiedenheiten zwischen lockerem und festgeballtem Schnee zu erwarten sein, insoferne letzterer dem ersteren im Fallen voraneilen würde.

Die hier vorgetragenen auf einfache Voraussetzungen begründeten Schlüsse scheinen uns die Möglichkeit zu bieten, die Störungen des normalen atmosphärischen Potentialgefälles durch fallende Niederschläge verständlich zu machen, ohne Zuhilfenahme anderer elektromotorischer Kräfte, als der in dem elektrischen Felde der Erde gegebenen.

Vielleicht ist es erlaubt, in dieser Richtung noch etwas weiter zu gehen. Von wesentlichem Einflusse auf die elektrische Ladung der Niederschläge würden nämlich Luftströmungen sein, deren Vorhandensein wir bis jetzt nicht berücksichtigt hatten. Durch dieselben werden Verschiebungen der elektrischen Wolken und Niederschläge bewirkt, die das oben gegebene reine Bild der Vertheilung der Elektricität in einem Niederschlagsgebiete wesentlich verändern können. Es scheint sogar, wie wir schon am angeführten Orte ausgesprochen haben, sehr wohl möglich, dass durch solchen Transport elektrischer Massen Vorgänge eingeleitet werden können, die eine gewisse Ähnlichkeit mit der Wirkungsweise der elektrischen Influenzmaschinen bieten.

Kehren wir noch einmal zu der Vorstellung einer über dem Beobachtungsorte gebildeten Regenwolke zurück. Der Gränzzustand der negativen Ladung derselben war erreicht, wenn unterhalb derselben das Potentialgefälle der atmosphärischen Elektricität auf Null gesunken war. Eine weitere Vermehrung der auf der Wolke angehäuften Elektricitätsmenge erscheint nicht möglich, wenn nicht durch irgend welche andere Vorgänge von neuem ein elektrisches Feld unter der Wolke mit positiver Vertikalcomponente erzeugt wird.

Dieses muss aber eintreten, sobald ein Theil der negativ geladenen Wolkenmassen soweit herabgeführt wird, dass sie unterhalb der ursprünglichen Wolkenschicht zu liegen kommen. Hiebei werden dieselben nämlich einerseits von den in den höheren Schichten angenommenen positiven Massen entfernt, wobei ihr Potential allein schon sinken würde, andererseits tritt innerhalb der sich senkenden Wolkenmassen eine Com-

pression der die Wolkenelemente trennenden Luft, also eine Annäherung der elektrisirten Wolkenelemente, d. h. eine Steigerung der räumlichen Dichtigkeit der negativen Elektricität ein. (Von einer Steigerung der letzteren durch Zusammenfliessen der Wolkenelemente zu grösseren Tropfen, sowie theilweise Verdunstung der Tröpfchen in Folge dynamischer Erwärmung der Luft beim Absteigen, die in gleichem Sinne wirken würden, sehen wir hier ab.) Diese unter die ursprüngliche Schicht herabgesunkenen Wolkenmassen erzeugen nun in der Richtung nach dieser hin ein elektrisches Feld mit positivem Potentialgefälle, dessen Vertikalcomponnente von neuem das Herabfallen positiver Regentropfen und das Anwachsen der Ladung der Wolkenschicht bedingt. Werden Theile der so stärker geladenen Schicht abwärts geführt, so wirken sie in der eben geschilderten Weise von neuem und es kann sich bei continuirlicher Bewegung eine andauernde Verstärkung der Ladung der in bestimmter Höhe stets sich neu bildenden Wolkenschicht herausbilden. Das Niederschlagsgebiet in seiner Gesammtheit stellt demnach eine Art von Influenzmaschine dar, die ihre Anfangsladung dem atmosphärischen Potentialgefälle verdankt.

Dass ein continuirliches Herabsinken der oberen Wolkenmassen in Folge von Luftbewegungen innerhalb einer Gewitterwolke wirklich stattfindet, ist bei unserer jetzigen Kenntnis von der Struktur derselben nicht unwahrscheinlich. In der von Köppen[1] vertretenen Auffassung der Gewitterböen als Wirbel mit horizontaler Axe ist sie geradezu gefordert. Der herabsteigende Theil des Wirbels ist es hier, von dem die gesteigerte negative Influenz auf den aufsteigenden und höchsten Theil ausgehend zu denken ist.

Eine andere schematische Vorstellung (ohne Rücksicht auf die Homogenität des elektrischen Feldes der Erde) hatten wir in einer der früheren Abhandlungen zu Grunde gelegt.

Gibt man das hier aufgestellte Princip der Scheidung der Elektricitäten durch Influenz elektrischer Massen auf fallende

---

[1] Köppen, Gewittersturm vom 9. August 1881, Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie, Bd. 19, S. 12, Jänner-Heft 1884.

Niederschläge zu, so ist damit die Möglichkeit gegeben, jene Regellosigkeit der Zeichenwechsel des atmosphärischen Potentialgefälles bei ergiebigen Niederschlagsfällen erklärlich zu machen. Die einzelnen Wolkenmassen und Niederschläge selbst werden sich gegenseitig elektrisch beeinflussen. Besonders wenn Funkenentladungen stattgefunden haben, kann das Potentialgefälle in den Wolken selbst sein Zeichen wechseln und damit der ganze Mechanismus in umgekehrter Weise arbeiten, ähnlich wie eine Influenzmaschine ihre Polarität wechselt. Die durch das normale Potentialgefälle ertheilte Anfangsladung erscheint nun der gesteigerten Ladung der Wolke gegenüber als bedeutungslos.

Die mitgetheilten Beobachtungen widersprechen der hier vorgetragenen Anschauung nicht, doch kann natürlich die blosse Regellosigkeit des Zeichens der atmosphärischen Elektricität bei Gewittern nicht als ein Beleg für die Theorie herangezogen werden. Eine Widerlegung oder Bestätigung derselben ist dagegen vielleicht durch systematische Beobachtung des Zeichenwechsels der atmospärischen Elektricität wie der Niederschläge bei den Beobachtungsort passirenden Regenwolken nicht gewitterigen Charakters zu erzielen.

Taf. I.

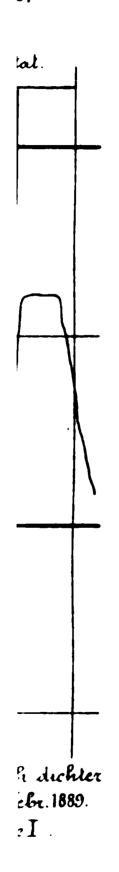


Fig. 5.

Luftelektricität.

0

El. des Schnees

20

10

0

10

20

Grossflokiger Schnee bei abflauendem Winde, den 26 Nov. 1889.
Nº 8 der Tabelle I.

Fig. 4.b

Luftelektricität.

0

El. des Schnees.

1

0

1

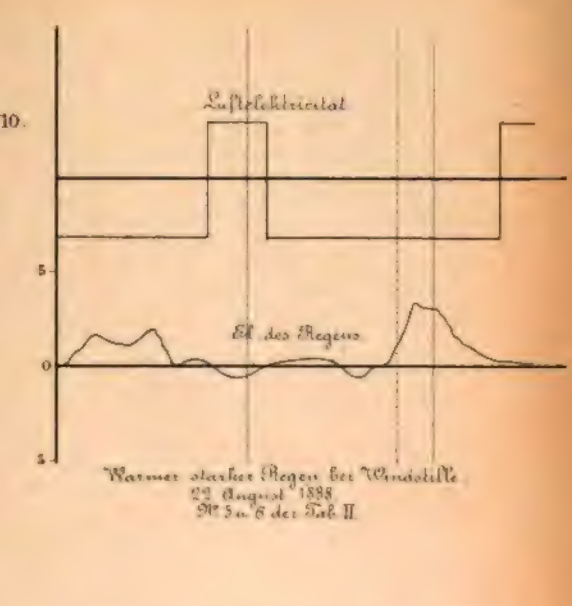
Schneefall mit grossen Flocken d. 10 Febr. 1889
Nº 7 der Tabelle I.

Lith. Anst. v. T. Barth, Fünfhaus Wien.



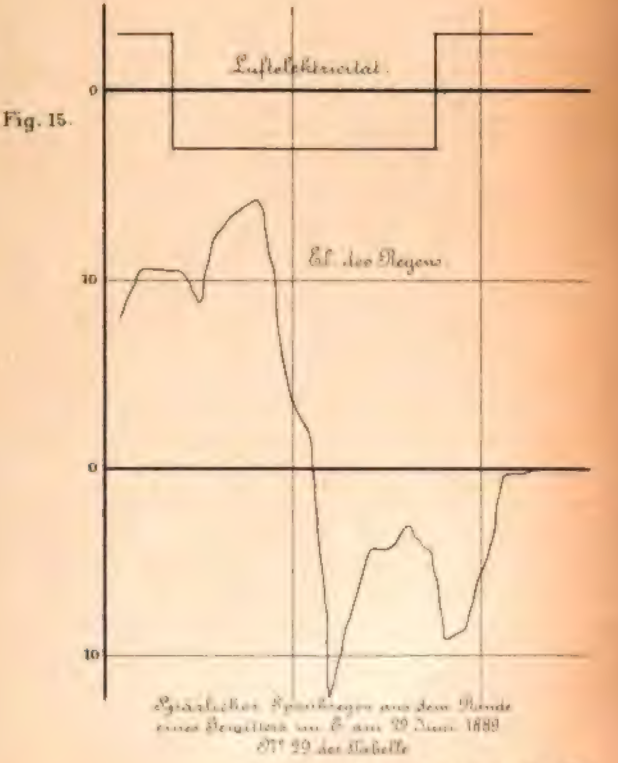
Regen bei Windstille am 21. Juni 1888.
Nr. 4 der Tab. II

Fig. 10.



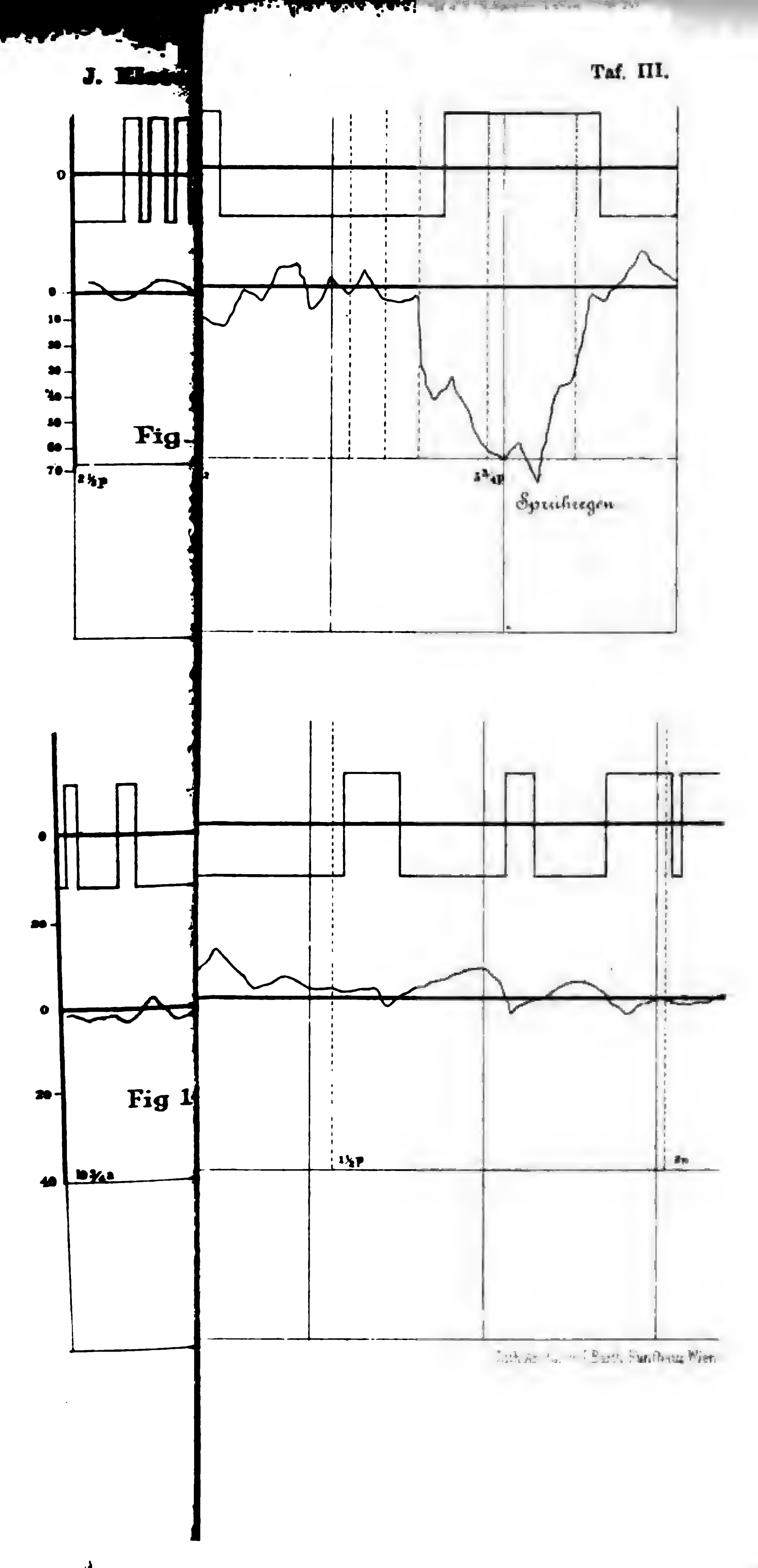
Warmer starker Regen bei Windstille
22 August 1888
Nr. 5 u. 6 der Tab. II

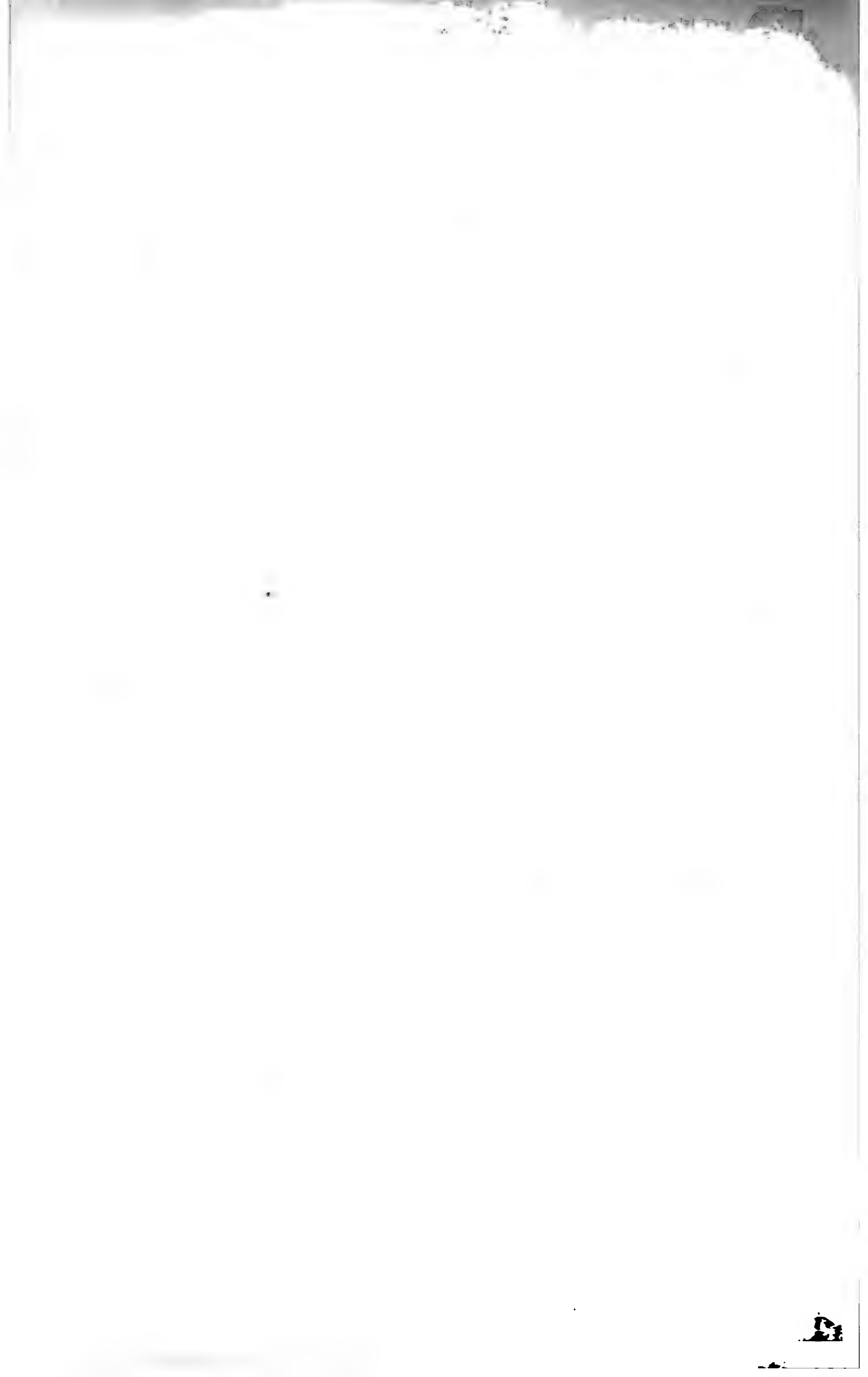
Fig. 15.



Spärlicher Sprühregen aus dem Rande
eines Gewitters im S am 29 Juni 1889
Nr. 29 der Tabelle




0
0
10
20
30
40
50
60
70
2½p
Fig.
Sprühregen
0
20
0
20
40
Fig 1
10¾a
1½p



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. VI. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XIII. SITZUNG VOM 6. JUNI 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1890) des 99. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte, ferner das Heft IV (April 1890) des XI. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet zwei Abhandlungen.

1. „Ein Beitrag zur Constitution der Niveaulinien", von Dr. Paul Czermak, Privatdocent an der k. k. Universität in Graz.
2. „Der freie Fall, berechnet aus dem Gravitationsgesetze", von Dr. Alois Walter.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Weitere Untersuchungen über die Zahlen- und Grössenverhältnisse der Spaltöffnungen mit Einschluss der eigentlichen Spalte derselben".

Das c. M. Herr Prof. Rich. Maly übersendet eine Abhandlung: „Über das Orceïn", von Karl Zulkowski, Prof. an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Prag und Karl Peters, Assistenten daselbst.

Herr Prof. Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet eine Arbeit, betitelt: „Zur Kenntniss der Conjugation bei *Spirogyra*".

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet eine Mittheilung: „Über die Giftigkeit der bösartigen Geschwülste (Krebse)".

Von Herrn Dr. Geiza Bukowski ist ein vorläufiger Reisebericht aus Kleinasien, ddo. Bulatly, 8. Mai 1890 eingelangt.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die Projectionen des Pentagon-Dodekaëders“, von Herrn Julius Mandl, k. u. k. Genie-Oberlieutenant in Jaroslau.
2. „Bericht über die Gravitation, sowie auch über die wahre Lage und Bewegung der Erde“, von Herrn Ludwig Horkaý in Josefstadt (Böhmen).

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von einem Anonymus vor, welches angeblich eine Mittheilung über eine pflanzenphysiologische Frage enthält und das Motto trägt: „*Evidentiae sunt*“.

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner gibt im Anschlusse an seine „Untersuchungen über die Organisation der vegetabilischen Zellhaut“ (Sitzber. 1886) ein vorläufiges Resumé über seine „Studien, betreffend die Elementargebilde der Pflanzenzelle“.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. A. Winckler überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung“. I.

Selbständige Werke, oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Caruel Theodoro, Filippo Parlatore. Flora Italiana. (Fortsetzung). Vol. VI—IX. Firenze, 1884—1890; 8⁰.

Darapsky L., Las Aguas Minerales de Chile. (Preisschrift). Valparaiso, 1890, 8⁰.

Miller-Hauenfels A. v., Der mühelose Segelflug der Vögel und die segelnde Luftschifffahrt als Endziel hundertjährigen Strebens. Wien, 1890; 8⁰.

XIV. SITZUNG VOM 12. JUNI 1890.

Frau Melanie von Zepharovich, Witwe des am 24. Februar d. J. zu Prag verstorbenen k. k. Hofrathes und Universitätsprofessors Dr. Victor Leopold Ritter von Zepharovich, wirklichen Mitgliedes der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, hat an das Präsidium der kaiserlichen Akademie folgendes Schreiben gerichtet:

Prag am 11. Juni 1890.

Hohes Präsidium!

Mein verstorbener Gatte, Victor Ritter von Zepharovich, Professor der Mineralogie an der deutschen Universität in Prag, hatte den Wunsch, der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien den Betrag von 20.000 fl. für eine Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Forschungen auf mineralogisch-krystallographischem Gebiete zu übergeben.

Da er durch ein unvorhergesehen rasches Ende an der Ausführung dieses Wunsches verhindert wurde, sehe ich mich nach getroffenem Übereinkommen mit seinen Erben Herrn Max Ritter von Zepharovich und Herrn Oberlandesgerichtsrath Dr. August Ritter von Zepharovich veranlasst, diesen Gedanken aufzunehmen, und jene Stiftung in seinem Sinne zu errichten.

Zunächst beehre ich mich daher, die ergebene Anfrage zu stellen, ob die kaiserliche Akademie der Wissenschaften geneigt sei die bezeichnete Stiftung in Verwaltung zu nehmen.

Im Falle der Annahme würde ich die Verwendung des Erträgnisses der Stiftung, ob dasselbe alljährlich oder unter Um-

ständen cumulirt, zu Stipendien, Subventionen, ausgeschriebenen oder frei zu verleihenden Preisen benützt werde, dem freien Ermessen der Akademie anheim geben, und nur folgende Bedingungen stellen:

1. Dass die Stiftung den Namen meines Gatten trage,

2. dass alljährlich auf Grund des Gutachtens einer Commission von mindestens drei dem Fache angehörenden oder demselben zunächst stehenden Mitgliedern der Akademie in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe Beschluss gefasst werde über die Verwendung des Zinsenerträgnisses im Sinne der Stiftung und dieser Beschluss in der jährlichen feierlichen Sitzung der Akademie zur Veröffentlichung gelange.

Das w. M. Herr Prof. J. Wiesner übergibt im Anschlusse an das in der Sitzung vom 6. Juni 1890 vorgetragene Resumé eine für die Sitzungsberichte bestimmte: „Vorläufige Mittheilung über die Elementargebilde der Pflanzenzelle“.

Von Herrn Dr. Gejza Bukowski ist ein zweiter Reisebericht aus Kleinasien, ddo. Denizlü, 1. Juni 1890 eingelangt.

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Professor J. Stefan überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über die Theorie der oscillatorischen Entladung.“

Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. I.

von

A. Winckler,

w. M. k. Akad.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1890.)

Im ersten Bande der Integralrechnung von Euler (Art. 493 bis 527) ist die Aufgabe, Differentialgleichungen zu finden, welche durch Multiplicatoren von gegebener Form integrabel werden, in zwei sehr beachtenswerthen Fällen gelöst. Euler hat nämlich die in den Differentialgleichungen:

$$Py\,dx+(y+Q)\,dy = 0, \qquad (Ry+S)\,dx+y\,dy = 0$$

enthaltenen Functionen P, Q und R, S von x für mehrere als Multiplicatoren gewählte Ausdrücke vollständig bestimmt. Andere ebenso bemerkenswerthe Lösungen jener Aufgabe sind aber, soviel mir bekannt, weder von Euler noch später gefunden worden, obgleich es an entsprechenden Versuchen kaum gefehlt haben dürfte. Hiedurch ist die Unmöglichkeit weiterer Erfolge allerdings nicht dargethan, aber man kann sich leicht überzeugen, dass die mehr oder weniger willkürlichen Annahmen, welche das Euler'sche Verfahren voraussetzt,[1] oft entweder zu Widersprüchen oder aber zu gewissen Differentialgleichungen führen, deren Integration nur unter speciellen, die Bedeutung des Endresultates wesentlich beschränkenden Bedingungen geschehen kann.

Mag es hieran liegen, dass von der wirklichen Bestimmung des Multiplicators der Differentialgleichungen erster Ordnung fast

[1] Bezeichnet μ den Multiplicator der Differentialgleichung $p\,dx+q\,dy=0$, so setzt Euler in allen von ihm betrachteten Fällen die drei Grössen p, q, μ

nirgends mehr die Rede ist, so bleibt doch die Frage übrig, ob die Euler'sche Aufgabe oder Theorie nicht durch eine andere ersetzt werden könne, welche auf stets zulässigen Annahmen beruht und einer ausgedehnteren Anwendung fähig ist.

Der nachstehende Versuch, diese Frage in Betracht zu ziehen, gründet sich auf die folgenden einfachen Voraussetzungen.

An die Stelle der Gleichung $p dx + q dy = 0$, von welcher Euler ausgeht, wird die ebenso allgemeine

$$\frac{dy}{dx} = z$$

gesetzt und dabei z als eine noch unbekannte Function von x und y betrachtet. Der Multiplicator ρ dieser Gleichung muss dann der Bedingung

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial . \rho z}{\partial y} = 0$$

Genüge leisten. Damit die beiden unbekannten Functionen ρ und z bestimmt seien, wird vorausgesetzt, es bestehe zwischen denselben eine Relation

$$\rho = F(x, y, z)$$

welche offenbar immer zulässig ist und nie zu Widersprüchen führt.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für z eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche, wenn F näher bestimmt ist, in zahlreichen Fällen integrirt werden kann. Da das Integral dieser Gleichung eine willkürliche Function enthält und die gesuchte Gleichung für z ist, so wird auf diesem Wege eine grössere Allgemeinheit als durch das Euler'sche Verfahren

---

als vollständig gegebene Functionen von y voraus, fasst also z. B. die Aufgabe (Art. 493), wie folgt:

Definire functiones P et Q ipsius x, ut aequatio differentialis $Py\,dx + (y+Q)\,dy = 0$ per multiplicatorem $\frac{1}{y^3 + My^2 + Ny}$ ubi M et N sunt functiones ipsius x, fiat integrabilis.

Da aber die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial \mu p}{\partial y} = \frac{\partial \mu q}{\partial x}$ erfüllt werden muss, so können offenbar nur zwei der Grössen p, q, μ als Functionen von y willkürlich angenommen werden.

erreicht. Die weiter unten folgenden Beispiele, welche vor Allem die Erweiterung bereits bekannter Resultate zum Zwecke haben, mögen dies näher zeigen. Anwendungen anderer Art wird der zweite Theil dieser Arbeit enthalten.

1.

Um Wiederholungen zu vermeiden, werden bei den folgenden Anwendungen die Fälle unterschieden, ob ρ als eine Function bloss von z oder von z und einer oder beider Veränderlichen x und y vorausgesetzt wird.

Ist $\rho = f(z)$ gegeben, so hat man die Gleichung:

$$f'(z)\frac{\partial z}{\partial x} + [zf'(z) + f(z)]\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

deren allgemeines Integral

$$(xz - y)f'(z) + xf(z) = \varphi(z)$$

ist, worin $\varphi(z)$ eine willkürliche Function bezeichnet.

Dieser Bedingung muss also z genügen, wenn die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = z$$

durch den Factor $f(z)$ integrabel werden soll.

In diesem sehr einfachen Falle lässt sich übrigens sowohl die Auflösung der für z gefundenen Gleichung als die Frage nach dem Multiplicator umgehen, da, wenn man $z = y'$ setzt, die Differentialgleichung

$$(xy' - y)f'(y') + xf(y') = \varphi(y')$$

auf bekannte Art integrirt werden kann und nur noch die Elimination von y' aus zwei Gleichungen erforderlich ist.

2.

Wird vorausgesetzt, es sei

$$\rho = F(x, z)$$

so ergibt sich aus der Bedingung der Integrabilität zur Bestimmung von z die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(F + z\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

deren allgemeines Integral aus zwei Integralen der gewöhnlichen Gleichungen:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy}{F + z\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial x}}$$

abzuleiten ist.

Da hieraus

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

folgt, so ist

$$F = C_1$$

eines jener Integrale. Ein zweites und somit auch das allgemeine Integral ergibt sich, wenn man hieraus x als Function von z, also auch

$$\frac{F + z\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \Phi(z, C_1)$$

finden kann. Es folgt dann:

$$y + \int \Phi(z, C_1)\, dz = \varphi(C_1)$$

worin nach Ausführung der Quadratur $C_1 = F$ zu setzen ist.

Lässt sich dagegen z als Function von x, daher

$$\frac{F + z\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \Psi(x, C_1)$$

finden, so ist

$$y - \int \Psi(x, C_1)\, dx = \psi(C_1)$$

wenn zuletzt wieder $C_1 = F$ gesetzt wird, das allgemeine Integral, welches zur Bestimmung von z dient.

Hiezu einige Beispiele.

3.

1. Es seien a und b von Null verschiedene Constanten, und es werde

$$p = \frac{1}{z} f\left(ax + \frac{b}{z}\right) = F$$

gesetzt, auch sei der Abkürzung wegen:

$$u = ax + \frac{b}{z}$$

Man hat dann

$$\frac{1}{z} f(u) = C_1$$

und da:

$$F + z\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{b}{z^2} f'(u)\,, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{a}{z} f'(u)$$

so folgt:

$$a\,dy = b\frac{dz}{z}\,, \qquad z^b e^{-ay} = C_2$$

Die Gleichung für z ist also

$$f\left(ax + \frac{b}{z}\right) = z\varphi\left(z^b e^{-ay}\right)$$

Die Functionen f und φ können beliebig gewählt werden.

2. Bezeichnen p und q gegebene Functionen von x und wird

$$p = f(pz + q) = F$$
$$u = pz + q$$

gesetzt, so ist:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = pf'(u)\,, \qquad F + z\frac{\partial F}{\partial z} = f(u) + pzf'(u)$$

folglich

$$\frac{dx}{pf'(u)} = \frac{dy}{f(u) + pzf'(u)}$$

Hierin ist wieder

$$f(u) = C_1$$

daher u als constant zu betrachten, auch kann $pz = u - q$ gesetzt werden. Nun hat man die Gleichung

$$\left[\frac{f(u)}{f'(u)} + u - q\right]\frac{dx}{p} = dy$$

also das allgemeine Integral

$$y + \int \frac{q}{p}\,dx - \left[u + \frac{f(u)}{f'(u)}\right]\int \frac{dx}{p} = \varphi(u)$$

zur Bestimmung von u.

Genügt u dieser Gleichung, so ist

$$\rho = f(u)$$

ein Multiplicator der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u - q}{p}$$

3. Es seien p, q, r, s gegebene Functionen von x, und es werde wieder

$$\rho = f(u) = F$$

dabei aber

$$u = \frac{1}{q}\left[p + a\sqrt{r + sz}\right]$$

gesetzt. Auch hier ist

$$f(u) = C_1$$

also u als constant zu betrachten. Man hat ferner

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{as}{2q\sqrt{r + sz}} = \frac{a^2 s}{2q(qu - p)} \cdot f'(u)$$

und

$$z = \frac{(qu - p)^2}{a^2 s} - \frac{r}{s}$$

daher

$$\frac{F}{\frac{\partial F}{\partial z}} + z = \frac{2q(qu-p)}{a^2 s} \cdot \frac{f(u)}{f'(u)} + \frac{(qu-p)^2}{a^2 s} - \frac{r}{s}$$

Hienach ergibt sich aus der im vorigen Artikel erhaltenen Gleichung

$$\left[\frac{F}{\frac{\partial F}{\partial z}} + z\right] dx = dy$$

durch Integration für u die Bedingung:

$$\frac{2}{a^2} \cdot \frac{f(u)}{f'(u)} \cdot \int q(qu-p) \frac{dx}{s} + \frac{1}{a^2} \int (qu-p)^2 \frac{dx}{s}$$

$$= y + \int \frac{r}{s} dx + \frac{1}{a^2} \varphi(u)$$

oder in anderer Schreibweise:

$$2 \frac{f(u)}{f'(u)} \left[u \int \frac{q^2}{s} dx - \int \frac{pq}{s} dx\right]$$

$$+ u^2 \int \frac{q^2}{s} dx - 2u \int \frac{pq}{s} dx + \int \frac{p^2}{s} dx$$

$$= a^2 \left[y + \int \frac{r}{s} dx\right] + \varphi(u)$$

Genügt u dieser Gleichung, so ist $\rho = f(u)$ ein Multiplicator der Differentialgleichung:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(qu-p)^2}{a^2 s} - \frac{r}{s}$$

Für einen speciellen Fall nehme man an, es sei

$$\rho = \frac{1}{u} \qquad \text{und} \qquad \varphi(u) = bu^2 + c$$

Dann ist $\frac{f(u)}{f'(u)} = -u$, und geht die Gleichung für u über in die folgende:

$$\left[b+\int\frac{q^2}{s}dx\right].u^2-\int\frac{p^2}{s}dx+a^2\int\frac{r}{s}dx+a^2y+c=0$$

Wird weiter:

$$q=e^{\int pdx},\qquad r=p^2-\frac{p'}{2p},\qquad s=\frac{1}{2p}$$

und zugleich $a=1$, $b=c=0$ gesetzt, so folgt:

$$u^2e^{2\int pdx}-p+y=0\qquad\text{oder}\qquad qu=\sqrt{p-y}$$

Die Differentialgleichung ist daher:

$$\frac{dy}{dx}=2p\left[-p+\sqrt{p-y}\right]^2+p'-2p^3$$

und

$$\rho=\frac{e^{\int pdx}}{\sqrt{p-y}}$$

deren Multiplicator.

Für einen zweiten Fall sei

$$\rho=\frac{1}{u^2},\qquad s=-1\qquad\text{und}\qquad\varphi(u)=-(bu+c)$$

Wird hier u aus der Gleichung

$$\left[b+\int pqdx\right].u+\int(a^2r-p^2)dx+c=a^2y$$

berechnet, so ergibt sich die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}=r-\frac{1}{a^2}(qu-p)^2$$

und auch deren Multiplicator.

Dieses Resultat wird einfacher, wenn man noch die weiteren Annahmen:

$$q=e^{\int pdx},\qquad r=p^2-p',\qquad a=1,\quad b=c=0$$

macht. Es folgt dann:

$$\int pqdx=e^{\int pdx},\qquad u=(y+p)e^{-\int pdx},\quad p-qu=-y$$

und man erhält

$$\frac{dy}{dx} = p^2 - p' - y^2, \qquad \rho = \frac{e^{2\int p dx}}{(y+p)^2}$$

wie Euler im Art. 531 seiner Integralrechnung gefunden hat.

4.

Ähnlich wie im Art. 2 ist zu verfahren, wenn der Multiplicator als Function von y und z gegeben ist.

Wird

$$\rho = F(y, z)$$

gesetzt, so erscheint die Bedingung der Integrabilität in der Form

$$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left(F + z\frac{\partial F}{\partial z}\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -z\frac{\partial F}{\partial y}$$

und ist wieder eine partielle Differentialgleichung, durch deren Integration die allgemeinste, dem Ausdrucke ρ entsprechende Bestimmung von z gefunden wird. Aus den hiezu dienenden gewöhnlichen Gleichungen

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy}{F + z\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dz}{z\frac{\partial F}{\partial y}}$$

folgt zunächst:

$$z\frac{\partial F}{\partial y}dy + z\frac{\partial F}{\partial z}dz + F dz = 0$$

und es ist daher

$$zF = C_1$$

ein Integral jener Gleichungen. Kann hieraus y als Function von z, folglich auch

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{z\frac{\partial F}{\partial y}} = \Phi(z, C_1)$$

berechnet werden, so ergibt sich ein zweites und sofort auch das allgemeine Integral aus der Gleichung:

$$x + \int \Phi(z, C_1)\, dz = \varphi(C_1)$$

wenn hierin nach Ausführung der Quadratur $C_1 = zF$ gesetzt wird. Lässt sich dagegen die Gleichung $zF = C_1$ nach z auflösen, somit auch

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{F + z\frac{\partial F}{\partial z}} = \Psi(y, C_1)$$

finden, so ist

$$x - \int \Psi(y, C_1)\, dy = \psi(C_1)$$

das allgemeine Integral, wenn wieder $C_1 = zF$ gesetzt wird.

Es sei z. B.

$$\rho = \frac{1}{y} \cdot f(z)$$

Man findet:

$$\frac{z}{y} f(z) = C_1, \qquad x - \frac{y}{z} = C_2$$

also für z die Gleichung

$$zf(z) = y\varphi\left(x - \frac{y}{z}\right)$$

worin wieder f und φ beliebige Functionen sind.

Wenn man, für ein zweites Beispiel, mit p und q Functionen von y bezeichnet und die Relation

$$\rho = pz + \frac{q}{z}$$

als gegeben betrachtet, so besteht zunächst wieder ein Integral

$$pz^2 + q = C_1$$

Ferner erhält man

$$dx = \frac{pz^2 - q}{2pz^3}\, dy$$

und wenn z eliminirt wird:

$$dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(C_1 - 2q)\sqrt{p}}{(C_1 - q)^{\frac{3}{2}}}\, dy$$

Es ist daher

$$x = \frac{1}{2}\int \frac{(C_1 - 2q)\sqrt{p}}{(C_1 - q)^{\frac{3}{2}}}\, dy + \varphi(C_1)$$

das allgemeine Integral, respective die Gleichung für z, wenn nach Ausführung der Quadratur $pz^2 + q$ für C_1 gesetzt wird.

5.

In dem allgemeineren Falle, wenn ρ eine gegebene Function aller drei Grössen x, y, z ist, finden ebenfalls einige aus der Integrabilitätsbedingung hervorgehende Formeln statt, welche öfter die Anwendung des Verfahrens erleichtern und daher vorangeschickt werden sollen.

Ausgehend von der Relation

$$\rho = F(x, y, z)$$

erhält man für z die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left[F + z\frac{\partial F}{\partial z}\right] \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\left[\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}\right]$$

deren allgemeines Integral mit Hilfe der gewöhnlichen Gleichungen:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy}{F + z\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \ldots (\mathrm{I})$$

gefunden werden muss.

Diese Gleichungen lassen sich umformen.

Werden dieselben unter sich und mit der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = dF$$

durch Elimination von je zwei Differentialquotienten von F verbunden, so erhält man

$$(z\,dx - dy)\frac{\partial F}{\partial z} + F\,dx = 0$$

$$(z\,dx - dy)\frac{\partial F}{\partial y} + \quad dF = 0$$

$$(z\,dx - dy)\frac{\partial F}{\partial x} - d.zF = 0$$

Es ist daher:

$$\frac{F\,dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dF}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{d.zF}{\frac{\partial F}{\partial x}} \qquad \ldots\text{(II)}$$

In manchen Fällen lässt sich die Integration der Differentialgleichung für z leichter mit Hilfe der Gleichungen (II) als mittelst der ursprünglichen (I) ausführen.

6.

Um ein Beispiel zu betrachten, nehme man an, es sei

$$p = f(zX + Y) = F$$

gegeben, wobei X, Y Function von x, respective y bezeichnen und der Abkürzung wegen

$$u = zX + Y$$

gesetzt werden soll. Da alsdann:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = Xf'(u), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = Y'f'(u), \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = zX'f'(u)$$

so folgt aus den Gleichungen (II):

$$\frac{f(u)\,dx}{X} = \frac{df(u)}{Y'} = -\frac{d.zf(u)}{zX'} \qquad \ldots(1)$$

Wie man sieht, lässt sich eine Integration sofort ausführen, wodurch die Gleichung

$$zXf(u) = C_1$$

also auch $\qquad \ldots(2)$

$$Y = u - \frac{C_1}{f(u)}$$

sich ergibt.

Hiedurch ist y, somit auch Y' durch u bestimmt; es sei

$$Y' = \Phi(u, C_1)$$

Dies vorausgesetzt, kann nun auch ein zweites Integral der Gleichungen (1) und damit zugleich das allgemeine Integral, nämlich die Gleichung für z gefunden werden. Diese ist:

$$\int \frac{dx}{X} - \int \frac{f'(u)\,du}{f(u)\,\Phi(u, C_1)} = \varphi(C_1)$$

wenn nach ausgeführter Quadratur durchgehends $zXf(u)$ für C_1 und $zX + Y$ für u gesetzt wird.

In dieser ihrer Art nach ziemlich allgemeinen Aufgabe sind u. a. auch verschiedene bekannte Resultate als specielle Fälle enthalten.

1. Es sei $X = x$, $Y = -y$, also

$$u = xz - y \qquad \text{und} \qquad \rho = f(xz - y)$$

Die Gleichungen (1) sind dann:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{df(u)}{f(u)} = \frac{d.zf(u)}{zf(u)}$$

daher ihre beiden Integrale:

$$xf(u) = C_1, \qquad z = C_2$$

und das allgemeine Integral

$$xf(xz - y) = \varphi(z)$$

Genügt z dieser Bedingung, so ist $f(xz - y)$ ein Multiplicator der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = z$.

Wird beispielsweise

$$f(u) = \frac{1}{u}$$

gesetzt, so hat man:

$$\frac{x}{xz - y} = \varphi(z) \qquad \text{oder also} \qquad \frac{1}{z - \frac{y}{x}} = \varphi(z)$$

Hieraus aber folgt

$$z = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

daher ist

$$\rho = \frac{1}{x\psi\left(\frac{y}{x}\right) - y}$$

ein Multiplicator der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Um dieses bekannte Resultat in die übliche Form zu bringen, seien p und q homogene Functionen gleichen Grades von x und y. Dann kann $\psi\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{p}{q}$ gesetzt werden und folgt, dass, abgesehen vom Zeichen der Ausdruck

$$\frac{1}{px+qy}$$

ein Multiplicator der Gleichung $pdx+qdy=0$ ist (S. Euler, Art. 477).

2. Entgegen den im vorigen Falle gemachten Annahmen, sollen nun X und Y ihre allgemeine Bedeutung behalten, zugleich aber

$$f(u) = \frac{1}{u}, \qquad u = zX+Y$$

gesetzt werden. Man hat dann aus (2) die Gleichungen:

$$zX = C_1 u, \qquad Y = (1-C_1)u$$

und aus (1)

$$\frac{dx}{X} = -\frac{1}{Y'}\cdot\frac{du}{u} = -\frac{dy}{Y}$$

was sich übrigens auch aus den beiden ersten Gliedern der Gleichungen (I) ergeben hätte.

Die beiden Integrale der Hilfsgleichungen sind daher:

$$\frac{zX}{zX+Y} = C_1, \qquad \int\frac{dx}{X} + \int\frac{dy}{Y} = C_2$$

Um ohne weitere Transformationen den einfachsten Ausdruck für z zu erhalten, setze man:

$$\varphi(C_2) = \frac{C_1}{C_1-1}$$

dann folgt:

$$z = -\frac{Y}{X}\varphi\left(\int\frac{dx}{X}+\int\frac{dy}{Y}\right)$$

wozu

$$\rho = \frac{1}{Y\left[1-\varphi\left(\int\frac{dx}{X}+\int\frac{dy}{Y}\right)\right]}$$

gehört.

Diese beiden Gleichungen sind schon in der Integralrechnung von Euler, Art. 534—539, und zwar aus der oben erwähnten homogenen Differentialgleichung und ihrem Multiplicator durch Einführung neuer Veränderlichen abgeleitet worden und hätten darum als bekannt vorausgesetzt werden können. Dieselben sind aber gerade hier besonders hervorzuheben, weil sie den einzigen Fall betreffen, in welchem Euler ein Ergebniss seiner Methode zu grösserer Allgemeinheit erhoben hat.

Für ein Beispiel sei $X = 1+x^2$, $Y = -(1+y^2)$. Man findet

$$z = \frac{1+y^2}{1+x^2}\varphi\left(\frac{1+xy}{x-y}\right), \qquad \rho = \frac{1}{(1+y^2)\left[1-\varphi\left(\frac{1+xy}{x-y}\right)\right]}$$

oder, wenn $\varphi(\sqrt{w^2+1})$ für $\varphi(w)$ gesetzt wird:

$$z = \frac{1+y^2}{1+x^2}\varphi\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x-y}\right),$$

$$\rho = \frac{1}{(1+y^2)\left[1-\varphi\left(\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{x-y}\right)\right]}$$

Diese Formeln enthalten die Erweiterung eines von Euler auf anderem Wege gefundenen Resultates. Wird nämlich $\varphi(w) = -aw$ gesetzt, so ergibt sich:

$$z = -a.\frac{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{(x-y)\sqrt{1+x^2}},$$

$$\rho = \frac{x-y}{(1+y^2)[x-y+a\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]}$$

und hieraus folgt, dass die Gleichung:

$$a \cdot \frac{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+x^2}} dx + (x-y)\, dy = 0$$

durch den Factor

$$\frac{1}{(1+y^2)[x-y+a\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}]}$$

integrabel wird, wie Euler, Art. 434 und 489 angibt.

7.

Noch mehrere andere von Euler herrührende Resultate dieser Art lassen sich, beträchtlich erweitert, aus einer einzigen Differentialgleichung und deren Multiplicator ableiten, obgleich sie auf verschiedenen Wegen ermittelt wurden und scheinbar in keinem Zusammenhange stehen.

Um dies zu zeigen, setze man an die Stelle der im vorigen Artikel für ρ angenommenen Gleichung die folgende:

$$\rho = \frac{Y_0}{zX+Y} = F$$

worin Y_0 eine Function von y bezeichnet. Aus den Gleichungen (I) und (II) gehen dann durch Integration ganz analog wie im vorigen Artikel die Formeln

$$zXF = C_1, \qquad \int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y} = C_2$$

hervor, mittelst welcher, wenn $C_1 \varphi(C_2) + 1 = 0$ gesetzt wird, für z die Gleichung

$$zX + Y + zXY_0 \varphi\left(\int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y}\right) = 0$$

sich ergibt. Der vorliegende Fall aber ist so einfach, dass es der Berechnung von z nicht bedarf; denn setzt man $\frac{dy}{dx}$ für z und multiplicirt die vorige Gleichung mit

$$\frac{1}{XY\varphi\left(\int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y}\right)}$$

so wird dieselbe integrabel. Es sei der Kürze wegen

$$u = \int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y}$$

dann ist das Integral:

$$\int \frac{du}{\varphi(u)} + \int \frac{Y_0}{Y} dy = \text{Const.}$$

Für die Anwendung auf specielle Fälle ist es bequem,

$$\varphi(u) = f(e^u) \qquad \text{und} \qquad e^u = w$$

zu setzen, so dass

$$\frac{du}{\varphi(u)} = \frac{dw}{wf(w)}$$

wird. Das Ergebniss ist also folgendes:

Die Differentialgleichung

$$Ydx + Xdy + XY_0 f(w) dy = 0 \qquad \ldots(1)$$

wird durch den Factor

$$\frac{1}{XYf(w)} \qquad \ldots(2)$$

integrabel und ihr Integral ist:

$$\int \frac{dw}{wf(w)} + \int \frac{Y_0}{Y} dy = \text{Const.} \qquad \ldots(3)$$

mit der Bedingung, dass

$$w = e^{\int \frac{dx}{X} + \int \frac{dy}{Y}} \qquad \ldots(4)$$

gesetzt werde.

In diesen Formeln ist, obgleich sie als selbstverständlich erscheinen mögen, eine Reihe beachtenswerther, mehr oder weniger alllgemeiner Fälle enthalten, wie nun gezeigt werden soll.

8.

1. Es sei

$$X = -x, \qquad Y = \frac{y(y-c)}{c}, \qquad Y_0 = -\frac{y}{c}$$

Dann folgt $w = \frac{y-c}{xy}$ und aus (1) die Differentialgleichung:

$$y(y-c)dx - x\left[c - yf\left(\frac{y-c}{xy}\right)\right]dy = 0$$

Für den Multiplicator findet man den Ausdruck

$$\frac{1}{xy(y-c)f\left(\frac{y-c}{xy}\right)}$$

und als Integral die Gleichung:

$$\int \frac{dw}{wf(w)} - \log(y-c) = \text{Const.}$$

Beispiel. Es sei

$$f(w) = \frac{1}{a}[cw^2 + bw + a]$$

daher

$$c - yf\left(\frac{y-c}{xy}\right) = \frac{c-y}{ax^2y}[y(ax^2+bx+c) - c^2]$$

Hieraus folgt: Die Differentialgleichung

$$axy^2dx + [y(ax^2+bx+c) - c^2]dy = 0$$

wird durch den Factor

$$\frac{1}{y^2(ax^2+bx+c) - cy(bx+2c) + c^3}$$

integrabel und ihr Integral ist:

$$a\int \frac{dw}{w(cw^2+bw+a)} - \log(y-c) = \text{Const.}$$

2. Wie vorhin sei

$$X = -x, \quad Y = \frac{y(y-c)}{c}, \quad \text{dagegen} \quad Y_0 = -\frac{y^2}{c}.$$

Hier ist wieder $w = \frac{y-c}{xy}$. Aus (1) folgt die Differentialgleichung

$$y(y-c)\,dx - x\left[c - y^2 f\left(\frac{y-c}{xy}\right)\right] dy = 0,$$

aus (2) deren Multiplicator

$$\frac{1}{xy(y-c) f\left(\frac{y-c}{xy}\right)}$$

und aus (3) das allgemeine Integral

$$\int \frac{dw}{w f(w)} - y - c \log (y-c) = \text{Const.}$$

Beispiel. Setzt man

$$f(w) = \frac{1}{ac}\left[cw^2 + bw + a\right]$$

so ergibt sich

$$c - y^2 f\left(\frac{y-c}{xy}\right) = \frac{c-y}{acx^2}\left[y(ax^2+bx+c) + c(ax^2-c)\right]$$

daher die Differentialgleichung

$$acxy\,dx + \left[y(ax^2+bx+c) + c(ax^2-c)\right] dy = 0$$

Als Multiplicator derselben findet man den Ausdruck

$$\frac{y}{y^2(ax^2+bx+c) - c(bx+2c)y + c^3}$$

und als Integral die Gleichung:

$$ac \int \frac{dw}{w(cw^2+bw+a)} - y - c \log (y-c) = \text{Const.}$$

Diese Formeln sind — mit Ausnahme des Integrals — von Euler a. a. O. Art. 498—501 aufgestellt worden.

3. Es sei jetzt:

$$X = -x, \quad Y = y + c, \quad Y_0 = \frac{1}{y}$$

wofür $w = \frac{y+c}{x}$ und aus (1) die Gleichung:

$$(y+c)\,dx - x\,dy - \frac{x}{y} f\left(\frac{y+c}{x}\right) dy = 0$$

folgt. Schreibt man diese in der Form

$$y(y+c)\,dx - x\left[y + f\left(\frac{y+c}{x}\right)\right] dy = 0$$

so ist

$$\frac{1}{xy\,(y+c)\,f\left(\frac{y+c}{x}\right)}$$

der Multiplicator. Für das allgemeine Integral ergibt sich die Gleichung:

$$\int \frac{dw}{wf(w)} + \frac{1}{c}\log\frac{y}{y+c} = \text{Const.}$$

Beispiel. Der Annahme

$$f(w) = \frac{1}{a}\left[w^2 + bw + ac\right]$$

entsprechend, erhält man:

$$y + f\left(\frac{y+c}{x}\right) = \frac{y+c}{ax^2}\left[y + ax^2 + bx + c\right]$$

und

$$xy\,(y+c)\,f\left(\frac{y+c}{x}\right) = \frac{y(y+c)}{ax}\left[y^2 + (bx+2c)\,y + c\,(ax^2+bx+c)\right]$$

Hieraus folgt: Die Differentialgleichung

$$axy\,dx - \left[y + ax^2 + bx + c\right] dy = 0$$

wird durch den Factor

$$\frac{1}{y\left[y^2 + (bx+2c)\,y + c\,(ax^2+bx+c)\right]}$$

integrabel, und es ist:

$$\int \frac{dw}{w[w^2+bw+ac]} + \frac{1}{ac}\log\frac{y}{y+c} = \text{Const.}$$

ihr Integral.

Euler ist a. a. O. Art. 433, 488, 493 zu dieser Differentialgleichung und deren Multiplicator auf verschiedenen Wegen gelangt. **Jacobi** hat bekanntlich jene Gleichung nach einer anderen Richtung verallgemeinert.

4. Wie vorhin sei

$$X = -x, \quad Y = y+c, \quad \text{dagegen} \quad Y_0 = \frac{1}{y^2}.$$

Es ist dann wieder $w = \frac{y+c}{x}$. Man erhält die Differentialgleichung

$$y^2(y+c)dx - x\left[y^2+f\left(\frac{y+c}{x}\right)\right]dy = 0$$

und als Multiplicator den Ausdruck:

$$\frac{1}{xy^2(y+c)f\left(\frac{y+c}{x}\right)}$$

ferner die Integralgleichung:

$$\int\frac{dw}{wf(w)} - \frac{1}{cy} + \frac{1}{c^2}\log\frac{y+c}{y} = \text{Const.}$$

Beispiel. Für

$$f(w) = -c[aw^2+bw+c]$$

folgt

$$y^2+f\left(\frac{y+c}{x}\right) = -\frac{y+c}{x^2}[y(ac-x^2)+c(x^2+bx+ac)]$$

$$xy^2(y+c)f\left(\frac{y+c}{x}\right) = -\frac{cy^2(y+c)}{x}[ay^2+(bx+2ac)y+c(x^2+bx+ac)]$$

Man hat daher die Differentialgleichung:

$$xy^2dx+[y(ac-x^2)+c(x^2+bx+ac)]dy = 0$$

und für den Multiplicator, abgesehen vom Zeichen, den Ausdruck

$$\frac{1}{y^2[ay^2+(bx+2ac)y+c(x^2+bx+ac)]}$$

Das Integral ist:

$$\int\frac{dw}{w(aw^2+bw+c)}+\frac{1}{y}-\frac{1}{c}\log\frac{y+c}{y}=\text{Const.}$$

5. Wird für einen letzten Fall angenommen, es sei

$$X=\frac{x(x^n+b)}{b}, \qquad Y=-y, \qquad Y_0=y^n$$

so folgt

$$\int\frac{dx}{X}+\int\frac{dy}{Y}=\log\frac{x}{y\sqrt[n]{x^n+b}}$$

also

$$w=\frac{x}{y\sqrt[n]{x^n+b}}$$

ferner die entsprechende Differentialgleichung

$$by\,dx-x(x^n+b)\left[1+y^nf\left(\frac{x}{y\sqrt[n]{x^n+b}}\right)\right]dy=0$$

und der Multiplicator

$$\frac{1}{xy(x^n+b)f\left(\frac{x}{y\sqrt[n]{x^n+b}}\right)}$$

Das Integral ist:

$$\int\frac{dw}{wf(w)}-\frac{y^n}{n}=\text{Const.}$$

Beispiel. Für

$$f(w)=-(w^n+abw^{n-1})$$

ergibt sich hieraus die Gleichung:

$$y\,dx-x\,dy+ax^ny\sqrt[n]{x^n+b}\,.\,dy=0$$

und der Multiplicator

$$\frac{y^{n-1}}{x^{n+1}+abx^n y\sqrt[n]{x^n+b}}$$

ferner das Integral

$$\int\frac{dw}{w^n(w+ab)}+\frac{y^n}{n}=\text{Const.}$$

Auch dieses Resultat findet man in der Integralrechnung von Euler, Art. 490.

Obgleich die Integrale der in diesen fünf Fällen vorkommenden Differentialgleichungen durch die Formel (3) des vorigen Artikels unmittelbar bestimmt sind, so wurden doch die betreffenden Multiplicatoren der Vergleichung mit den Euler'schen Formeln wegen und weil sie zur vorliegenden Aufgabe gehören, ausführlich angegeben.

Über die Messung der Dielektricitätsconstante mittelst Hertz'scher Schwingungen

von

Dr. **Ernst Lecher.**

(Mit 2 Textfiguren.)

Aus dem physikalischen Cabinete der k. k. Universität in Wien.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die von **Maxwell** geforderte Übereinstimmung zwischen der Dielektricitätsconstante und dem Quadrate des Brechungsexponenten in der Mehrzahl der Fälle nicht stattfindet, dass daher, wenn man an der Richtigkeit der Maxwell'schen Theorie festhalten will, noch störende Nebenerscheinungen bei der gewöhnlich als Dielektricitätsconstante gemessenen Grösse auftreten. Während bei vollkommenen Isolatoren — deren Anzahl aber eine sehr kleine ist — die Übereinstimmung noch eher befriedigen könnte, sind die Abweichungen bei minder guten Isolatoren sehr beträchtlich. Nun hat Schiller[1] gezeigt, dass für einige Substanzen bei einer sehr kurzen Ladungszeit die Dielektricitätsconstanten sich mehr der Maxwell'schen Forderung nähern als bei Versuchen mit statischer Elektricität. Ebenso scheint auch aus den Versuchen und Überlegungen von E. Cohn und L. Arons[2] ein Anwachsen der Dielektricitätsconstanten mit der Ladungsdauer sich zu ergeben. Es liegt daher die Idee sehr nahe, dass nur bei äusserst kurzen Ladungszeiten die Übereinstimmung zutrifft.

Von ähnlichen Gesichtspunkten ausgehend, hat J. J. Thomson[3] einige Dielektricitätsconstanten mit Hilfe der Hertz'schen

---

1 Pogg. Ann. 152, S. 535, 1874.

2 Wied. Ann. 28, S. 454, 1886 und 33, S. 13, 1888.

3 Proc. Lond. Roy. Soc. 46, S. 292, 1889.

Schwingungen gemessen. Ich habe nun — ohne Kenntniss der Thomson'schen Arbeit — fast identische Versuche angestellt. Da aber meine Resultate von jenen Thomson's abweichen, so erlaube ich mir, dieselben hier mitzutheilen.

Ich fand nämlich, dass bei vier Substanzen, welche ich untersuchte, die Dielektricitätsconstante, in der einfachen und nächstliegenden Weise aus der Capacität berechnet, bei kürzeren Ladungszeiten nicht nur nicht sank, sondern bei Hertz'schen Schwingungen sogar grösser wurde.

Wenn ich den Ausdruck „Dielektricitätsconstante" gebrauche, so ist dies eigentlich nicht richtig. Ich habe nämlich immer nur Capacitäten mit einander verglichen, wobei entweder Luft oder die zu untersuchende Substanz zwischen den beiden Platten sich befand. Es wurden also bei den von mir gefundenen Resultaten neben der Dielektricitätswirkung auch die Leitung, Rückstandsbildung und sonstige unbekannte Fehler in die Messung einbezogen. Man hätte nun erwarten können, dass diese Nebenumstände: Leitung, etc. bei den raschen Ladungen der Hertz'schen Schwingung schon ganz eliminirt seien; es zeigt sich aber, dass selbst bei so unglaublich kurzen Ladungszeiten diese Nebenumstände immer noch, und zwar in sogar stärkerem Masse den wirklichen Werth der Dielektricitätsconstante vergrössern, vorausgesetzt natürlich, dass überhaupt die Anschauungen von Maxwell massgebend sind.

Ich habe zwei feste Körper, Hartgummi und Glas, und zwei Flüssigkeiten, Petroleum und Wasser, mittelst dreier verschiedener Methoden untersucht. Die Ladungszeit betrug:

0·5, 0·0005 und 0·00000003 Secunden.

Versuche mit Hertz'schen Schwingungen.

Eine nähere Untersuchung aller Bedingungen, welche in dieser Methode zur Geltung gelangen, habe ich in der bereits veröffentlichten Abhandlung: „Studie über elektrische Resonanzerscheinungen"[1] geschildert. Es wurde bei gegenwärtiger Arbeit genau derselbe Apparat angewendet. In zwei parallelen Drähten (Fig. 1), *st* und *s't'*, von je 1122 *cm* Länge (in der Figur stück-

[1] Diese Berichte, Bd. 99, S. 340, 1890.

weise gezeichnet) und einer gegenseitigen Entfernung von 31 *cm* werden in bekannter Weise elektrische Oscillationen durch oscillatorische Ladung der Condensatoren *AB* und *A'B'* mittelst des Funkens *F* erzeugt. Von den Enden der beiden Hauptdrähte *t* und *t'* führen zwei weiche Kupferdrähte von je 69·7 *cm* Länge zu zwei kreisförmigen Condensatorplatten ($R = 9 \cdot 68\,cm$); die letzteren können mit Hilfe einer Mikrometerschraube parallel verschoben werden. Durch Überbrückung der Hauptdrähte an bestimmten Stellen kommt die luftleere Glasröhre *GG'* zum Leuchten. Jede Veränderung der Capacität am Ende der Drähte verschiebt den Schwingungsbauch; man muss daher die Querbrücke an eine andere Stelle bringen, damit die Röhre wieder aufleuchte.

Ich habe nun zunächst die Wellenlänge einiger Schwingungen, wenn nur Luft zwischen den Condensatorplatten war,

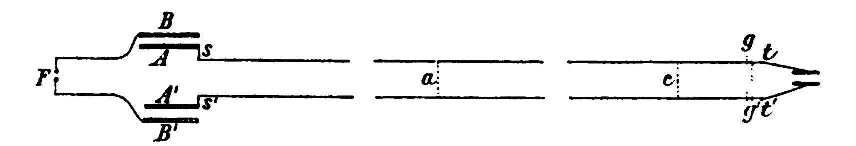


Fig. 1.

sehr genau gemessen. Hierauf wurden die Condensatorscheiben auseinander geschraubt und die zu untersuchende Substanz zwischen dieselben geschoben. Durch einige flüchtige Vorversuche wurde die ungefähre Abhängigkeit des Schwingungsbauches von der Entfernung der Platten bestimmt und dann für eine oder zwei in solcher Art gefundene Entfernungen neuerdings die Lage des Schwingungsbauches möglichst genau bestimmt. Es war somit schliesslich in den beiden Fällen, die ich verglich, die Hauptschwingung die gleiche: die Überbrückung genau an derselben Stelle; nur die Entfernung der Condensatorplatten an den Drahtenden war eine verschiedene, je nachdem Luft oder die untersuchte Substanz zwischen denselben sich befand. Da nun in beiden Fällen, bis auf die Capacitäten am Ende, Alles absolut gleich blieb, so setzte ich auch diese Capacitäten einander gleich und konnte sohin in einfacher Weise die Dielektricitätsconstante der untersuchten Substanz (oder genauer nur dasjenige, dem man oft fälschlich diesen Namen gibt) berechnen.

Folgende Tabellen geben zunächst die Zahlen für den Fall, als Luft zwischen den Condensatorplatten sich befand.

Tabelle I.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	1·449	1·500	1·551	1·600	1·674	1·720
Entfernung des Schwingungsbauches *a* vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Luft.	590·2	586·7	581·5	581·8	572·3	568·2
	593·3	585·6	583·5	579·7	569·4	572·5
	592·8	587·6	581·3	576·0	570·1	570·6
	595·1	588·4	582·8	583·4	575·7	569·9
	593·4	586·3	585·3	579·0	575·6	568·5
	592·3	585·3	582·9	580·6	575·5	570·0
	590·9	584·5	585·2	580·5	573·3	571·3
	591·3	588·6	585·1	582·5	577·0	574·0
	593·1	587·8	584·1	579·0	575·1	571·4
	595·0	586·4	583·7	581·0	572·5	569·0
Mittel	592·74	586·72	583·84	580·35	573·65	570·54

Tabelle II.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	1·000	1·050	1·100
Entfernung des Schwingungsbauches *a* vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Luft.	639·7	635·4	631·4
	644·2	630·8	630·3
	641·5	630·9	625·2
	643·5	633·0	629·7
	642·8	631·8	625·1
	639·5	637·8	627·0
	640·2	631·0	632·2
	639·0	635·2	631·9
	643·2	635·4	632·0
	641·2	635·5	627·0
Mittel	641·48	633·68	629·18

Tabelle III.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	1·449	1·500	1·551	1 600
Entfernung des Schwingungsbauches *c* vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Luft.	1046·6	1043·6	1045·0	1038·0
	1045·1	1043·4	1041·6	1036·5
	1043·8	1044·0	1044·8	1037·5
	1047·8	1043·3	1040·6	1041·0
	1046·0	1042·7	1039·3	1041·5
	1048·2	1042·3	1042·1	1037·8
	1045·6	1044·5	1041·5	1039·0
	1046·0	1044·8	1042·4	1036·0
	1043·4	1044·9	1041·8	1038·8
	1044·9	1043·5	1038·2	1040·3
Mittel	1045·74	1043·70	1041·73	1038·64

Die Entfernung der Condensatorscheiben von einander ist in Theilen der Mikrometerschraube angegeben, von welchen eine ganze Umdrehung, 0·1, gleich 0·791 *mm* ist. Für je eine Condensatordistanz sind 10 Einstellungen der Querbrücke gemacht worden. Man ersieht zugleich aus den Tabellen die überraschende Genauigkeit, mit welcher sich die Einstellungen ausführen lassen. Nach jeder Messung wurde die Querbrücke von einem Gehilfen soweit verschoben, bis die Röhre ganz dunkel wurde, so dass jede neue Einstellung durch äusserst vorsichtiges Gleiten der Querbrücke längs den Drähten immer wieder erst von Neuem gefunden wurde. Trotzdem betragen die höchsten Schwankungen 5—6 *cm*, gewöhnlich aber noch weniger. Bei 1800 Einstellungen, welche ich im Ganzen gemessen, war nur dreimal eine Abweichung vom Mittel um 5 *cm* als äusserster Fehler constatirt.

Die Tabellen I und II geben die Lage des Schwingungsbauches *a*, Tabelle III jene des Schwingungsbauches *c* an. Die beiden Schwingungsdauern verhalten sich ungefähr wie 1 : 2. Die Bedeutung von *a* und *c* ist dieselbe, wie die in meiner oben citirten Arbeit über elektrische Resonanz.

Nach diesen drei Tabellen habe ich drei Curven gezeichnet und getrachtet, nach Einschiebung der zu untersuchenden Substanz den neuen Schwingungsbauch innerhalb der eben gefundenen Grenzen unterzubringen, was durch eine entsprechende Verschiebung der Condensatorplatten leicht gelingt.

Hartgummi. Wenn zwischen den Condensatorscheiben eine Hartgummiplatte sich befand, erhielt ich das folgende Resultat:

Tabelle IV.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	Schwingungsbauch		
	a		*c*
	1·600	2·150	2·150
Entfernung des Schwingungsbauches vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Hartgummiplatte 0·7164	644·7	586·2	1043·0
	643·0	584·6	1042·0
	643·3	583·2	1041·9
	639·5	585·1	1040·2
	640·7	584·8	1043·1
	640·7	585·5	1040·0
	640·0	590·3	1038·3
	638·7	585·5	1039·8
	643·2	584·2	1038·1
	642·5	585·2	1042·8
Mittel	641·63	585·46	1040·92

Die Hartgummiplatte war viereckig und ragte an der kürzesten Stelle 4 *cm* über die Condensatorscheibe hervor, besass daher parallel der letzteren eine unendliche Ausdehnung. Die Dicke der Hartgummiplatte wurde mit Hilfe einer eigens zu diesem Zwecke construirten Mikrometerschraube, welche in einem Messingrahmen befestigt war, gemessen. Dieser Messingrahmen ist so gross, dass die Schraube an alle Stellen des Dielektricums gebracht werden konnte. Der Hartgummi wurde nun innerhalb jenes Bezirkes, der zwischen den Condensatorplatten lag, in Quadrate getheilt und die Dicke an den Ecken dieser Quadrate gemessen. Die in obiger Tabelle angegebene Zahl ist

das Mittel aus Messungen an 20 verschiedenen Stellen und es ist dieser mathematische Mittelwerth, wie schon Boltzmann[1] gezeigt, gewiss auch, innerhalb der Fehlergrenze, der hier in Betracht kommende elektrische Mittelwerth.

Der erste der jetzt gefundenen Schwingungsbäuche, 641·63 *cm*, entspricht in einer Curve, die ich nach Tabelle II gezeichnet (hier nicht mitgetheilt), einer Entfernung der Condensatorplatten von 0·9995 Theilen der Mikrometerschraube für den Fall, wo Luft zwischen denselben sich befand. (Eine Berechnung der Condensatorentfernung mittelst einfacher Interpolation gibt hier — und auch sonst in analogen Fällen — fast genau den gleichen Werth wie obige Curve.) Es ist daher die Capacität des Condensators bei einer Entfernung von 0·9995 Theilen der Mikrometerschraube, wenn Luft zwischen den Platten ist, ebenso gross, wie bei einer Entfernung von 1·6000, wenn die Hartgummiplatte sich dazwischen befindet. Die Differenz (1·6000—0·9995 =) 0·6005 entspricht der Zunahme der Condensatordicke infolge der Einschiebung der Hartgummiplatte.

Für die Lage des zweiten gemessenen Schwingungsbauches von 585·46 *cm* hatten wir beim Luftcondensator eine Dicke von 1·5230, während nach Einschiebung der Hartgummiplatte dieselbe 2·1500 war. Die Differenz betrug in diesem Falle 0·6270.

Für den dritten Schwingungsbauch, 1040·92 *cm*, endlich hatten wir bei Luft eine Plattendistanz von 1·5610. Die Differenz zwischen der jetzigen (2·1500) und dieser betrug 0·5890.

Diese drei Differenzen 0·6005, 0·6270 und 0·5890 sollten eigentlich gleich sein. Da die Abweichung weder hier noch in späteren Fällen irgend welche Regelmässigkeit zeigt; da sie für den Schwingungsbauch *a* und für den Schwingungsbauch *e*, welch' letzterer einer doppelt so raschen Schwingung entspricht, bald grössere, bald kleinere Werthe ergibt; da sie endlich auch in keinerlei regelmässigem Zusammenhange mit der Entfernung der Condensatorscheiben zu stehen scheint, so dürften obige Differenzen durch Fehler in den Messungen entstanden sein, und zwar in erster Reihe infolge der Schwierigkeit, die Condensatorplatten parallel zu verschieben. Es wäre aber trotzdem die Überein-

---

[1] Diese Berichte, Bd. LXVII; Pogg. Ann., 151, S. 568, 1874.

stimmung derselben eine ziemlich befriedigende; sie wird aber selbstverständlich immer schlechter, wenn wir zur wirklichen Berechnung der Dielektricitätsconstante übergehen, und fällt hiebei die Abweichung umso grösser aus, je grösser die gemessene Dielektricitätsconstante ist. Ich nehme hier und in allen folgenden Fällen das Mittel dieser Differenzen und berechne mit demselben die Dielektricitätsconstante.

Das Mittel obiger drei Messungen ist 0·6055 Theile der Mikrometerschraube. Diese Zahl muss mit 0·791 multiplicirt werden, damit wir den Werth in Centimetern bekommen: 0·4789 *cm*. Es wird dann der so berechnete Werth von der Dicke des Dielektricums (0·7164) abgezogen, die Differenz (0·2375) in das Dielektricum hineindividirt und der Quotient ergibt die Dielektricitätsconstante. Für Hartgummi erhalte ich auf diese Weise 3·01 als Werth der Dielektricitätsconstante bei so kurzen Ladungsdauern, welche nach Hundertmilliontel Secunden zählen. Die halbe Wellenlänge der kürzeren Schwingung *c* beträgt circa 1000 *cm*.

Glas. Wenn zwischen den Condensatorplatten eine Glasscheibe sich befand, erhielt ich folgende Resultate:

Tabelle V.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	Schwingungsbauch *a*		Schwingungsbauch *c*
	2·000	2·470	2·470
Entfernung des Schwingungsbauches vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Glasplatte 0 8797 *cm* dick.	632·2	587·2	1044·0
	635·6	591·1	1044·0
	634·7	589·2	1041·5
	633·1	588·0	1041·6
	634·3	587·3	1042·8
	632·7	586·3	1041·1
	638·4	587·1	1039·9
	633·0	588·1	1045·0
	635·1	585·5	1042·9
	636·6	585·6	1044·6
Mittel	634·57	587·54	1042·74

Diese Tabelle benützte ich in derselben Weise wie die frühere. Die Entfernung der Condensatorscheiben von einander differirt, je nachdem die Glasplatte eingeschoben war oder nicht, um 0·9578, 0·9700 und 0·9521 Theile der Mikrometerschraube. Das Mittel dieser Differenzen beträgt 0·9600 und für die Dielektricitätsconstante findet sich ein Werth von 7·31.

Petroleum. Um die Flüssigkeitsschichte zwischen die Condensatorscheiben zu bringen, nahm ich einen Holzring, dessen innere Lichte im Durchmesser 14 *cm* betrug. Beiderseits wurden zwei dünne Glasplatten angeklebt und so ein scheibenförmiger Hohlraum zur Aufnahme der Flüssigkeit hergestellt. Die Dicke des ganzen Systems wurde an 30 Stellen gemessen, aber erst nach Einfüllung der Flüssigkeit, um auch die durch den Druck derselben hervorgerufene Ausbauchung in die Messung einzubeziehen. Vorerst wurden die beiden anzuklebenden Glasscheiben gleichfalls an 30 Stellen gemessen und hiedurch die Flüssigkeitsdicke genau bestimmt.

Die erste der folgenden Tabellen gibt die Beobachtungen bei eingefülltem Petroleum, die zweite eine Hilfsbeobachtung, wenn die beiden Glasscheiben, losgetrennt vom Ringe, allein zwischen den Condensatorplatten sich befanden.

Tabelle VI.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	Schwingungsbauch
	a
	3·600
Entfernung des Schwingungsbauches vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Petroleum und zwei Glasplatten. (1·9272+0·4338 *cm.*)	569·0 568·2 568·5 573·0 573·5 573·5 573·2 574·0 572·3 574·1
Mittel	571·93

Tabelle VII.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	Schwingungsbauch
	a
	2·010
Entfernung des Schwingungsbauches vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten zwei Glasplatten. (0·4338 *cm.*)	584·2 580·0 582·3 586·1 583·3 582·7 586·2 583·4 584·2 584·9
Mittel	583·93

Für den Schwingungsbauch 583·93 habe ich, wenn die Glasscheiben allein zwischen den Condensatorplatten sich befanden, als Entfernung der letzteren von einander 2·0101, wenn Luft zwischen dem Condensator war (aus Tab. I) 1·5460; die Differenz betrug 0·4641. Man erhält dann für die Dielektricitätsconstante des hier verwendeten Glases (Solinglas) 6·50, welcher Werth jedoch weniger genau sein dürfte als die anderen in dieser Arbeit angegebenen, weil die Glasscheiben zu dünn waren.

Um die Dielektricitätsconstante des Petroleums zu erhalten, habe ich zunächst für den Schwingungsbauch 571·93, wenn Petroleum und zwei Glasscheiben zwischen den Condensatorplatten waren, eine Distanz von 3·600 und, wenn nur Luft dazwischen war (nach Tabelle I), von 1·704 Schraubentheilen. Die Differenz dieser Zahlen, 1·896, muss noch um 0·4641 vermindert werden, welche Zahl, wie oben gezeigt, die Differenz für die zwei Glasscheiben bedeutet. Nach Wegnahme des 1·9272 *cm* dicken Petroleums allein (fictiv, die Glasscheiben blieben drinnen) müsste ich die Condensatorplatten um $1·4319 \times 0·791$ zusammenschieben und erhalte somit als Dielektricitätsconstante des Petroleums 2·42.

Das hier verwendete Petroleum war die gewöhnlich zum Brennen käufliche Flüssigkeit und enthielt etwas Wasser.

Wasser. Wenn ich in den Holzring destillirtes Wasser gab, so erhielt ich folgende Resultate:

Tabelle VIII.

Entfernung der Condensatorplatten von einander in Theilen der Mikrometerschraube	Schwingungsbauch
	a
	3·982
Entfernung des Schwingungsbauches vom Anfange in Centimetern. Zwischen den Condensatorplatten Wasser und zwei Glasplatten (1·9342+0·4338 *cm*).	633·3
	635·9
	633·8
	636·7
	634·2
	637·7
	635·6
	634·8
	636·9
	635·8
Mittel	635·47

Die Differenz, ebenso behandelt wie bei Petroleum, gibt hier 1·953 *cm* für eine Dicke des Dielektricums von 1·934 *cm*. Es ist also der Beobachtungsfehler schon zu gross; wollte ich aber auch hier ebenso wie vorhin die Dielektricitätsconstante berechnen, so wäre dieselbe für Wasser unendlich.

Versuche mit Rhumkorff-Schwingungen.

Zur Bestimmung der Dielektricitätsconstante mittelst Rhumkorff'scher Schwingungen habe ich ein Verfahren angewendet, welches sehr bequem und einfach ist und eine recht genaue Messung ermöglicht. Diese Methode ist in mancher Beziehung der von Gordon[1] angewendeten ähnlich, ist aber viel einfacher als die letztere. Der eine Pol des Rhumkorff-Apparates *R* (Fig. 2) ist zur Erde abgeleitet; vom zweiten Pol geht eine Leitung über *r* zum Condensator *C*, die zweite zum Vergleichscondensator *E*. Die beiden anderen Platten dieser Condensatoren, *C'* und *E'*, sind mittelst zweier paralleler Drähte mit den beiden Quadranten *q* und *q'* eines Thomson'schen Elektrometers (in einer etwas vereinfachten Form, wie sie Prof. Lang angab) verbunden. Die Lemniscate *l* des Elektrometers ist zur Erde abgeleitet. Die Wirkung dieser Installation ist unmittelbar ersichtlich. Sind die beiden Condensatoren gleich, so werden die beiden Quadranten in gleicher Weise abwechselnd geladen und die Nadel bleibt in Ruhe. Ist der eine Condensator kräftiger, erfolgt augenblicklich ein Ausschlag der Lemniscate nach dem betreffenden Quadranten.

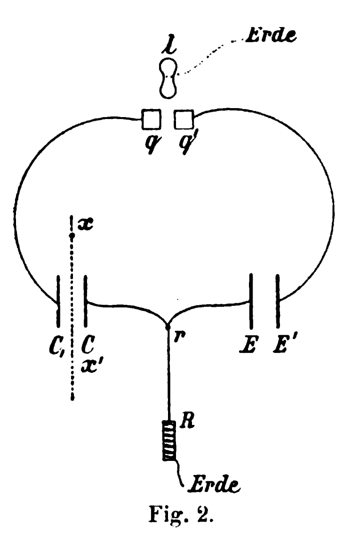


Fig. 2.

Zunächst wurde nun die zu untersuchende Platte *xx'* zwischen die Scheiben des einen Condensators *CC'* gebracht und der andere *EE'* (ein gewöhnlicher Kohlrausch'scher Plattencondensator) ungefähr eingestellt. Die schliessliche Einstellung erfolgte

[1] Wiedemann, Elektricität, 1883, Bd. II. S. 38.

durch die Mikrometerschraube des Condensators CC', desselben, den ich bei den Versuchen des vorigen Abschnittes verwendet habe. Die Ablesungen der Elektrometerausschläge geschahen mit Hilfe eines Fernrohres.

Diese Methode ist von einer überraschenden Empfindlichkeit; die Einstellungen sind sehr leicht auszuführen und auch eventuelle störende Einflüsse durch das rasche Auftreten der Wirkung leicht zu erkennen: Das Aufheben einer Hand, das Vorübergehen einer Person bringt momentan einen Ausschlag hervor.[1]

War die Einstellung mit dem zwischengeschobenen Dielektricum xx' bewerkstelligt, so wurde xx' entfernt und sodann — ohne geringste Veränderung an EE' — die Platte CC' so weit genähert, bis das Spiegelbild wieder auf Null zurückgekehrt war.

In folgenden Tabellen sind die Messungen zusammengestellt:

Tabelle IX.

	Hartgummi (0·7164 *cm*)		Glasplatte (0·8797 *cm*)	
Mit Dielektricum .	2·1610	1·6090	2·6278	2·0325
Mit Luft	1·5785	1·0249	1·7240	1·1285
Differenz . .	0·5825	0·5841	0·9038	0·9040

Tabelle X.

	Petroleum + zwei Glasplatten (1·9272+0·4338 *cm*)		Wasser + zwei Glasplatten (1·9342+0·4338 *cm*)		zwei Glasplatten (0·4338 *cm*)	
Mit Dielektricum .	3·6590	3·6560	4·2100	4·0035	1·8834	1·9240
Mit Luft	1·8120	1·8240	1·3410	1·1200	1·4401	1·4859
Differenz . .	1·8470	1·8320	2·8690	2·8835	0·4433	0·4381

[1] Ich möchte nebenbei bemerken, dass, wenn man an C' oder an E' Capacitäten anhängt, die Änderung in der Einstellung eine bedeutende ist; dass hingegen das Einschalten einer Spule in die Leitung, welche von C' oder E' zu den Quadranten führt, weniger ausgibt. Das Selbstpotentiale der Rhumkorff'schen Rolle ist eben ein sehr grosses, die Capacitäten hingegen verhältnissmässig klein. Auf den störenden Einfluss, welcher in Folge einer Dämpfung der Schwingung durch das Einschieben der Platten geschieht, werde ich noch zurückkommen.

Man erhält dann für die Dielektricitätsconstante von

Spiegelglas .... 5·34
Solinglas .... 5·09
Hartgummi .... 2·81
Petroleum .... 2·35
Wasser .... ∞

Diese Zahlen sind — abgesehen von den Fehlern in der Methode — genauer als die des vorhergehenden Abschnittes; am wenigsten stimmen die einzelnen Messungen der nächsten Methode.

Versuche mit einer statischen Ladung.

Die Anordnung ist genau so wie jene in Fig. 2 des vorigen Abschnittes, nur wird an Stelle des Inductoriums eine kleine Influenzmaschine gebracht. Die Pole werden nur auf 0·05 *cm* geöffnet, so dass die überspringenden Funken und die Potential-Differenzen ganz minimale sind. Der eine Pol ist zur Erde abgeleitet, der andere Pol wird dann rasch durch etwa 0·5 Secunden mit dem Punkte r in Verbindung gebracht. Im Übrigen erfolgt die Einstellung und Vergleichung der beiden Condensatoren genau so wie früher.

Für Wasser und Petroleum konnte ich hier keine Messung gewinnen, weil in diesem Falle xx' wie ein zur Erde abgeleiteter Schirm wirkte. Ich musste, um hier die Lemniscate auf Null zu bringen, mit E' in unendliche Entfernung von E gehen. Es machte sich die geringe Spur Wasser, die das Petroleum enthielt, und die dadurch verursachte Ableitung in so auffälliger Weise geltend.

Für die übrigen Substanzen gibt folgende Tabelle die Messungen:

Tabelle XI.

	Hartgummi (0·7164 *cm*)		Glasplatte (0·8797 *cm*)		zwei Glasplatten (0·4338 *cm*)	
Mit Dielektricum .	1·5820	2·0640	2·4885	1·9820	1·8631	1·9942
Mit Luft	1·0090	1·4863	1·6150	1·1062	1·4330	1·5638
Differenz . .	0·5730	0·5777	0·8735	0·8758	0·4301	0·4304

Für die Dielektricitätsconstante erhält man, und zwar für

Spiegelglas . . . . 4·67
Solinglas . . . . 4·64
Hartgummi . . . . 2·64.

Zusammenstellung der Resultate.

Eine Zusammenstellung der nach den drei Methoden erzielten Resultate ergibt Nachstehendes:

Tabelle XII.

Ladungszeit in Secunden	Dielektricitätsconstante von				
	Spiegelglas 0·8797 *cm*	Solinglas 0·4338 *cm*	Hartgummi 0·7164 *cm*	Petroleum 1·9272 *cm*	Wasser 1·9342 *cm*
0·5	4·67	4·64	2·64	Nicht gemessen	
0·0005	5·34	5·09	2·81	2·35	∞
0·00000003	7·31	6·50	3·01	2·42	∞

Die Dielektricitätsconstante wird bei raschen Schwingungen, wenn wir dieselbe — wie in vorliegender Arbeit und wie dies auch J. J. Thomson gethan — einfach aus der Capacität berechnen, nicht nur nicht kleiner, sondern sie wächst sogar erheblich. Wir haben diese Erscheinung bei sämmtlichen der untersuchten Substanzen gefunden und es sind die Differenzen entschieden zu gross, als dass man annehmen dürfte, dieselben rührten von nebensächlichen Fehlerquellen her. Ich meine daher im Gegensatze zu J. J. Thomson, dass man auch mit Hilfe der Hertz'schen Schwingungen der wahren Dielektricitätsconstante im Allgemeinen nicht näher kommen wird.

Für die Schwingungsdauer gilt mit Vernachlässigung einiger hier nicht in Betracht kommender Größen die Formel:

$$T^2 = pc(\lambda^2 + \pi^2),$$

wo p das Selbstpotential, c die Capacität und λ die Dämpfung der Schwingung bezeichnet. Diese Dämpfung λ wird bei raschen Schwingungen immer grösser und es wäre nicht unmöglich, dass bei unserer Hertz'schen Schwingung die durch die Dämpfung hervorgerufene Verzögerung der Schwingungsdauer die Haupt-

ursache der eben constatirten Vergrösserung der Dielektricitätsconstante wäre. Die Vorgänge im Dielektricum sind jedoch bei so raschen Schwingungen jedenfalls zu complicirter Natur, als dass ich diese Erklärung für das Ansteigen der Dielektricitätsconstante bei raschen Schwingungen als sicher aussprechen wollte.[1]

Es dürfte nun wohl für die meisten Substanzen ein ähnliches Wachsen der Dielektricitätsconstante, wie ich es bei den von mir untersuchten Körpern gefunden habe, zu erwarten sein, und es scheint mir das Experimentiren mit langsamen Schwingungen eher Aussicht auf Erfolg zu haben, da man dann, wie dies Schiller gethan oder wie dies Cohn und Arons versucht, die Nebenerscheinungen experimentell leichter trennen und gesondert zur Beobachtung bringen kann.

---

[1] Dass die Erscheinungen nicht so einfach sind und dass man in manchen Fällen, zu welchen auch die Messungen von J. J. Thomson zu zählen wären, durch die Hertz'schen Schwingungen auch eine Abnahme der Dielektricitätsconstante herausbekommen kann, zeigt folgender Versuch:

Die Condensatorplatten sind auf circa 28 *cm* Distanz geöffnet und zwischen dieselben ein Wassertrog von 27 *cm* Länge gestellt. Die Capacität dieses Condensators ist, nach meiner Methode mit Rhumkorff'schen Schwingungen gemessen, ganz gleich, ob das Gefäss destillirtes Wasser oder aber Wasser mit 10% Schwefelsäure enthielt. Bei den Hertz'schen Schwingungen hingegen wirkte das destillirte Wasser, in dieser grossen Ausdehnung angewandt, so, als ob es eine Dielektricitätsconstante von etwa 300 hätte. Giesst man aber nur einige Tropfen Schwefelsäure dazu, so hört die Schwingung ganz auf oder ist wenigstens nach meiner Methode nicht mehr sichtbar. Es wäre das Zwischenstellen so dicker Schichten insoferne von Vortheil, als man die grossen Dielektricitätsconstanten nicht mit Luft, sondern mit der Dielektricitätsconstante ∞ vergleicht. Leider lässt sich aber dieses Verfahren bei Hertz'schen Schwingungen nicht unmittelbar anwenden, weil die Einschaltung eines 27 *cm* langen Leiters die Länge der Schwingungsbahn zu merklich verändert.

Die Maxima und Minima der Functionen von mehreren Veränderlichen

von

O. Stolz in Innsbruck.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Mai 1890.)

Der zu früh der Wissenschaft entrissene Dr. L. Scheeffer hat in seiner hinterlassenen Abhandlung: „Theorie der Maxima und Minima einer Function von zwei Variabeln"[1] diesen Gegenstand vollständig erledigt, soweit das durch Entwicklung der Function in eine Potenzreihe überhaupt möglich ist. Im Folgenden wird versucht, die von Scheeffer gefundene Methode auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen auszudehnen. Es wird sich zeigen, dass dies im Allgemeinen thatsächlich möglich, wenn auch mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden ist.

Wir sagen, dass die Function $f(x_1\, x_2 \ldots x_m)$ an der Stelle $x_1 = a_1, x_2 = a_2 \ldots x_m = a_m$ ein Maximum (Minimum) erreicht, wenn sich eine positive Zahl δ so bestimmen lässt, dass für alle Werthsysteme $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_m$, welche der Bedingung

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_m^2 < \delta$$

genügen, ausser $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_m = 0$

$$f(a_1 + \xi_1, a_2 + \xi_2 \ldots a_m + \xi_m) - f(a_1, a_2 \ldots a_m) < 0\,(>0) \qquad 1)$$

ist.[2] Man mag ein solches Extrem als „eigentlich" bezeichnen gegenüber einem solchen, wofür in 1) bei beliebiger Kleinheit

[1] Mitgetheilt von Herrn A. Mayer zuerst in den Berichten der k. sächs. Ges. d. W. vom Jahre 1886 und kürzlich in den Math. Annalen, Bd. 35. Ich citire den letzteren Abdruck als „Scheeffer A.".

[2] Es kommt schliesslich auf dasselbe hinaus, zu verlangen, dass die Relation 1) im Texte bestehe für alle Werthsysteme $\xi_1\, \xi_2 \ldots \xi_m$, welche der Bedingung: $|\xi_1| < \delta$, $|\xi_2| < \delta \ldots |\xi_m| < \delta$ genügen.

von δ neben dem Zeichen $<$ ($>$) auch das Zeichen $=$ vorkommt.

1. Scheeffer's grundlegender Satz (A., S. 554) lässt sich unmittelbar auf Functionen von mehr als zwei Veränderlichen übertragen.

„Es lasse sich $f(a_1+\xi_1 \ldots a_m+\xi_m)$ nach Potenzen von $\xi_1 \ldots \xi_m$ entwickeln, und es sei

$$f(a_1+\xi_1 \ldots a_m+\xi_m)-f(a_1 \ldots a_m) = G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)+R_n(\xi_1 \ldots \xi_m), \quad 2)$$

worin G_n die Gesammtheit aller vorhandenen Glieder der n ersten Dimensionen in $\xi_1 \ldots \xi_m$, $R_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ den Rest der Reihe bedeutet."

„Lassen sich dann ein Index n und positive Zahlen c', δ so bestimmen, dass, wenn $\xi_1 \ldots \xi_m$ der Gleichung

$$\xi_1^2+\ldots+\xi_m^2 = r^2 \quad 3)$$

unterworfen sind, die ganze Function $G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ unter der Voraussetzung, dass die positive Zahl r kleiner als δ sei, extreme Werthe $g_1(r)$ $g_2(r)$ von absolut grösserem Betrage als $c'r^n$ besitzt, so haben die beiden Functionen

$$f(a_1+\xi_1 \ldots a_m+\xi_m) \qquad G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$$

an der Stelle $\xi_1 = 0 \ldots \xi_m = 0$ gleichzeitig ein Maximum oder ein Minimum oder weder ein Maximum noch ein Minimum."

Der Beweis verläuft so, wie er von Scheeffer a. a. O. für den besonderen Fall $m = 2$ gegeben ist. Denken wir uns $R_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ als homogene ganze Function n^{ter} Dimension von $\xi_1 \ldots \xi_m$ geschrieben, so haben ihre Coëfficienten die Eigenschaft, sich dem Grenzwerthe Null zu nähern, während die $\xi_1 \ldots \xi_m$ gleichzeitig, aber unabhängig von einander der Null zustreben, d. h. jeder positiven Zahl ε' kann eine andere δ' so zugeordnet werden, dass jeder solche Coëfficient seinem Betrage nach kleiner als ε' ausfallen muss, wenn nur

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\ldots+\xi_m^2 < \delta'^2$$

ist. Unter dieser Voraussetzung findet man, jedes $\xi_1 \ldots \xi_m$ durch r ersetzend,

$$|R_n(\xi_1 \ldots \xi_m)| < N\varepsilon' r^n$$

worin N die Anzahl der Glieder von $R_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ in der obigen Darstellung bedeutet. Es ergibt sich mithin, wenn $\varepsilon' = \varepsilon : N$ gesetzt und das zugehörige δ' mit δ bezeichnet wird, dass, wenn nur $r < \delta$ ist,

$$|R_n(\xi_1 \ldots \xi_m)| < \varepsilon r^n \tag{4}$$

ist.

Nunmehr werde angenommen, dass die untere Grenze $g_1(r)$ und die obere Granze $g_2(r)$ von $G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ die Bedingung befriedigen, dass

$$|g_1(r)| > c' r^n \qquad |g_2(r)| > c' r^n \qquad (0 < r < \delta)$$

ist. Nach 2) ist also, wenn $\xi_1\ \xi_2 \ldots \xi_m$ der Gleichung 3) genügen und r kleiner als δ ist,

$$g_1(r) - \varepsilon r^n \quad < f(a_1 + \xi_1 \ldots a_m + \xi_m) - f(a_1 \ldots a_m) < g_2(r) + \varepsilon r^n \tag{5}$$

Ist $G_n(0 \ldots 0) = 0$ ein Minimum, so müssen $g_1(r)$ und $g_2(r)$ positiv und beide grösser als $c' r^n$ sein. Mithin hat man nach 5), wenn nur r kleiner als δ ist,

$$(c' - \varepsilon) r^n < f(a_1 + \xi_1 \ldots a_m + \xi_m) - f(a_1 \ldots a_m). \tag{6}$$

Da ε kleiner als c' sein darf, so gibt es also eine solche positive Zahl δ, dass, wenn nur $r < \delta$ ist, die Differenz auf der linken Seite von 6) stets positiv ist. $f(a_1 \ldots a_m)$ ist mithin ein eigentliches Minimum von $f(x_1 \ldots x_m)$.

Wenn $G_n(0 \ldots 0)$ ein Maximum ist, so sind $g_1(r)$ und $g_2(r)$ negativ, also muss hier, wenn $r < \delta$ ist, $g_2(r) < -c' r^n$, somit

$$f(a_1 + \xi_1 \ldots a_m + \xi_m) - f(a_1 \ldots a_m) < -(c' - \varepsilon) r^n$$

sein. Daraus schliesst man auf ähnliche Art, wie oben, dass der Werth $f(a_1 \ldots a_m)$ ein Maximum von $f(x_1 \ldots x_m)$ ist.

Hat $G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ an der Stelle $\xi_1 = 0 \ldots \xi_m = 0$ kein Extrem, so ist $g_1(r) < 0$ und $g_2(r) > 0$, also hier

$$g_1(r) < -c' r^n \qquad g_2(r) > c' r^n. \qquad (0 < r < \delta)$$

Jetzt haben wir zu zeigen, dass eine wie kleine obere Grenze δ für r auch festgesetzt wird, $f(a_1 + \xi_1 \ldots) - f(a_1 \ldots)$ für Werth-

systeme $\xi_1 \dots \xi_m$, wofür $r < \delta$ ist, sowohl negativ als auch positiv ausfallen kann. Nimmt man in 4) $\varepsilon < c'$ und die ξ_k zunächst so klein an, dass die Ungleichung 4) gilt, so folgt aus 2), dass

$$f(a_1 + \xi_1 \dots) - f(a_1 \dots) < G_n(\xi_1 \dots \xi_m) + \varepsilon r^n$$

ist. Wenn nun δ' eine positive Zahl kleiner als δ bezeichnet, so gibt es zufolge Voraussetzung doch mindestens ein Werthsystem $\xi_1' \dots \xi_m'$, wofür $\xi_1'^2 + \dots + \xi_m'^2 = \delta'^2$ und

$$g_1(\delta') = G_n(\xi_1' \dots \xi_m') < -c' \delta'^n$$

also

$$f(a_1 + \xi_1' \dots) - f(a_1 \dots) < -(c' - \varepsilon) \delta'^n < 0$$

ist. Es gibt aber auch ein Werthsystem $\xi_1'' \dots \xi_m''$, wofür ebenfalls $\xi_1''^2 + \dots + \xi_m''^2 = \delta'^2$ aber

$$g_2(\delta') = G_n(\xi_1'' \dots \xi_m'') > c' \delta'^n$$

also

$$f(a_1 + \xi_1' \dots) - f(a_1 \dots) > (c' - \varepsilon) \delta'^n > 0$$

ist. Demnach ist nun der Werth $f(a_1 \dots a_m)$ weder ein Minimum noch ein Maximum von $f(x_1 \dots x_m)$.

2. Aus dem vorstehenden Satze folgt leicht der sogleich zu erwähnende allbekannte Satz, welcher im Grunde genommen das einzige ist, was vor Scheeffer's Arbeit über die Bestimmung der Extreme von Functionen mehrerer Veränderlicher in die Öffentlichkeit gedrungen ist.

„Beginnt der Unterschied

$$f(a_1 + \xi_1 \dots a_m + \xi_m) - f(a_1 \dots a_m) \qquad 7)$$

mit den Gliedern n^{ter} Dimensionen in $\xi_1 \dots \xi_m$, so ist $f(a_1 \dots a_m)$ kein Extrem von $f(x_1 \dots x_m)$ oder eines, je nachdem die Glieder n^{ter} Dimension von 7) eine indefinite oder definite Form der Veränderlichen $\xi_1 \dots \xi_m$ bilden. Und zwar ist im letzteren Falle $f(a_1 \dots a_m)$ ein Maximum oder Minimum, je nachdem die genannte Form nur negative oder nur positive Werthe annimmt.“[1]

---

[1] Einen befriedigenden Beweis dieses Satzes findet man in Peano's Calcolo differenziale etc., Torino 1884, p. 197, einen anderen deutet

Verstehen wir nun unter $G_n(\xi_1 \dots \xi_m)$ in 2) die Gesammtheit der Glieder $n$ter Dimension in Bezug auf $\xi_1 \dots \xi_m$, welche in 7) vorkommen, so hat $G_n(\xi'_1 \dots \xi'_m)$ unter Voraussetzung, dass

$$\xi_1'^2 + \dots + \xi_m'^2 = 1$$

ist, jetzt stets zwei von Null verschiedene extreme Wehrte G_1, G_2.[1] Allgemein dürfen wir, wenn die Gleichung 3) bestehen soll,

$$\xi_1 = r\xi'_1 \dots \xi_m = r\xi'_m$$

setzen. Dann ergibt sich

$$G_n(\xi_1 \dots \xi_m) = r^n G_n(\xi'_1 \dots \xi'_m)$$

und für die Extreme von $G_n(\xi_1 \dots \xi_m)$

$$g_1(r) = G_1 r^n \qquad g_2(r) = G_2 r^n.$$

Ist also c' irgend eine positive Zahl kleiner als $|G_1|$ und $|G_2|$, so hat man

$$|g_1(r)| > c' r^n \qquad |g_2(r)| > c' r^n.$$

Das soeben erwähnte Kriterium versagt, wenn die homogene Function $G_n(\xi_1 \dots \xi_m)$ semidefinit ist, d. i. ausser an der Stelle $\xi_1 = 0 \dots \xi_m = 0$ auch noch an anderen verschwindet, sonst aber nur Werthe eines Vorzeichens annimmt. Alsdann ist eines der Extreme G_1 G_2 Null. Was man in einem solchen Falle noch weiter zu versuchen hat, lehrt uns eben Scheeffer durch den Satz in Nr. 1. Gelingt es, durch Zusammenfassung der Glieder des Unterschiedes 7) von den Dimensionen $n, n+1 \dots$ eine ganze Function von $\xi_1 \dots \xi_m$ zu bilden, deren extreme Wehrte $g_1(r)$, $g_2(r)$ beide von Null verschieden sind und ausserdem der im Satze von Nr. 1 ausgesprochenen Bedingung genügen, so kann die Frage nach den Extremen von $f(x_1 \dots x_m)$ mit Hilfe dieses Satzes entschieden werden. Sind wir aber nicht im Stande, eine solche Function von $\xi_1 \dots \xi_m$ zu finden, so leistet die Entwicklung von

---

Scheeffer in der Note S. 557 an. Den im Texte gegebenen, welcher auch in Scheeffer A., S. 555, steht, habe ich schon seit mehreren Jahren in meinen Vorlesungen benützt.

[1] Von mir bewiesen in den Ber. d. naturw.-med. Vereines zu Innsbruck, Bd. XVII, S. XXVIII.

$$f(a_1+\xi_1 \ldots a_m+\xi_m)$$

in eine Potenzreihe von $\xi_1 \ldots \xi_m$ für die in Rede stehende Aufgabe überhaupt nichts.

Anmerkung. Hat eine ganze Function zweier Veränderlichen $G_n(\xi_1 \xi_2)$ unter Voraussetzung, dass $\xi_1^2+\xi_2^2=r^2$ ist, ein Extrem Null, so besitzt sie einen quadratischen Factor. Es gibt nämlich nach Nr. 3 jetzt zwei nach positiven Potenzen von r fortschreitende Reihen

$$\xi_1=\varphi_1(r) \qquad \xi_2=\varphi_2(r)$$

mit reellen Coëfficienten, welche die Gleichung $G_n(\xi_1 \xi_2)=0$ identisch erfüllen. Bezeichnet r' einen beliebigen Werth von r, nur hinlänglich klein, und ist $\varphi_1(r')=\xi_1'$ $\varphi_2(r')=\xi_2'$, so muss, da der Werth 0 ein Extrem von $G_n(\xi_1 \xi_2)$ sein soll, neben $G_n(\xi_1' \xi_2')=0$ auch

$$\frac{\partial G_n}{\partial \xi_1'}=0 \qquad \frac{\partial G_n}{\partial \xi_2'}=0$$

sein. $G_n(\xi_1', \xi_2')$ und $\frac{\partial G_n}{\partial \xi_2'}$ haben demnach bei willkürlichem ξ_1' einen gemeinsamen Factor, was nur möglich ist, wenn $G_n(\xi_1 \xi_2)$ durch das Quadrat einer ganzen Function von ξ_1, ξ_2 theilbar ist.

Betrachtet man aber eine ganze Function $G_n(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ von drei (oder mehr) Veränderlichen ohne constantes Glied unter der Voraussetzung, dass

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2=r^2 \qquad \alpha)$$

ist, so gibt es keinen, dem vorstehenden Satze entsprechenden mehr. Bezeichnen $P(\xi_1 \xi_2 \xi_3)=0$ $Q(\xi_1 \xi_2 \xi_3)=0$ die Gleichungen zweier algebraischen Flächen, welche eine Curve $\xi_1=\varphi_1(r)$, $\xi_2=\varphi_2(r)$, $\xi_3=\varphi_3(r)$ gemein haben, so hat die ganze Function $P(\xi_1 \xi_2 \xi_3)^2+Q(\xi_1 \xi_2 \xi_3)^2$ bei Beschränkung der Veränderlichen durch die Gleichung α) das Minimum Null, sie besitzt jedoch im Allgemeinen keinen quadratischen Factor.

3. Unsere fernere Aufgabe besteht nun darin, zu ermitteln, ob eine ganze Function $G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ ohne constantes Glied unter Annahme der Gleichung 3) extreme Werthe $g_1(r)$, $g_2(r)$ besitzt, welche beide von Null verschieden sind,

ob es dann positive Zahlen $c' \delta$ von der Beschaffenheit gibt, dass, wenn r kleiner als δ ist,

$$|g_1(r)| > c' r^n \qquad |g_2(r)| > c' r^n \qquad 8)$$

ist. Zunächst geben wir in Kürze den Weg an, auf welchem Scheeffer diese Frage für eine Function von zwei Veränderlichen xy gelöst hat.[1]

Die Extreme einer ganzen Function $G_n(xy)$ ohne constantes Glied werden unter der Bedingung, dass

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad a)$$

sein soll, bekanntlich mit Hilfe der Gleichungen

$$\frac{\partial G_n}{\partial x} + \lambda x = 0 \qquad \frac{\partial G_n}{\partial y} + \lambda y = 0 \qquad b)$$

gefunden. Dabei kann man sich für r von vornherein eine beliebige positive Zahl $\rho < 1$ als obere Grenze vorgeschrieben denken. Um diejenigen Werthsysteme xy, welche die Extreme von G_n liefern, zu bestimmen, haben wir neben a) die aus b) durch Elimination von λ abgeleitete Gleichung

$$y \frac{\partial G_n}{\partial x} - x \frac{\partial G_n}{\partial y} = 0 \qquad c)$$

zu stellen. Man ermittelt zunächst alle nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von x fortschreitenden Reihen mit reellen Coëfficienten, die für $x = 0$ verschwinden und für y in die Gleichung c) gesetzt, sie identisch erfüllen.[2] Jede von ihnen wird an Stelle von y in die Gleichung a) eingeführt und die so erhaltene Gleichung nach x durch eine Reihe nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von r (welche für $r = 0$ verschwindet) aufgelöst. Vermittelst derselben verwandelt man auch y in eine nach positiven Potenzen von r fortschreitende Reihe. Auf diese Art gelangt man zu Reihenpaaren, welche für xy in die Gleichungen a) c) gesetzt, sie identisch befriedigen. Durch Einführung eines jeden solchen Paares von Reihen an Stelle von xy in den Aus-

[1] Scheeffer A., S. 558.

[2] Ist es bequemer, so vertausche man hier und in der folgenden Rechnung x und y.

druck $G_n(xy)$ verwandelt man ihn ebenfalls in eine Reihe nach Potenzen von r. Diejenige der so aus $G_n(xy)$ abgeleiteten Reihen, welche bei constantem, hinlänglich kleinem r die algebraisch kleinste Zahl liefert, stellt $g_1(r)$, diejenige, welche dabei die algebraisch grösste Zahl liefert, stellt $g_2(r)$ dar. Demnach genügt, um $g_1(r)\,g_2(r)$ zu erhalten, die Kenntniss einiger Anfangsglieder dieser Reihen. Für unseren Zweck braucht man sogar nur das Glied niedrigsten Grades in r zu berechnen. Aus $g_1(r)$ und $g_2(r)$ ersieht man zunächst, ob der Werth $G_n(0,0) = 0$ für $G_n(xy)$ ein eigentliches Extrem bildet oder nicht. Das erstere ist der Fall, wenn die Anfangsglieder von $g_1(r)$ und $g_2(r)$ gleichbezeichnet, das letztere, wenn sie entgegengesetzt bezeichnet sind. Sollte einer der Ausdrücke $g_1(r)$, $g_2(r)$ identisch Null sein, so hat $G_n(xy)$ einen quadratischen Factor und kommt für uns nicht weiter in Betracht.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dazu, dass Zahlen $c'\delta$ existiren, für welche die Ungleichungen 8) gelten, besteht nun darin, dass keiner der Exponenten von r in den Anfangsgliedern von $g_1(r)\,g_2(r)$ die Zahl n überschreite. Die Nothwendigkeit derselben leuchtet unmittelbar ein. Ist aber z. B.

$$g_1(r) = cr^p + \ldots$$

und $p \leqq n$, so gibt es zu jeder positiven Zahl ε eine andere δ von der Art, dass

$$|g_1(r)| > r^p\{|c| - \varepsilon\} \geqq r^n\{|c| - \varepsilon\}$$

ist für alle Werthe von r kleiner als δ. Man braucht demnach, um die Relation 8) zu erhalten, nur $|c| - \varepsilon = c'$ zu setzen.

Die hier verlangten Rechnungen sind in den meisten Fällen so einfach, dass man sie ohne Mühe durchführen kann. Insbesondere erscheint die Herstellung derjenigen nach Potenzen von x fortschreitenden Reihen, welche für $x = 0$ verschwinden, und an Stelle von y gesetzt, eine algebraische Gleichung wie c) erfüllen, als eine Aufgabe, deren Lösung lediglich die Bekanntschaft mit den grundlegenden Sätzen der Reihentheorie und die Anwendung einiger einfacher Substitutionen erheischt.[1] Wir

[1] Eine sehr brauchbare Bearbeitung der älteren Aufsätze über die im Texte berührte Aufgabe hat Herr A. Lechthaler in der Programmabhand-

können also hierin mit Scheeffer (A., S. 560) nicht übereinstimmen, dem das oben beschriebene Verfahren „äusserst schwerfällig" vorkommt. Verdient die von ihm entwickelte indirecte Methode die Bezeichnung „elegant" in vollem Masse,[1] so bleibt der directen der Vorzug der leichten Übersichtlichkeit.

Die von Scheeffer vorgelegten Beispiele lassen sich auch direct leicht erledigen, was an dem letzten und schwierigsten von ihnen in der nächsten Nummer dargelegt werden soll.

4. Scheeffer's Beispiel 5. (A., S. 575). Es sei vorgelegt

$$G_{12}(x,y) = x^2y^4 - 3x^4y^3 + x^6y^2 - 3xy^7 + y^8 - 10x^{10}y + 5x^{12}.$$

Hiezu findet man

$$\left.\begin{aligned} y\frac{\partial G_{12}}{\partial x} - x\frac{\partial G_{12}}{\partial y} &= (-4x^3y^3+2xy^5)+(-12x^3y^5+9x^5y^2) \\ &+(-2x^7y+6x^5y^3+21x^2y^6-8xy^7-3y^8) \\ &+(10x^{11}-100x^9y^2)+60x^{11}y = 0 \end{aligned}\right\} \quad d)$$

Die Curve $d)$ hat im Anfangspunkte einen 6fachen Punkt. Die Glieder 6. Ordnung in $d)$ liefern $2x(y^2-2x^2)y^3$. Dem ersten Factor entspricht die Entwicklung

$$x = \frac{3}{2}y^3 + \ldots \qquad \text{oder} \qquad y = \sqrt[3]{\frac{2x}{3}} + \ldots, \qquad e)$$

dem zweiten die beiden Potenzreihen

$$y = \pm x\sqrt{2} + \ldots \qquad f)$$

---

lung des Gymnasiums zu Melk (1885): „Die Singularitäten der ebenen algebraischen Curven in Cartes. Punkt- und Plücker'schen Liniencoordinaten" geliefert. Das von ihm auseinander gesetzte Verfahren, eine algebraische Function y in eine Reihe nach Potenzen von $x-a$ (beziehungsweise $1:x$) zu entwickeln, welches bereits von Hamburger und Königsberger angegeben wurde, lässt sich auch auf eine reducible algebraische Gleichung $F(x,y) = 0$ anwenden. Nur darf $F(x,y)$ keinen wiederholten Factor enthalten. Es ist übrigens auch dann noch brauchbar, wenn $F(xy)$ eine nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ und $y-b$ fortschreitende unendliche Reihe, die für $x=a$ $y=b$ verschwindet, bedeuten sollte, jedoch wieder mit Ausnahme des Falles, dass $F(xy)$ durch das Quadrat einer solchen Reihe theilbar ist.

[1] Scheeffer begnügt sich damit, den grösseren der Exponenten der Anfangsglieder von $g_1(r)$ und $g_2(r)$ zu ermitteln, was vollkommen ausreicht.

Um die dem dritten Factor y^3 entsprechenden Entwicklungen zu erhalten, setzen wir in d) $y = xy_1$ und dividiren die neue Gleichung durch x^6, wodurch sie in

$$-4y_1\{4y_1^2 - 9xy_1 + 2x^2\} +$$
$$+ (10x^5 - 12xy_1^4 + 6x^2y_1^3 + 2y_1^5) + \text{Gl. höh. Ordn.} = 0$$

übergeht. Für diese Curve ist der Punkt $x=0$ $y_1=0$ ein gewöhnlicher dreifacher Punkt. Seinen drei Tangenten entsprechend findet man für y_1 drei Potenzreihen nach x, welche die folgenden Reihen für y liefern:

$$y = -5x^4 + \ldots \qquad g)$$
$$y = 2x^2 + \ldots \qquad h)$$
$$y = {}^1/_4 x^2 + \ldots \qquad i)$$

Die Summe der Nenner der Exponenten der höchsten Potenzen von x, in welchen die sechs Reihen e) bis i), jede für sich genommen, ganz sind, d. i. $3+1+1+1+1+1$, beträgt 8, ist also in der That gleich dem niedrigsten Grade der x-freien Glieder von d). Die Summe der zugehörigen Zähler der Exponenten in den Anfangsgliedern dieser Reihen, d. i. $1+1+1+4+2+2$, macht 11, ist also wirklich gleich dem niedrigsten Grade der y-freien Glieder von d).

Nun setze man jede Reihe e) bis i) in die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ein. e) liefert so die Gleichung

$$y^2(1 + {}^9/_4 y^4 + \ldots) = r^2.$$

Zieht man hieraus mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Quadratwurzel, so ergibt sich

$$y(1 + {}^9/_8 y^4 + \ldots) = r. \qquad k)$$

Die umgekehrte Reihe ist

$$y = r - {}^9/_8 r^5 + \ldots,$$

woraus nach e)

$$x = {}^3/_2 r^3 + \ldots \qquad e')$$

gefunden wird. Ein zweites Reihenpaar erhält man, wenn man in k) und den folgenden Formeln statt r $-r$ setzt.

Die Reihen f) führen in der gleichen Weise auf die Gleichung

$$x^2+(2x^2+\ldots)=r^2, \quad \text{d. i.} \quad x^2(1+\ldots)=\frac{r^2}{3}\cdot$$

Hieraus ergibt sich durch Umkehrung

$$x=\frac{r}{\sqrt{3}}+\ldots \quad \text{und dazu} \quad y=\pm\frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\ldots \qquad f')$$

Auf ähnliche Art erhält man noch weiter die Reihenpaare

$$x=r-5r^7+\ldots \qquad y=-5r^4+\ldots \qquad g')$$
$$x=r-2r^3+\ldots \qquad y=2r^2+\ldots \qquad h')$$
$$x=r-{}^1/_{32}r^3+\ldots \qquad y={}^1/_4r^2+\ldots \qquad i')$$

Jedem der fünf Reihenpaare f') bis i') tritt noch eines an die Seite, welches man daraus durch Vertauschung von r mit $-r$ abzuleiten hat.

Setzt man die Reihenpaare e') bis i') in $G_{12}(xy)$ für x und y ein, so erhält man nacheinander für $G_{12}(xy)$ die Reihen

$$r^8+\ldots, \qquad {}^4/_{27}r^6+\ldots \quad (\text{für beide Paare } f'))$$
$$5r^{12}+\ldots \qquad -16r^{10}+\ldots$$
$${}^5/_{256}r^{10}+\ldots$$

Die Vertauschung von r mit $-r$ ändert an den Anfangsgliedern nichts. Demnach ist bei hinlänglich kleinem r die untere Grenze von $G_{12}(xy)$ auf dem Kreise $x^2+y^2=r^2$

$$g_1(r)=-16r^{10}+\ldots,$$

die obere Grenze

$$g_2(r)={}^4/_{27}r^6+\ldots$$

Für die Function $G_{12}(xy)$ ist mithin der Werth $G_{12}(0,0)=0$ kein Extremum. Da die Exponenten von r in den Anfangsgliedern von $g_1(r)$ und $g_2(r)$ beide kleiner als 12 sind, so findet im Punkte $x=0$ $y=0$ auch kein Extremum einer jeden Function

$$b+G_{12}(xy)+R_{12}(xy)$$

statt, worin b eine Constante, $R_{12}(xy)$ den Inbegriff aller Glieder von höherer als der 12. Dimension in Bezug auf x und y bedeutet.

5. Betrachten wir nun zunächst eine Function von drei Veränderlichen. Die Werthsysteme $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, welche die Extreme der Function $G_n(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ auf der Kugel

$$\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2 = r^2 \qquad 9)$$

liefern, werden durch diese Gleichung im Vereine mit den folgenden:

$$\frac{\partial G_n}{\partial \xi_1}+\lambda \xi_1 = 0 \qquad \frac{\partial G_n}{\partial \xi_2}+\lambda \xi_2 = 0 \qquad \frac{\partial G_n}{\partial \xi_3}+\lambda \xi_3 = 0 \qquad 10)$$

bestimmt. Durch Elimination von λ gewinnt man hieraus zwei Gleichungen für $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, etwa

$$\xi_2 \frac{\partial G_n}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial G_n}{\partial \xi_2} = 0 \qquad \xi_3 \frac{\partial G_n}{\partial \xi_1} - \xi_1 \frac{\partial G_n}{\partial \xi_3} = 0. \qquad 11)$$

Die Resultante derselben nach einer der Veränderlichen, z. B. ξ_3, ist eine algebraische Gleichung zwischen den beiden anderen, hier ξ_1 und ξ_2,

$$H(\xi_1, \xi_2) = 0. \qquad 12)$$

Genügen $\xi_1 \xi_2$ dieser Gleichung, so werden die beiden ganzen Functionen von $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ auf der linken Seite der Gleichungen 11) im Allgemeinen einen Theiler gemein haben, welcher in ξ_3 linear ist, so dass ξ_3 als rationale Function $\omega(\xi_1 \xi_2)$ von $\xi_1 \xi_2$ erscheint.

Entwickeln wir ξ_2 aus der Gleichung 12) in eine nach Potenzen von ξ_1 fortschreitende Reihe ohne constantes Glied, so erhalten wir vermittelst des Ausdruckes $\omega(\xi_1 \xi_2)$ auch ξ_3 durch eine solche Reihe ausgedrückt. Werden nun die soeben für ξ_2 und ξ_3 ermittelten Reihen in 9) eingesetzt, so wird in ähnlicher Art, wie es in Nr. 3 und 4 gemacht ist, zunächst für ξ_1 eine nach positiven Potenzen von r fortschreitende Reihe gewonnen, aus welcher sich dann ähnliche Reihen für ξ_1 und ξ_2 ableiten lassen.

Jedes Tripel zusammengehöriger Reihen für ξ_1, ξ_2, ξ_3 muss nun in $G_n(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$ eingesetzt und das Anfangsglied dieser nach steigenden positiven Potenzen von r zu ordnenden Reihen ermittelt werden.

Da die Anzahl solcher Tripel endlich ist, so kann man unter ihnen die obere und untere Grenze von $G_n(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ auf der Kugel 19), welche vorhin mit $g_1(r)$ und $g_2(r)$ bezeichnet wurden, auf ähnliche Weise herausfinden, wie in Nr. 3 gelehrt ist. Auch die weiteren daselbst an die für $g_1(r)$ und $g_2(r)$ erhaltenen Reihen geknüpften Schlüsse behalten ihre Giltigkeit.

Wenn die beiden Functionen in 11) unter Adjunction der Gleichung 12), (beziehungsweise eines irreducibelen Factors derselben) einen gemeinschaftlichen Theiler $T(\xi_1\xi_2\xi_3)$, welcher in ξ_2 von einem höheren als dem ersten Grade ist, besitzen sollten, so setze man in denselben für ξ_2 die hierher gehörigen, nach Potenzen von ξ_1 fortschreitenden Reihen ein und löse die so erhaltene Gleichung zwischen ξ_1 und ξ_3 nach ξ_3 auf. Schreitet die oben erwähnte Potenzreihe von ξ_1 nach ganzen Potenzen von $\sqrt[k]{\xi_1}$ fort, so wird man in dieser Gleichung vor der Umkehrung $\xi_1 = \tau^k$ setzen. Dabei darf jedoch die Function $T(\xi_1\xi_2\xi_3)$ keinen wiederholten Factor enthalten. Ein solcher ist für sich gleich Null zu setzen und nach ξ_3 durch eine Reihe nach Potenzen von ξ_1 aufzulösen. Wir gelangen somit auch jetzt zu Paaren zusammengehöriger Reihen für $\xi_2\xi_3$, aus denen man, wie schon oben bemerkt, Tripel von nach Potenzen von r fortschreitenden Reihen für $\xi_1\xi_2\xi_3$ gewinnen kann. Das weitere Vorgehen bleibt unverändert.

Dem Vorstehenden zu Folge dürfen wir behaupten, dass die Extreme von Functionen dreier Veränderlichen unter den im Satze von Nr. 1 angegebenen Voraussetzungen sich stets ermitteln lassen, wenn auch nur durch sehr umständliche Rechnungen.

6. Nicht völlig dasselbe wagen wir von den Functionen von mehr als drei Veränderlichen $x_1 \dots x_m$ zu versichern. Zur Ermittelung der Werthsysteme $\xi_1 \dots \xi_m$, wofür eine ganze, für $\xi_1 = 0 \dots \xi_m = 0$ verschwindende Function $G_n(\xi_1 \dots \xi_m)$ unter der Voraussetzung, dass

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 = r^2$$

sein soll, ein Extrem wird, haben wir neben dieser Gleichung noch m andere von derselben Gestalt wie die Gleichungen 10). Aus ihnen ergeben sich durch Elimination von λ $(m-1)$ Gleichungen zwischen $\xi_1 \dots \xi_m$, analog den Gleichungen 11). Eliminirt man aus

ihnen die $m-2$ Veränderlichen $\xi_3 \ldots \xi_m$, so erhält man eine Endgleichung 12) zwischen ξ_1 und ξ_2, welche man demnach nach ξ_2 durch eine nach positiven Potenzen von ξ_1 fortschreitende Reihe auflösen kann. Lassen sich nun unter Adjunction der Gleichung 12) $\xi_3 \ldots \xi_m$ als rationale Functionen von ξ_1 und ξ_2 darstellen, so befinden wir uns wieder genau auf demselben Standpunkte wie in Nr. 3 und 5, d. h. wir können die m für die in Rede stehenden Werthsysteme von $\xi_1 \ldots \xi_m$ bestehenden Gleichungen durch Reihen auflösen, welche nach positiven ganzen oder gebrochenen Potenzen von r fortschreiten. In einem solchen Falle dürfen wir auch hier die am Eingange von Nr. 3 aufgeworfene Frage über die Function $G_n(\xi_1 \ldots \xi_m)$ als entscheidbar bezeichnen.

7. Die eigentlichen Extreme einer beliebigen ganzen Function von zwei Veränderlichen lassen sich noch auf einem anderen Wege ermitteln, als im Vorstehenden angegeben ist. Die Function $G_n(xy)$ hat im Punkte $x=0$, $y=0$ den Werth $G_n(0,0)=0$ zum Extremum, wenn dieser Punkt ein isolirter Punkt für die Curve $G_n(x,y)=0$ ist.[1] Demnach hat $G_n(xy)$ im Nullpunkte ein eigentliches Extremum dann und nur dann, wenn jede nach Potenzen von x fortschreitende Reihe, welche für $x=0$ verschwindet und für y in die Gleichung $G_n(x,y)=0$ gesetzt, dieselbe identisch erfüllt, nicht-reelle Coëfficienten besitzt.

Zu diesem Satze können wir noch einen weiteren fügen. „Gelingt es, alle für $x=0$ verschwindenden Reihen nach Potenzen von x, welche, für y gesetzt, die irreducible oder reducible Gleichung $G_n(xy)=0$ identisch erfüllen, nach dem in Nr. 4 angewandten Verfahren zu finden, und befindet sich unter ihnen auch nur eine mit durchaus reellen Coëfficienten, so bildet der Werth $G_n(0,0)=0$ kein Extremum der Function $G_n(xy)$. Dass man alle genannten Reihen vor sich habe, erkennt man daran, dass die Summe der Nenner der Exponenten der höchsten Potenzen von x, in welchen die Reihen, jede für sich betrachtet, ganz sind, genau gleich ist dem niedrigsten Exponenten der x nicht enthaltenden Glieder von $G_n(xy)$.“ Es folgt nämlich hieraus von selbst, dass die Function $G_n(xy)$ keinen

---

[1] Scheeffer A., S. 558.

quadratischen Factor enthält, also im Nullpunkte kein uneigentliches Extremum besitzt. Denn die einem solchen entsprechenden, für y zu setzenden Reihen könnten durch das in Rede stehende Verfahren nicht erhalten werden.

Nehmen wir z. B. noch einmal die in Nr. 4 betrachtete Function $G_{12}(xy) = x^2y^4 - \dots$ vor. Die Curve $G_{12}(xy) = 0$ hat im Nullpunkte einen 6fachen Punkt. Entsprechend dem Factor x^2 der Glieder 6. Ordnung von G_{12}, setzt man darin $x = yx_1$ und findet nach Weglassung des Factors y^6 die Gleichung

$$x_1^2 + y^2 + \text{Gl. höh. Ordn.} = 0.$$

Aus ihr folgt $x_1 = \pm yi + \dots$, also $x = \pm y^2 i + \dots$ und hieraus zwei Reihen

$$y = \sqrt{\pm xi} + \dots \qquad a)$$

Dem Factor y^6 der Glieder 6. Ordnung in $G_{12} = 0$ entsprechend, setzt man darin $y = xy_1$, wodurch man nach Division durch x^6 findet:

$$(x^2 - 3xy_1 + y_1^2)y_1^2 + (5x^6 - 10x^5 y_1) + \dots = 0. \qquad b)$$

Diese Curve hat also im Punkte $x = 0$ $y_1 = 0$ einen 4fachen Punkt. Dem ersten Factor der Glieder 4. Ordnung in ihr entsprechen zwei gewöhnliche Potenzreihen für y_1; sie liefern schliesslich

$$y = \tfrac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})x^2 + \dots \qquad c)$$

Der zweite Factor führt eine weitere Substitution $y_1 = xy_2$ in $b)$ herbei. Die neue Gleichung lautet nach Wegschaffung des Factors x^4

$$5x^2 + y_2^2 + \text{Gl. höh. Ordn.} = 0,$$

liefert also noch zwei Reihen für y:

$$y = \pm ix^3\sqrt{5} + \dots \qquad d)$$

Die Nenner der Exponenten der höchsten Potenzen von x, in welchen die Reihen $a)$, $c)$, $d)$ ganz sind, d. i. $(2+2)+(1+1)+$ $+(1+1)$, machen zusammen 8, also soviel als der niedrigste Grad der nur y enthaltenden Glieder von G_{12}. (Die Zähler der Exponenten der Anfangsglieder dieser Reihen, $(1+1)+(2+2)+$

$+(3+3)$ geben auch die erforderliche Summe, nämlich 12.) Also gibt es ausser den sechs Reihen a), c), d) keine für $x=0$ verschwindende mehr, welche die Gleichung $G_{12}=0$ nach y auflöst. Da unter ihnen zwei mit reellen Coëfficienten vorkommen, nämlich c), so müssen wir schliessen, dass für die Function $G_{12}(xy)$ der Werth $G_{12}(0,0)=0$ kein Extrem darstellt.

Möglicherweise können diese Bemerkungen auch bei Ermittelung der Extreme von ganzen Functionen von drei und mehr Veränderlichen von Nutzen sein. Nur darf man nicht ausser Acht lassen, dass schon aus einer Gleichung $G_n(\xi_1\xi_2\xi_3)=0$, deren linke Seite für $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ verschwindet, ξ_3 nicht immer durch eine nach positiven Potenzen von ξ_1, ξ_2 fortschreitende Reihe dargestellt werden kann. So ist es z. B. unmöglich, die Gleichung

$$\xi_1^2+\xi_2^2-\xi_3^2=0$$

nach ξ_3 durch eine solche Reihe aufzulösen. In einem solchen Falle wird man noch versuchen, ob sich nicht für $\xi_1\xi_2\xi_3$ drei nach ganzen positiven Potenzen zweier Parameter t, u forschreitende Reihen

$$a_r t+b_r u+\alpha_r t^2+2\beta_r tu+\gamma_r u^2+\dots \qquad (r=1,2,3)$$

auffinden lassen, welche die vorgelegte Gleichung $G_n(\xi_1\xi_2\xi_3)=0$ identisch erfüllen.

Ein Beitrag zur Construction der Niveaulinien

von

Dr. **Paul Czermak,**

Privatdocent an der k. k. Universität in Graz.

(Mit 1 Tafel und 3 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1890.)

Die Darstellung der Niveauflächen hat seit Maxwell so allgemeine Verwendung bei der Betrachtung von Kraftgebieten gefunden, dass einige constructive Details an denselben vielleicht hier und da von Nutzen sein könnten.

Insbesondere erscheint es mir vom Nachtheile, dass bei der bisher üblichen Constructionsweise zumeist numerische Rechenoperationen zu Hilfe genommen werden, so dass die einzelnen Punkte einer Niveaulinie mehr berechnet als construirt werden. In der folgenden Darstellung will ich nun hauptsächlich zeigen, wie man bloss mit Hilfe von Lineal und Zirkel die gebräuchlichsten Aufgaben über die Vertheilung der Niveaulinien lösen kann.

Um die Vorstellung zu fixiren, wollen wir annehmen, dass wir es mit in Punkten concentrirten elektrischen Ladungen zu thun haben und nur die Schnittfiguren betrachten, welche die Niveauflächen mit einer durch diese Punkte gelegten Ebene ergeben.

I. Das elektrische Feld, welches durch einen geladenen Punkt erzeugt wird.

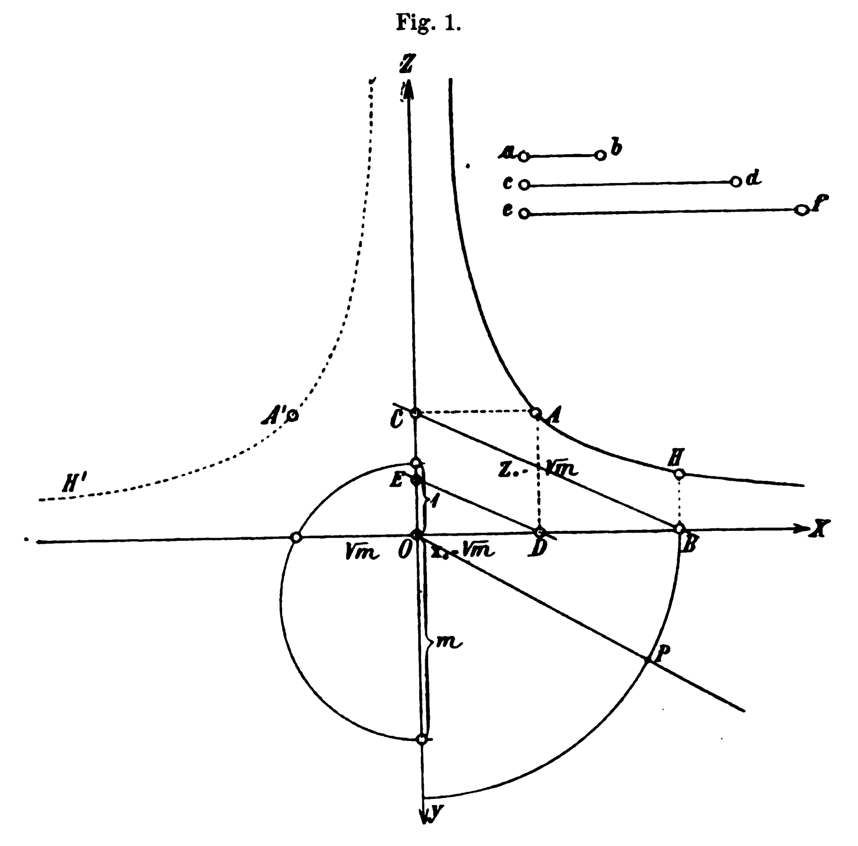
Befindet sich (Fig. 1) in O eine elektrische Masse $+m$, so ist der Werth des Potentials an einer Stelle P, welche die Entfernung r von O hat, gegeben durch:

$$V = \frac{m}{r}$$

Denke ich mir die Strecken r als Abscissen und die zugehörigen V als Ordinaten aufgetragen, so verlaufen die Werthe des Potentials längs einer bestimmten Richtung wie die Ordinaten des einen Astes einer rechtwinkeligen Hyperbel, bezogen auf ihre Assymptoten.

Da diese Beziehung für jede andere Richtung von O aus in gleicher Weise gilt, so wird man, wenn man die Zeichnungsebene als X-Y-Ebene eines dreiaxigen Coordinatensystems wählt und

Fig. 1.



die Z-Axe im Punkte O errichtet, eine Rotationsfläche erhalten, welche zu jedem Punkte der Ebene das zugehörige Potential als z-Coordinate angibt.

Constructiv ist daher die Aufgabe so zu lösen.

Gegeben werden sein in Strecken: $a\,b = 1$, die Einheit des Massstabes, in welchem die Zeichnung auszuführen ist; $c\,d = m$,

die Ladung des Punktes O. Gesucht ist der Werth des Potentials in der Entfernung $ef = r$ von O.

Man wird sich daher mit Hilfe einer geometrischen Proportionale zwischen 1 und m den Werth von $\sqrt{m}$ construiren, wodurch die Coordinaten des Scheitels A der Hyperbel H gefunden sind.

Hierauf trägt man $r = x$ auf und sucht das zugehörige z.

Aus der Gleichung der Hyperbel bezogen auf ihre Assymptoten:

$$xz = x_0 z_0 = \text{Const.}$$

folgt:

$$\frac{x}{x_0} = \frac{z_0}{z}$$

Zieht man daher eine Gerade durch den Endpunkt B von x und die Projection C des Scheitels der Hyperbel auf die z-Axe und ferner durch den Endpunkt D von x_0 eine Parallele zu der Geraden BC, welche die Z-Axe im Punkte E schneidet, so ist OE das gesuchte z.

Aus den ähnlichen Dreiecken: $\triangle\, BOC \backsim \triangle\, DOE$ folgt unmittelbar:

$$OB : OD = OC : OE$$

oder:

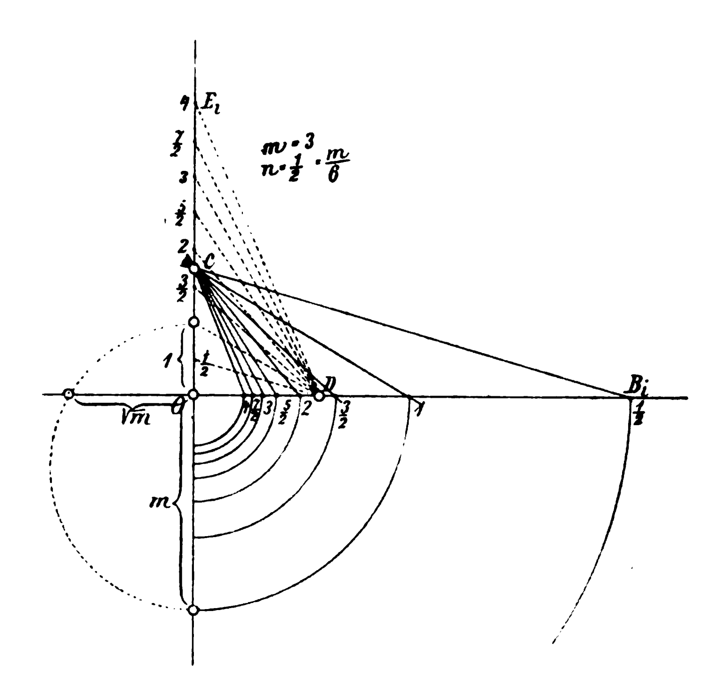
$$x : x_0 = z_0 : z$$

In genau umgekehrter Weise hat man zu verfahren, wenn zu einem gegebenen $V = z$ der Werth des Radius $r = x$ zu suchen ist.

Um daher so wie in der üblichen Darstellungsweise um O ein System von concentrischen Kreisen zu construiren, auf welchen die Potentiale immer um den n^{ten} Theil der Einheit wachsen, wird man auf der Z-Axe von O aus fortgesetzt solche n^{tel} auftragen; jeden Theilungspunkt E_i (Fig. 2) mit D verbinden und von C aus Parallele zu jeder Geraden $E_i\, D$ ziehen; wo dieselben die x-Axe schneiden, sind die zugehörigen Endpunkte B_i der Strecken $r = x$.

Fallen die Strecken OB_i sehr klein aus, so kann man OC in einem bestimmten Masse vergrössern und von der so erhaltenen Strecke den entsprechenden Bruchtheil nehmen.

Fig. 2.



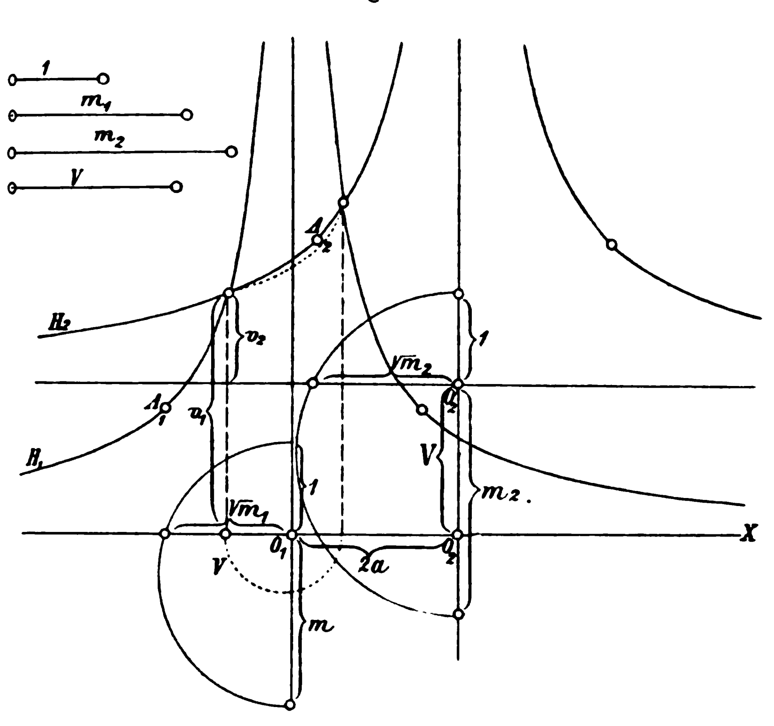
II. Das elektrische Feld, welches durch zwei geladene Punkte erzeugt wird.

Sind zwei Punkte O_1 und O_2 (Fig. 3) gegeben, in welchen die Ladungen m_1 und m_2 concentrirt gedacht werden, so wählen wir die Verbindungslinie $O_1 O_2$ als X-Axe und in der Mitte von $\overline{O_1 O_2} = 2a$ errichten wir die Z-Axe.

In O_1 denken wir uns in gleicher Weise, wie im vorhergehenden Abschnitte angeführt ist, die hyperbolische Rotationsfläche construirt, welche das elektrische Feld charakterisiren würde, wenn nur der mit der Ladung m_1 versehene Punkt O_1 anwesend wäre.

In O_2 soll auch eine solche der Ladung m_2 entsprechende Rotationsfläche construirt werden, nur wollen wir die horizontale Assymptote um das Stück V in der Richtung der Z-Axe verschieben, so dass die ganze Rotationsfläche alle Ordinaten um die Strecke V verlängert hat.

Fig. 3.



Die Gleichung der Rotationsfläche H_1 wird sein:

$$Z\sqrt{(x+a)^2+y^2}=m_1$$

die der Rotationsfläche H_2:

$$(z-V)\sqrt{(x-a)^2+y^2}=m_2$$

Setzt man:

$$(x+a)^2+y^2=r_1^2$$
$$(x-a)^2+y^2=r_2^2$$

so ist die Gleichung der Schnittcurve der beiden Rotationsflächen dargestellt durch:

$$\left.\begin{aligned} z r_1 &= m_2 \\ (z-V)\, r_2 &= m_2 \end{aligned}\right\}$$

Die Projection derselben auf die XY-Ebene ergibt sich dann durch Elimination von z. Man erhält:

$$\left(\frac{m_1}{r_1} - V\right) r_2 = m_2$$

oder:

$$V = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = c_1 + c_2$$

Dies ist aber auch die Bedingung, welche das Potential zu erfüllen hat, wenn es durch die Wirkung zweier Ladungen m_1 und m_2 erzeugt wird, die aber entgegengesetztes Zeichen haben.

Ist daher die eine Rotationshyperbel um ein verlangtes Stück V gegen die andere in der Richtung der Z-Axe verschoben, so gibt die Projection der Durchdringungscurve beider Flächen die ganze Niveaulinie vom verlangten Werthe V.

Bei der sonst üblichen Constructionsweise muss man aus einer grossen Reihe von zwei concentrischen Kreissystemen sich immer jene aussuchen, deren algebraische Summe gerade das verlangte Potential geben. Man findet so oft nur wenige solche Schnittpunkte. Hier kann man sich eine stetige Reihe von zusammengehörigen Kreisen construiren, die alle Schnittpunkte zur selben Niveaulinie liefern und so beliebig viele Punkte derselben construiren.

Man wird zu dem Zwecke die beiden Rotationsflächen durch Ebenen schneiden, welche der XY-Ebene parallel sind. Wird eine solche Schnittebene in der Höhe z gelegt, so sind die Radien r_1 und r_2 der beiden Kreise, in welchen die Rotationsflächen geschnitten werden, die zu dem entsprechenden z gehörigen x-Coordinaten der Hyperbeln H_1 und H_2 und daher ebenso zu construiren wie im vorhergehenden Artikel angegeben ist.

Für alle z, welche Coordinaten x_1 und x_2 ergeben, wo:

$$x_2 + x_1 \gtreqless 2a \lesseqgtr x_2 - x_1$$

wird man Schnittpunkte der Kreise, also auch Punkte der gesuchten Niveaulinie bekommen.

a) Die wichtigsten Werthe, welche die Niveaulinien annehmen unter der Wirkung zweier entgegengesetzt geladener Punkte sind nun:

1. Der Werth $V = O$. Für diesen Fall liegen die Abscissenaxen beider Hyperbeln in einer Geraden (Fig. 1, Taf. I). Die Niveaucurve besteht aus zwei Kreisen, dem unendlich fernen Kreise und einem zweiten, welcher gegeben ist durch die Bedingung:

$$\frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2} = O \text{ oder: } \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2}$$

woraus sich seine Construction unmittelbar ergibt.

Die Durchschnittspunkte desselben mit der X-Axe sind der äussere und innere Ähnlichkeitspunkt zweier Kreise, die mit den Radien m_1 und m_2 in O_1 und respective O_2 geschlagen sind.

2. Rückt man mit der Hyperbel H_2 in der z-Richtung aufwärts, so ergeben sich lauter positive Potentiale, welche Curven liefern, die alle innerhalb des Kreises vom Potentiale Null liegen.

3. Während bei einem Herabrücken der Hyperbel H_2 (Fig. 2, Taf. I) die Durchdringungscurve der beiden Rotationsflächen aus zwei geschlossenen Ästen besteht. Der eine entwickelt sich aus dem Kreise vom Potentiale Null, welchen er umgibt, während der andere aus dem unendlich fernen Kreise entsteht, von dem er, sich verengernd, herankommt.

Die Potentiale sind dann natürlich alle negativ.

4. Die beiden getrennten Äste vereinigen sich zu einer zusammenhängenden Curve im Momente, als die Rotationsflächen sich im Punkte D' (Fig. 3, Taf. I) berühren. Dies ergibt jene blattförmige Curve, welche in ihrem reellen Doppelpunkte einen Indifferenzpunkt bildet. An jener Stelle ist die Kraft gleich Null, da sich dort die Niveaulinie selbst durchschneidet. Sind DO_1 und

DO_2 die Abstände dieses Punktes von den Ladungscentren, so besteht dann die Beziehung:

$$\frac{m_1}{(DO_1)^2} - \frac{m_2}{(DO_2)^2} = 0$$

also:

$$\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}}\,.$$

Seine Lage ist daher auch aus den Angaben, mit welchen die Hyperbeln angelegt wurden, unmittelbar ersichtlich.

Man trägt die Strecken $\sqrt{m_1}$ und $\sqrt{m_2}$ von O_1 und respective O_2 auf zwei parallelen Richtungen, z. B. den Rotationsaxen der Hyperbelflächen in gleichem Sinne auf. Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Strecken schneidet dann die Axe $O_1 O_2$ im gesuchten Doppelpunkte D.

Da man diesen Punkt construiren kann, bloss aus der Angabe der Lage der geladenen Punkte und der Grösse der Ladungen, so kann man dann nachträglich bestimmen, um welche Strecke $O_1 O'_2$ die Hyperbel H_2 zu verschieben ist, so dass sie die andere Hyperbel H_1 gerade im Punkte D' berührt und so die Niveaulinie mit dem Doppelpunkte ergibt. Zieht man nämlich, so lange die Rotationsflächen noch nicht gegen einander verschoben sind, die also Gerade $O_1 O_2$ als gemeinsame Assymptote haben, durch D eine Parallele zur z-Richtung, so kann man die Schnittpunkte dieser Geraden mit jeder der Hyperbeln H_1 und H_2 für sich bestimmen. Es ist dies einfach die Aufgabe, zu einem bestimmten x das zugehörige z zu bestimmen.

Seien diess die Punkte D' und D''. Die Ordinate DD'' wird die grössere sein. Ich muss daher die Hyperbel H_2 um so viel nach abwärts verschieben, als DD'' grösser ist als DD', so dass D'' und D' zusammenfallen. Es muss also $O_2 O_2' = DD'' - DD'$.

Dadurch ist auch die Grösse des Potentials $V = O_2 O_2'$ gefunden, für welches die Blattcurve eintritt.

5. Rückt man (Fig. 4, Taf. I) noch weiter im negativen Sinne, so trennt sich die Curve im Doppelpunkte und bildet nur eine einzige zusammenhängende Curve, welche den Punkt O_2 allein umgibt. Sie wird bei fortgesetzt grösser werdenden negativen Potentialen immer kleiner und einem Kreise ähnlicher.

Bei den Figuren 1 und 4 von Tafel I ist auch angedeutet wie die entsprechenden Radien construirt werden, welche einen, Schnittpunkt der Curve ergeben, und ist die gelegte Schnittebene mit S bezeichnet.

Dies sind die bekannten charakteristischen Hauptformen, welche bei den Niveaulinien auftreten, wenn zwei entgegengesetzt geladene Punkte das elektrische Feld hervorrufen.

b) In ganz analoger Weise erhält man auch die Niveaulinien, welche durch die Wirkung zweier gleichartig geladener Punkte entstehen. Es ist da nur zu erwägen, dass die Summe der z-Ordinaten der beiden Rotationsflächen die constante Grösse des Potentials ergeben muss.

Dies wird sofort erreicht, wenn man die eine der Rotationsflächen, z. B. H_2 umkehrt, so dass ihre z-Richtung der der anderen Rotationsfläche entgegengesetzt ist.

Es ergeben sich dann wieder durch blosses Verschieben der einen Rotationsfläche längs ihrer Rotationsaxe alle möglichen Niveaulinien durch Projection der Durchdringungscurve der beiden Rotationsflächen auf die XY-Ebene.

Die wesentlichen Hauptformen sind nun:

1. Der Werth $V = O$. Es sind dann also die Hyperbeln so aneinander zu legen, dass die Gerade $O_1 O_2$ ihre gemeinsame Assymptote wird. (Fig. 5, Taf. I.)

Man sieht, dass sich die beiden Rotationsflächen nur in unendlicher Ferne treffen und also auch nur dort das Potential Null herrscht.

2. Wollte man mit der Hyperbel H_2 nach abwärts rücken, also negative Potentiale erhalten, so sieht man, dass sich gar keine Schnittcurven der beiden Rotationsflächen ergeben. Es gibt also überhaupt nur positive Potentiale.

3. Rückt man also um ein positives Stück $O_2 O_2'$ mit der Rotationsfläche H_2 nach aufwärts, so ist die Projection der Durchdringungscurve eine einfache zusammenhängende, der allgemeinen Lemniscatenform ähnliche Curve, welche beide Ladungscentra umschliesst. (Fig. 6, Taf. I.)

4. Bei noch weiterem Aufwärtsrücken gelangt man wieder zu einer Stelle, wo sich die beiden Rotationsflächen von Innen berühren. (Fig. 7, Taf. I.) Es ergibt dies eine lemniscatenartige

Curve mit einem reellen Doppelpunkt, welcher wieder ein Indifferenzpunkt sein muss. Seine Lage auf der Axe $O_1 O_2$ ist in gleicher Weise zu finden, wie im vorhergehenden Falle, nur ist zu berücksichtigen, dass jetzt m_2 die entgegengesetzte Ladung führt, als dortselbst. Es ist daher eine der Grössen $\sqrt{m_1}$ oder $\sqrt{m_2}$ nach der entgegengesetzten Seite aufzutragen. Die Verbindungsgerade der Endpunkte dieser Strecken schneidet dann die Axe im Punkte D zwischen den Punkten O_1 und O_2.

Die Grösse des Potentials, bei welchem diese Curve als Niveaulinie auftritt, wird wieder so bestimmt, dass man in dem construirten Punkte D, bei der Lage der Hyperbelflächen für das Potential Null, die beiden Ordinaten DD' und DD'' bestimmt und dann die Hyperbel H_2 so lange nach aufwärst verschiebt, bis D'' und D' zusammenfällt. Es ist dann

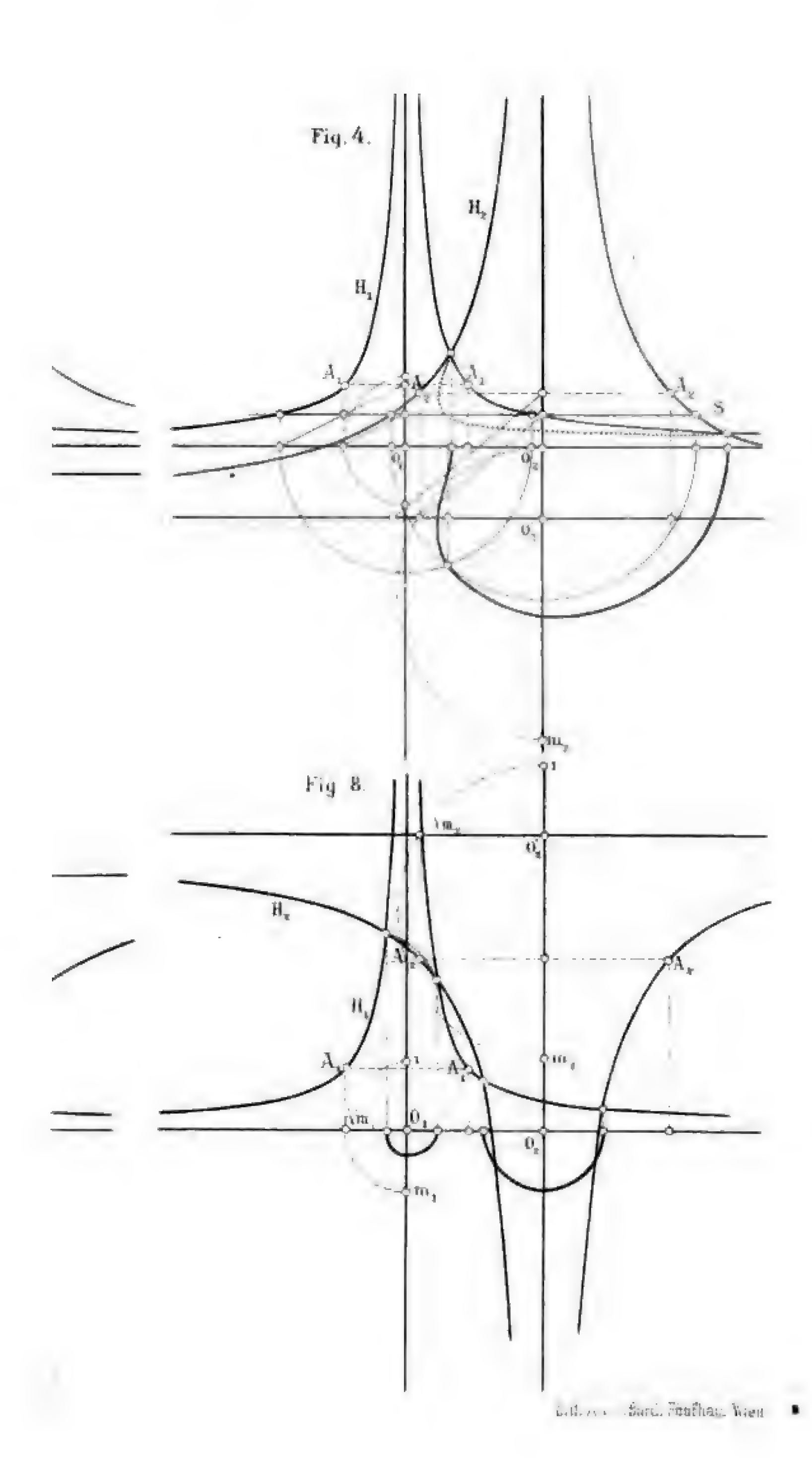
$$V = O_2 O'_2 = DD' + D''D$$

5. Rückt die Hyperbel H_2 noch weiter, so zerreisst die Curve im Doppelpunkte und besteht aus zwei getrennten Curven (Fig. 8, Taf. I), welche jede eines der Ladungscentra umgibt und die bei immer grösseren positiven Potentialen sich immer mehr der Gestalt eines Kreises nähern.

Will man die Vertheilung der Niveaulinien bei gegebenen Ladungen für verschiedene Lagen der Ladungscentren rasch überblicken können, so empfiehlt es sich, die eine der Hyperbeln auf Pauspapier zu zeichnen und auf der anderen in den fraglichen Lagen zu verschieben.

Es ist also gezeigt, dass man durch blosse Construction mit Zirkel und Lineal, ohne jede Rechnung, alle Daten erhalten kann, welche bei der Darstellung von Niveaulinien der angeführten Art wichtig sind.

Insbesondere erschien mir die hier gegebene Darstellungsweise deshalb bemerkenswerth, weil es ein gutes Beispiel ist, wie man oft Probleme der Ebene durch Heranziehung eines passend gewählten räumlichen Gebildes von einem erweiterten Gesichtspunkte aus behandeln kann. Man findet so oft einen Erklärungsgrund für constructive Details, die aus der blossen Betrachtung des ebenen Problems verschlossen bleiben.


Fig. 4.
Fig 8.



r freie Fall, berechnet aus dem Gravitationsgesetze

von

Dr. Alois Walter,

Assistenten am physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. Juni 1890.)

Die altehrwürdigen Erfahrungsthatsachen, dass ein frei-
lender Körper sich mit gleichbleibender, nur vom Orte des
.lles abhängiger Beschleunigung in einer Geraden vertical
ch abwärts bewegt, Thatsachen, welche in den bekannten
rmeln

$$b = g$$
$$v = gt$$
$$s = g\frac{t^2}{2}$$

ren mathematischen Ausdruck finden, sind genau genommen,
ır als erste Annäherung an die Wirklichkeit anzusehen, welcher
e allerdings, zum mindesten bei allen unserer Beobachtung
ıgänglichen Fallhöhen, bereits ungemein nahe kommen.

Fallversuche, welche mit ganz besonderer Sorgfalt und bei
ıöglichst grossen Fallhöhen in den ersten Jahrzehnten dieses
ahrhunderts, wie bekannt, insbesondere von den Physikern
Benzenberg und Reich ausgeführt wurden, konnten die
enannten Fudamentalgesetze des freien Falles nur dahin
rgänzen, dass die Bahn des fallenden Körpers nicht eigentlich
lie Verticale seines Ausgangspunktes selbst ist, sondern dass
lieselbe vielmehr durch eine diese Verticale berührende, unge-
nein schwach nach Osten gekrümmte Curve dargestellt werde.

Die einzige Kraft, welche einen freifallenden Körper bewegt,
ıst die Erdschwere; es muss daher möglich sein, einzig aus dem

Gravitationsgesetze nach den Principien der Mechanik die ganze Erscheinung des freien Falles berechnen zu können; dieser Gedanke ist so selbstverständlich, dass er natürlich längst und zu wiederholtenmalen durchgeführt wurde.

Eine derartige analytische Untersuchung des Problemes des freien Falles liegt von Gauss[1] vor, indess eine aus neuerer Zeit stammende Arbeit über denselben Gegenstand Herrn Hoppe[2] zum Verfasser hat.

Beide Forscher erreichen, wenngleich im Gange der Rechnung sehr von einander abweichend, ihr Ziel, die Coordinaten des fallenden Körpers als Functionen der Zeit darzustellen, durch Integrationen in geschlossener Form; aber zum Schlusse fühlen sich beide Autoren in übereinstimmender Weise veranlasst, ihre in geschlossener Form erhaltenen Resultate wieder in Potenzreihen, deren Argument die Zeit ist, aufzulösen, und schreiben dieselben mit einer wünschenswerthen Zahl von Anfangsgliedern an, und dies aus gutem Grunde; denn die Dauer eines freien Falles ist ja immer verschwindend klein gegenüber der Dauer der ganzen Centralbewegung, welche der freifallende Körper um den Erdmittelpunkt vollführen würde, wenn er eben nicht durch sein alsbaldiges Auffallen auf den Erdboden an der vollständigen Ausführung derselben verhindert würde; es handelt sich also für uns nur um die Beschreibung der Bewegung während eines ganz kurzen Zeitraumes, und da gewährt eine Potenzreihe, beziehungsweise eine genügende Anzahl ihrer Anfangsglieder, eine bei weitem bessere Einsicht in den Verlauf der Coordinatenwerthe, als die geschlossenen Formeln dies gestatten, ausserdem würde auch für dieses kleine Zeitintervall eine numerische Berechnung der Coordinatenwerthe viel leichter und auch viel genauer aus der Potenzreihe möglich sein, als aus den geschlossenen Formeln.

Wir haben also hier eines jener Probleme vorliegen, bei denen es in Folge der relativen Kleinheit der in der Praxis

---

[1] „Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwerer Körper auf der rotirenden Erde“; Brief von Gauss an Benzenberg vom 2. Februar und 8. März 1803. (Ges. W. V. S. 495 und S. 497).

[2] „Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche“. (Grunert's Archiv, 64. Theil, S. 96, 1879).

rklich vorkommenden Werthe der unabhängigen Variablen genüber dem Intervalle der überhaupt möglichen Werthe derben viel wünschenswerther ist, die Resultate als Potenzreihen ser Variablen, angeschrieben mit der durch die Genauigkeitsnze nöthig gemachten Anzahl von Anfangsgliedern, statt als nctionen in geschlossener Form zu erhalten.

Zur Lösung vieler derartiger Probleme empfiehlt sich nun ufig auf's vortheilhafteste eine Methode, welche geradenwegs rauf ausgeht, aus den Differentialgleichungen des Problems mittelbar die Coëfficienten der einzelnen Glieder der Potenzhen, so viele man ihrer eben benöthigt, und zwar nur durch ıwendung der elementarsten Rechenoperationen zu gewinnen.

Der Hauptvortheil dieser Methode liegt in der Vermeidung lweder Integration und in der Möglichkeit ihrer Durchführbarit ohne Rücksicht auf den Bau der vorliegenden Differentialeichungen; dagegen leidet die Methode an dem Übelstande, ss ihre Anwendung leicht etwas langwierig und umständlich rd; ausserdem ist ihre Verwendbarkeit auf Probleme der eben kennzeichneten Art beschränkt.

Im Folgenden soll nun das Problem des freien Falles auf ese Art durchgeführt werden.

Wir setzen hiebei die Erde als Kugel, bestehend aus concenischen Schichten von je einerlei Dichte, voraus; dann ist die rösse der Anziehung, welche ein materieller Punkt von der Masse erfährt, der sich in der Distanz ρ vom Erdmittelpunkt befindet,

$$\frac{KM\mu}{\rho^2},$$

obei K die Gravitationsconstante und M die Erdmasse bedeutet, ıd seine Beschleunigung daher

$$\frac{KM}{\rho^2} = \frac{C}{\rho^2};$$

doch gilt diese Beschleunigung bekanntlich nur für ein an der rddrehung nicht theilnehmendes Coordinatensystem.

Wir denken uns ein solches in der That eingeführt, die -Axe desselben falle mit der Erdaxe zusammen, die $\mathfrak{x}$- und die -Axe sollen sich in der Äquatorebene befinden.

Für dieses Coordinatensystem lauten dann die Differentialgleichungen der Bewegung des fallenden Körpers

$$\mathfrak{x}'' = -\frac{C\mathfrak{x}}{\rho^3}$$
$$\mathfrak{y}'' = -\frac{C\mathfrak{y}}{\rho^3}$$
$$\mathfrak{z}'' = -\frac{C\mathfrak{z}}{\rho^3}$$

wobei $\rho^2 = \mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2$ ist.

Wir wünschen aber unsere Resultate natürlich für ein mit der Erde fest verbundenes Coordinatensystem zu erhalten; dies erreichen wir mit Leichtigkeit durch eine einfache Coordinatentransformation; wir führen ein zweites Coordinatensystem ein, welches an der Erdrotation theilnimmt und dessen Axen anfangs vollkommen mit den Axen des früheren zusammenfallen.

Da zur Zeit t die ξ-Axe des neuen Systems mit der x-Axe des alten einen Winkel von der Grösse ωt einschliesst, wobei ω die constante Winkelgeschwindigkeit der Erde bedeutet, so bestehen zwischen den alten Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ und den neuen Coordinaten $\xi\eta\zeta$ desselben Punktes die Relationen

$$\mathfrak{x} = \xi \cos \omega t - \eta \sin \omega t$$
$$\mathfrak{y} = \xi \sin \omega t + \eta \cos \omega t$$
$$\mathfrak{z} = \zeta.$$

Hiebei sind $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$ ebenso wie $\xi\eta\zeta$ Functionen der Zeit; durch zweimaliges Differenziren nach dieser unabhängigen Veränderlichen erhält man

$$\mathfrak{x}'' = (\xi''-2\,\eta'\omega-\xi\omega^2) \cos \omega t-(\eta''+2\,\xi'\omega-\eta\omega^2) \sin \omega t$$
$$\mathfrak{y}'' = (\xi''-2\,\eta'\omega-\xi\omega^2) \sin \omega t+(\eta''+2\,\xi'\omega-\eta\omega^2) \cos \omega t$$
$$\mathfrak{z}'' = \zeta''.$$

Führt man nun diese Werthe in die Differentialgleichungen der Bewegung ein, so verwandeln sich diese in die analogen Gleichungen für ein mit der Erde fest verbundenes System; man erhält so

$$2\,\eta'\omega-\xi\omega^2)\cos\omega t-(\eta''+2\,\xi'\omega-\eta\omega^2)\sin\omega t =$$
$$=-\frac{C}{\rho^3}(\xi\cos\omega t-\eta\sin\omega t)$$
$$2\,\eta'\omega-\xi\omega^2)\sin\omega t+(\eta''+2\,\xi'\omega-\eta\omega^2)\cos\omega t =$$
$$=-\frac{C}{\rho^3}(\xi\sin\omega t+\eta\cos\omega t)$$
$$\zeta''=-\frac{C\zeta}{\rho^3}.$$

Aus diesen drei Gleichungen lassen sich sofort drei bedeu- l einfachere gewinnen; multiplicirt man nämlich die erste ichung mit $\cos\omega t$, die zweite mit $\sin\omega t$, und addirt sie ann, so erhält man

$$\xi''=-\frac{C\xi}{\rho^3}+\xi\omega^2+2\,\eta'\omega;$$

ltiplicirt man dagegen die erste mit $\sin\omega t$ und die zweite mit ωt, so ergibt die Addition

$$\eta''=-\frac{C\eta}{\rho^3}+\eta\omega^2-2\,\xi'\omega;$$

dritte Gleichung

$$\zeta=-\frac{C\zeta}{\rho^3}$$

öge unverändert beibehalten bleiben.

Dies sind die Differentialgleichungen der Bewegung eines eifallenden Körpers für ein mit der Erde fest verbundenes oordinatensystem; sie unterscheiden sich von den ent- rechenden Gleichungen für ein an der Erdrotation nicht theil- ehmendes Coordinatensystem nur durch das Vorhandensein er Componenten der Centrifugal- und der zusammengesetzen entrifugalbeschleunigung.

Es ist sehr leicht, an dieser Stelle auch den Luftwiderstand u berücksichtigen, da derselbe eine Function der Geschwindig- eit des fallenden Körpers gegenüber der Erde, also auch gegen- über dem Coordinatensysteme $\xi\eta\zeta$ ist.

Man nimmt, gestützt auf diesbezügliche Erfahrungen, be- kanntlich an, dass der Luftwiderstand bei kleineren Geschwindig-

keiten proportional der ersten Potenz, bei grösseren dagegen proportional der zweiten Potenz der Geschwindigkeit gesetzt werden könne; da nun ein freifallender Körper anfangs eine kleine und zum Schlusse eine grosse Geschwindigkeit hat, dürfte sich hier vielleicht für die Beschleunigung des Luftwiderstandes ein Ausdruck von der Form

$$\alpha v + \beta v^2$$

empfehlen; α und β sind dann abhängig von der Gestalt und Masse des fallenden Körpers, sowie von der Dichte der Luft; hiebei ist α eine Grösse von der Dimension $\sec^{-1}$, und β eine Grösse von der Dimension cm^{-1}.

Da die Richtungscosinusse des Luftwiderstandes

$$-\frac{\xi'}{v}, \quad -\frac{\eta'}{v}, \quad -\frac{\zeta'}{v}$$

sind, wobei $v = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}$ ist, so sind die Componenten der Beschleunigung des Luftwiderstandes

$$\begin{aligned} &-\alpha\xi' - \beta v\xi', \\ &-\alpha\eta' - \beta v\eta', \\ &-\alpha\zeta' - \beta v\zeta'; \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes lauten somit die Differentialgleichungen des freien Falles

$$\begin{aligned} \xi'' &= -\frac{C\xi}{\rho^3} + \xi\omega^2 + 2\,\eta'\omega - \alpha\xi' - \beta v\xi' \\ \eta'' &= -\frac{C\eta}{\rho^3} + \eta\omega^2 - 2\,\xi'\omega - \alpha\eta' - \beta v\eta' \\ \zeta'' &= -\frac{C\zeta}{\rho^3} - \alpha\zeta' - \beta v\zeta'. \end{aligned}$$

Unser Ziel ist nun, die Coordinaten $\xi\eta\zeta$ als Potenzreihen von t darzustellen; zu diesem Zwecke bedienen wir uns der Taylor'schen Formel

$$\xi = \xi_0 + \xi_0' . t + \xi_0'' . \frac{t^2}{2} + \xi_0''' . \frac{t^3}{6} + \dots\dots$$

und der analogen für η und ζ.

Hiezu ergeben sich die Werte der Coëfficienten ξ_0 und ξ'_0 aus den Anfangsbedingungen des Problems, indess die folgenden Coëfficienten $\xi''_0, \xi'''_0, \ldots$ mit Leichtigkeit aus den Differentialgleichungen durch successives Differenziren gewonnen werden können.

Setzt man der Einfachheit halber voraus, dass die $\xi\zeta$-Ebene des Coordinatensystems durch den Ausgangspunkt der Fallbewegung gelegt wurde, welcher sich unter der geographischen Breite φ befinden und die Distanz r vom Erdmittelpunkte haben möge, so ist zunächst

$$\begin{aligned} \xi_0 &= r \cos \varphi \\ \eta_0 &= 0 \\ \zeta_0 &= r \sin \varphi; \end{aligned}$$

der Voraussetzung, dass der betrachtete Körper frei fallen gelassen wurde, entsprechen

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= 0 \\ \eta'_0 &= 0 \\ \zeta'_0 &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man in den oben abgeleiteten Differentialgleichungen für alle in denselben vorhandenen Grössen die Werthe, welche dieselben zu Beginn der Bewegung haben, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi''_0 &= \left(\frac{C}{r^2} - r\omega^2\right) \cos \varphi \\ \eta''_0 &= 0 \\ \zeta''_0 &= -\frac{C}{r^2} \,.\sin \varphi. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen gestatten zugleich die Berechnung der Grösse der Beschleunigung g für den Anfang der Bewegung; da

$$g^2 = \xi_0''^2 + \eta_0''^2 + \zeta_0''^2$$

ist, so ist

$$g = \sqrt{\left(\frac{C}{r} - r\omega^2\right)^2 \cos^2\varphi + \left(\frac{C}{r^2}\right)^2 \sin^2\varphi};$$

bezeichnen wir speciell den Werth dieser Beschleunigung für einen Ort am Äquator mit G, so ist

$$G = \frac{C}{r^2} - r\omega^2$$

und

$$g = \sqrt{G^2 + r\omega^2(2\,G + r\omega^2)\sin^2\varphi}.$$

Diese Formel zeigt die Zunahme der Beschleunigung nach den Polen hin.

Man kann nun auch schreiben

$$\xi_0'' = -G.\cos\varphi$$
$$\eta_0'' = 0$$
$$\zeta_0'' = -(G + r\omega^2)\sin\varphi.$$

Die Coëfficienten der dritten Potenzen von t erhält man nun durch einmaliges Differenziren der Differentialgleichungen; dieses liefert

$$\xi''' = -r^2(G + r\omega^2)\left(\frac{\xi'}{\rho^3} - \frac{3\,\xi\rho'}{\rho^4}\right) + \xi'\omega^2 + 2\eta''\omega - \alpha\xi'' - \beta(v\xi'' + v'\xi');$$

setzt man hier für alle Veränderlichen ihre Anfangswerthe, wobei man diejenigen von v' und ρ' durch Differenziren der Gleichungen

$$v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$$

und

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

erhalten kann, so findet sich

$$\xi_0''' = \alpha G\cos\varphi$$

und ebenso

$$\eta_0''' = 2\,\omega G\cos\varphi$$
$$\zeta_0''' = \alpha(G + r\omega^2)\sin\varphi.$$

Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert

$$\xi_0'''' = G\left(-\alpha^2 + 2\,\beta g - \frac{2\,G}{r} + \omega^2 - 3\,\omega^2\sin^2\varphi\right)\cos\varphi -$$
$$-3\,r\omega^4\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$\eta_0'''' = -4\,\alpha\omega G\cos\varphi$$

$$\zeta_0'''' = (G + r\omega^2)\left(-\alpha^2 + 2\,\beta g - \frac{2\,G}{r} + \omega^2 - 3\,\omega^2\sin^2\varphi\right)\sin\varphi$$

u. s. w.; doch dürften höhere Potenzen bei der Berechnung des freien Falles kaum mehr nöthig sein.

Man könnte nun ohne Weiteres die Potenzreihen für die Coordinaten bis zu den Gliedern vierter Ordnung anschreiben; wir ziehen es jedoch vor, früher auf ein anderes Coordinatensystem überzugehen, das auch mit der Erde fest verbunden ist, dessen Axen jedoch eine für die Interpretation der erhaltenen Resultate dienlichere Richtung haben; die $\bar{z}$-Axe dieses neuen Systems soll nämlich die Richtung der Schwere im Ausgangspunkte der Fallbewegung vorstellen, indess die $\bar{y}$-Axe mit der bisherigen η-Axe zusammenfallen soll; es entsteht also das neue System einfach durch Drehung des alten um dessen η-Axe.

Entsprechend diesen Voraussetzungen ist daher

$$\bar{x} = \xi . \cos(\xi\bar{x}) + \zeta . \sin(\xi\bar{x})$$
$$\bar{y} = \eta$$
$$\bar{z} = -\xi . \sin(\xi\bar{x}) + \zeta . \cos(\xi\bar{x})$$

und

$$\cos(\xi\bar{z}) = \cos(\xi g) = -\frac{G}{g} . \cos\varphi$$
$$\cos(\eta\bar{z}) = \cos(\eta g) = 0$$
$$\cos(\zeta\bar{z}) = \cos(\zeta g) = -\frac{G + r\omega^2}{g} . \sin\varphi.$$

Da nun

$$(\xi\bar{x}) = (\xi\bar{z}) + (\bar{z}\bar{x}) = (\xi\bar{z}) - \frac{\pi}{2}$$

ist, so ist

$$\sin(\xi\bar{x}) = -\cos(\xi\bar{z}) = \frac{G}{g} . \cos\varphi;$$

da ferners auch

$$(\xi\bar{x}) = (\xi\zeta) + (\zeta\bar{z}) + (\bar{z}\bar{x}) = \frac{\pi}{2} + (\zeta\bar{z}) - \frac{\pi}{2} = (\zeta\bar{z})$$

ist, so ist

$$\cos(\xi\bar{x}) = \cos(\zeta\bar{z}) = -\frac{G + r\omega^2}{g} . \sin\varphi;$$

demnach lauten die Transformationsformeln

$$\bar{x} = -\xi . \frac{G + r\omega^2}{g} \sin\varphi + \zeta . \frac{G}{g} \cos\varphi$$
$$\bar{y} = \eta$$
$$\bar{z} = -\xi . \frac{G}{g} \cos\varphi - \zeta . \frac{G + r\omega^2}{g} . \sin\varphi .$$

Dieses Coordinatensystem $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ hat aber noch die Unbequemlichkeit, dass sein Anfangspunkt im Erdmittelpunkte sich befindet; durch eine Parallelverschiebung verlegen wir denselben in den Ausgangspunkt der Fallbewegung und erhalten so schliesslich das Coordinatensystem xyz, dessen z-Axe vertical nach abwärts gerichtet ist, indess sich die x- und die y-Axe in der Ebene des Horizontes befinden, und zwar weist die erstere nach Norden, die letztere nach Osten.

Da die Coordinaten des Ausgangspunktes der Fallbewegung ftlr das System $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

$$\frac{r^2\omega^2}{g} . \cos\varphi \sin\varphi,$$
$$0,$$
$$-\frac{rG}{g} - \frac{r^2\omega^2}{g} . \sin^2\varphi$$

sind, so bestehen als Transformationsformeln die Gleichungen

$$x = \frac{r^2\omega^2}{g} . \cos\varphi \sin\varphi + \bar{x}$$
$$y = \bar{y}$$
$$z = \frac{rG}{g} + \frac{r^2\omega^2}{y} . \sin^2\varphi + \bar{z}$$

oder

$$x = \frac{r^2\omega^2}{g} \cos\varphi \sin\varphi - \xi \frac{G + r\omega^2}{g} \sin\varphi + \zeta \frac{G}{g} \cos\varphi$$
$$y = \eta$$
$$z = \frac{rG}{g} + \frac{r^2\omega^2}{g} \sin^2\varphi - \xi \frac{G}{g} \cos\varphi - \zeta \frac{G + r\omega^2}{g} \sin\varphi .$$

Ftthrt man nun in diese Formeln die früher fltr ξ, η, ζ erhaltenen Potenzreihen (am besten gliedweise) ein, so erhält man die Resultatsformeln

$$x = 3\, r\omega^4 . \frac{G + r\omega^2}{g} . \cos\varphi . \sin^3\varphi . \frac{t^4}{24} + \ldots .$$

$$y = 2\,\omega G \cos\varphi . \frac{t^3}{6} - 4\,\alpha\omega G \cos\varphi . \frac{t^4}{24} + \ldots .$$

$$z = g . \frac{t^2}{2} - \alpha g . \frac{t^3}{6} + \Big\{ g\Big(\alpha^2 - 2\,\beta g + \frac{2\,G}{r} - \omega^2 + 3\,\omega^2 \sin^2\varphi\Big) + $$
$$+ 3\, r\omega^4 \frac{G}{g} . \cos^2\varphi . \sin^2\varphi \Big\} . \frac{t^4}{24} + \ldots .$$

Ähnliche Potenzreihen kann man nun auch noch für die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg ableiten.

Die Beschleunigung b ist definirt durch die Gleichung

$$b^2 = \xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2;$$

hieraus folgt sofort

$$b_0 = g.$$

Durch Differenziren erhält man nun

$$bb' = \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta'''$$

und daraus

$$b'_0 = -\alpha g$$

u. s. w.; auf diese Art wurde gefunden

$$= g - \alpha g t + \Big\{ g\Big(\alpha^2 - 2\,\beta g + \frac{2\,G}{r} - \omega^2 + 3\,\omega^2 \sin^2\varphi\Big) + $$
$$+ r\omega^2 \frac{G}{g} . \cos^2\varphi \Big(10 \frac{G}{r} - 3\,\omega^2 + 12\,\omega^2 \cos^2\varphi\Big)\Big\} . \frac{t^2}{2} + \ldots$$

Die Geschwindigkeit v ist definirt durch die Gleichung

$$v^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2;$$

r Voraussetzung gemäss ist $v_0 = 0$; um v'_0 zu erhalten, muss n die obige Gleichung zweimal nach der Zeit differenziren, von der durch nur einmaliges Differenziren hervorgehenden ichung für $t = 0$ beide Seiten verschwinden; es findet sich

$$= g . t - \alpha g . \frac{t^2}{2} + \Big\{ g\Big(\alpha^2 - 2\,\beta g + \frac{2\,G}{r} - \omega^2 + 3\,\omega^2 \sin^2\varphi\Big) + $$
$$+ 3\, r\omega^2 \frac{G}{g} \cos^2\varphi \Big(\frac{3\,G}{r} - \omega^2 + 4\,\omega^2 \sin^2\varphi\Big)\Big\} \frac{t^3}{6} + \ldots .$$

Das Integral dieser Potenzreihe ist der zurückgelegte Weg s; daher ist

$$s = g \cdot \frac{t^2}{2} - \alpha g \cdot \frac{t^3}{6} + \left\{ g\left(\alpha^2 - 2\,\beta g + \frac{2\,G}{r} - \omega^2 + 3\,\omega^2 \sin^2 \varphi\right) + \right.$$

$$\left. + 3\,r\omega^2 \cdot \frac{G}{g} \cdot \cos^2 \varphi \left(\frac{3\,G}{r} - \omega^2 + 4\,\omega^2 \sin^2 \varphi\right)\right\} \cdot \frac{t^4}{24} + \ldots.$$

Schreibt man von all' den hier entwickelten Potenzreihen unter Ignorirung des Luftwiderstandes nur die Glieder bis zur zweiten Ordnung an, so erhält man

$$x = 0 \qquad\qquad b = g$$

$$y = 0 \qquad\qquad v = gt$$

$$z = g\,\frac{t^2}{2} \qquad\qquad s = g\,\frac{t^2}{2},$$

welche Resultate nichts anderes als die empirischen Formeln für den freien Fall im luftleeren Raume sind.

Aus der Potenzreihe für y entnimmt man, dass eine nicht allzu grosse Abweichung des fallenden Körpers nach Osten vorhanden ist; diese würde fehlen, wenn die Erde nicht rotiren würde; es müssen daher alle Glieder der Potenzreihe y den Factor ω enthalten; ausserdem verschwindet dieselbe auf jeden Fall an den Polen, daher besitzen alle Glieder der Reihe auch noch den Factor $\cos \varphi$.

Die Reihe für x weist auf eine allerdings ungemein geringe Abweichung in nördlicher, beziehungsweise südlicher Richtung hin; aus demselben Grunde, wie früher, erscheint auch hier bei jedem Gliede der Factor ω; da diese meridionale Abweichung natürlich nicht nur an den Polen, sondern auch am Äquator verschwinden muss, enthält bei der Reihe x jedes Glied nicht nur den Factor $\cos \varphi$, sondern auch den Factor $\sin \varphi$.

Aus der grossen Übereinstimmung der Reihen für z und s ersieht man, dass der Weg des fallenden Körpers sich nur ganz wenig von der z-Axe, das ist von der Verticalen des Ausgangspunktes, entfernt.

Ein Zahlenbeispiel wird am besten im Stande sein, die erhaltenen Resultate zu illustriren.

Es werde an einem Orte mit der geographischen Breite $\varphi = 45°$ ein Fallversuch im luftleeren Raume angestellt; nimmt man nun

$$r = 637 . 10^{6}\, cm$$
$$\omega = 7 \cdot 2921 . 10^{-5}\ \mathrm{sec}^{-1}$$
$$g = 980 \cdot 6\ cm\ \mathrm{sec}^{-2},$$

so ergeben unsere Formeln

$$x = 5 \cdot 64 . 10^{-10} . t^{4} + \ldots .$$
$$y = 1 \cdot 68 . 10^{-2} . t^{3} + \ldots .$$
$$z = 490 \cdot 3 . t^{2} + 1 \cdot 26 . 10^{-4} . t^{4} + \ldots .$$
$$b = 980 \cdot 6 + 1 \cdot 52 . 10^{-3} . t^{2} + \ldots .$$
$$v = 980 \cdot 6 . t + 5 \cdot 07 . 10^{-4} . t^{3} + \ldots .$$
$$s = 490 \cdot 3 . t^{2} + 1 \cdot 27 . 10^{-4} . t^{4} + \ldots .$$

Über die Theorie der oscillatorischen Entladung

von

J. Stefan,
w. M. k. Akad.

Die Theorie der oscillatorischen Entladung einer Leydner Flasche ist von W. Thomson und Kirchhoff entwickelt worden. Dieselbe liefert für die Intensität des Entladungsstromes eine Gleichung, welche der Form nach mit jener für die Bewegung eines Pendels in einem widerstehenden Mittel übereinstimmt. Bei der Entwicklung dieser Theorie haben W. Thomson und Kirchhoff vorausgesetzt, dass der Entladungsstrom den ganzen Querschnitt des entladenden Drahtes in gleichförmiger Dichtigkeit erfüllt. Diese Voraussetzung weicht jedoch bei so rapid verlaufenden Strömen von der Wirklichkeit sehr weit ab. In solchen Fällen bleibt in einem metallischen Leiter die Bewegung der Elektricität nahezu vollständig auf eine sehr dünne, an der Oberfläche des Leiters liegende Schichte beschränkt.

Durch diese Anordnung der Strömung wird der Coëfficient der Selbstinduction des Leiters vermindert, sein Widerstand aber in bedeutendem Maasse vermehrt. Wenn die Änderung dieser Grössen nur die Folge hätte, dass für dieselben in die Gleichung andere bestimmte Werthe einzusetzen wären, so bliebe dadurch die Theorie in ihrer Wesenheit unberührt. Diese Grössen sind jedoch von der Art der Entladung, insbesondere für eine oscillirende Entladung von der Oscillationsdauer abhängig. Die Rücksichtnahme auf die ungleichförmige Vertheilung des Stromes muss also zu einer Darstellung des Vorganges der Entladung führen, welche von der Pendelbewegung verschieden ist. Die Untersuchung, welche ich über diesen Gegenstand ausgeführt habe und die ich im Folgenden mitzutheilen mir erlaube, hat

las wesentliche Resultat ergeben, dass eine oscillatorische
lung immer aus zwei Bewegungen zusammengesetzt ist,
elchen jedoch die eine viel früher erlischt als die andere.
etztere ist es, welche mit wachsender Zeit den Charakter
Pendelbewegung mit abnehmender Amplitude annimmt.
Die Einschaltung einer Funkenstrecke in den Schliessungs-
ı dürfte übrigens gerade für die erste Zeit der Entladung
viel grössere Abweichung von der Pendelbewegung hervor-
, als die durch die Theorie angegebene. Diese Abweichung
nicht ohne Einfluss auf die Inductionswirkungen der Ent-
ıg in benachbarten Leitern bleiben. Der Schliessungsbogen
ein mit ihm verbundener Leiter kann in einem anderen
r elektrische Bewegungen induciren, auch wenn die Dauer
Eigenschwingungen des letzteren von der Oscillationsdauer
erregenden Entladung ganz verschieden, eine eigentliche
nanz also ausgeschlossen ist. Diese Bewegung wird dann
eine Verstärkung erfahren, wenn der Inductionsstoss
ner den Eigenschwingungen des Leiters entsprechenden
tigen Zeit, z. B. in Folge einer Reflexion am Ende des indu-
den Drahtes, sich wiederholt. Darauf, glaube ich, können
von Sarasin und De la Rive gemachten Beobachtungen
ckgeführt werden. Ich will übrigens noch bemerken, dass
diesen Versuchen die Ebene des kreisförmigen secundären
ers senkrecht gegen die inducirenden Drähte gestellt war.
beobachteten Inductionen sind also nicht elektrodynamische
ewöhnlichem Sinne, sondern elektrostatische, welche durch
auf den Drähten wandernden Ladungen erregt werden.

In der oscillatorischen Entladung zeigt die bewegte Elek-
tät auffallender als in anderen Erscheinungen die Eigenschaft
Trägheit. Es wird auch häufig diese Entladung mit den
wingungen einer Flüssigkeit in zwei communicirenden Röhren
lichen. Ein solcher Vergleich bietet zunächst nur ein augen-
ges Bild für eine Erscheinung, deren Beobachtung mit grossen
wierigkeiten verbunden ist. Man kann aber diesem Vergleiche
Hilfe der Beziehung, welche zwischen den Principen der
gheit und der Energie besteht, noch eine weitere Ausdehnung
en. Die Energie, welche der Höhendifferenz der Flüssigkeit
len zwei communicirenden Röhren entspricht, verwandelt sich

während der Ausgleichung dieser Höhen in lebendige Kraft der Flüssigkeit. Diese lebendige Kraft kann sich wieder in eine Energie der ursprünglichen Art umsetzen, und zwar in der Weise, dass die neue Höhendifferenz gegen die frühere die entgegengesetzte Lage erhält. In der Umsetzbarkeit der beiden Energien in einander liegt der Grund für die schwingende Bewegung, die sonst auch als eine Folge der Trägheit aufgefasst wird. Wenn in Folge von Reibung ein Theil der Energie in Wärme verwandelt wird, welche nicht umsetzbar ist, so werden die Amplituden der Schwingungen immer kleiner. Die Bewegung vollzieht sich so, als hätte die Flüssigkeit keine vollkommene Trägheit.

Der Potentialdifferenz zwischen den Platten eines geladenen Condensators entspricht eine elektrostatische Energie. Werden die beiden Platten durch einen Draht verbunden, so verwandelt sich ein Theil dieser Energie wegen des Leitungswiderstandes des Drahtes in Wärme, der übrige Theil aber verwandelt sich in eine andere Energie, welche, wie die Thatsache der oscillatorischen Entladung zeigt, sich wieder in eine elektrostatische umsetzen kann, der Art, dass im Condensator eine der ursprünglichen entgegengesetzte Potentialdifferenz entsteht. Es handelt sich nun darum, welcher Art diese umsetzbare Energie ist. In dem besonderen Falle, in welchem der Entladungsdraht in Form einer Spirale um einen Eisenkern geführt wird, ist die Art eines Theiles, und zwar des grössten Theiles dieser Energie bekannt. Es ist die magnetische Energie, welche in dem während des Ausgleiches der Ladungen magnetisirten Eisen sich anhäuft und welche, nachdem der Ausgleich vollzogen ist, noch einen Strom in der gleichen Richtung unterhält und so den Condensator neuerdings, und zwar entgegengesetzt, ladet. Es ist am einfachsten, auch den anderen Theil der Energie und überhaupt diese Energie in den übrigen Fällen, in welchen eine unmittelbar wahrnehmbare Magnetisirung eines Körpers nicht vorhanden ist, als eine magnetische aufzufassen, welche in der Magnetisirung des Mediums, in dem die Entladung vor sich geht, ihren Sitz hat. Diese Annahme genügt ja auch zur Entwicklung der Gesetze der elektrodynamischen Induction.

)as Potential der elektrischen Ladung des Condensators
zur Zeit t auf der ersten Platte desselben den Werth P_1,
r zweiten Platte den Werth P_2. Die Menge der Elektricität
:r ersten Platte sei zur selben Zeit Q_1. Die Capacität C des
:nsators ist definirt durch die Gleichung

$$Q_1 = C(P_1 - P_2). \tag{1}$$

Iat der Entladungsstrom zur Zeit t die Intensität J, so ist

$$J = -\frac{dQ_1}{dt} = -C\frac{d}{dt}(P_1 - P_2). \tag{2}$$

'indet die Entladung zwischen zwei von einander weit
nten Conductoren statt, wie dies bei den Vibratoren von
z der Fall ist, so ergibt sich die Beziehung zwischen J und
otentialdifferenz $P_1 - P_2$ der Ladungen der beiden Conduc-
in folgender Weise. Ist C_1 die Capacität des ersten, C_2 jene
veiten Conductors, so ist

$$Q_1 = C_1 P_1, \qquad Q_2 = C_2 P_2$$

$$\frac{dQ_1}{dt} = -J, \quad \frac{dQ_2}{dt} = +J,$$

$$J = -\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\frac{d}{dt}(P_1 - P_2).$$

Sind die beiden Capacitäten C_1 und C_2 einander gleich, also
C_1, so ist in der Gleichung (2) $\frac{1}{2}C_1$ an die Stelle von C
zen.

)ie Intensität J ist die Summe der Intensitäten, welche die
ung in den einzelnen elementaren Fasern des Entladungs-
es besitzt. Ist u die Stromdichtigkeit für ein Element dq des
chnittes des Drahtes, so ist

$$J = \int u\,dq. \tag{3}$$

)as Integral ist über den ganzen Querschnitt des Drahtes
dehnen. Der Einfachheit wegen soll dieser Querschnitt als
örmig vorausgesetzt werden. Dann ist u ausser von t nur

noch von einer Variablen r, dem Abstande des Elementes dq vom Mittelpunkte des Kreises abhängig und durch die Gleichung

$$\frac{du}{dt} = k\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) \tag{4}$$

bestimmt. Der Coëfficient k ist $= \frac{\sigma}{4\pi\mu}$. σ bedeutet den specifischen Widerstand, μ die magnetische Leitungsfähigkeit der Substanz des Drahtes. Bezeichnet man die Magnetisirungszahl dieser Substanz mit θ, so ist $\mu = 1+4\pi\theta$.

Zur vollständigen Bestimmung von u gehören noch zwei Gleichungen, von denen eine u für $t = 0$ bestimmt, die andere eine für jeden Werth von t für die Oberfläche des Drahtes, also für $r = a$ zu erfüllende Bedingung darstellt. Die erste Gleichung soll für den vorliegenden Fall in $u = 0$ für $t = 0$ und jeden zwischen $r = 0$ und $r = a$ liegenden Werth von r bestehen. Die zweite Gleichung ist

$$P_1 - P_2 = l\sigma u_1 + L\frac{dJ}{dt}. \tag{5}$$

l bedeutet die Länge des Entladungsdrahtes, L den Coëfficienten der Induction, welche die Strömung auf eine in der Oberfläche des Drahtes liegende Faser ausübt, u_1 die Stromdichtigkeit in einer solchen Faser. Die auf eine solche Faser wirkende elektromotorische Kraft ist der Potentialdifferenz $P_1 - P_2$ gleich angenommen. Bezüglich der Ableitung der Gleichungen (4) und (5) verweise ich auf meine Abhandlung: Über veränderliche elektrische Ströme in dicken Leitungsdrähten.[1]

Die Gleichung (5) kann man durch eine andere ersetzen, welche nur die für die Oberfläche geltenden Werthe von u und seiner Differentialquotienten enthält. Differenzirt man diese Gleichung nach t und benützt die Relation (2), so folgt

$$-\frac{J}{C} = l\sigma\frac{du_1}{dt} + L\frac{d^2J}{dt^2}. \tag{6}$$

J kann noch in anderer Weise als durch die Formel (3) ausgedrückt werden. Multiplicirt man die Gleichung (4) mit $2\pi r dr$

[1] Diese Berichte, Bd. XCV, 2. Abth., S. 917—934, 1887.

und integrirt beide Seiten derselben von $r=0$ bis $r=a$, so folgt

$$\frac{dJ}{dt}=2\pi ak\left(\frac{du}{dr}\right), \tag{7}$$

worin der Differentialquotient von u nach r für $r=a$ zu nehmen ist. Differenzirt man (6) nochmals nach t und benützt die Relation (7), so erhält man

$$-\frac{2\pi ka}{C}\left(\frac{du}{dr}\right)_1=l\sigma\frac{d^2u_1}{dt^2}+2\pi kaL\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dr}\right)_1.$$

Führt man die Bezeichnungen

$$\frac{1}{LC}=m^2,\quad \frac{l\sigma}{2\pi akL}=\frac{2l\mu}{aL}=\frac{n}{\sqrt{k}} \tag{8}$$

ein, so erhält die für die Oberfläche geltende Bedingung die Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dr}\right)_1+\frac{n}{\sqrt{k}}\frac{d^2u_1}{dt^2}+m^2\left(\frac{du}{dr}\right)_1=0. \tag{9}$$

Die Lösung der Aufgabe wird sehr vereinfacht, wenn man den Fall eines sehr dünnen Drahtes ausschliesst und von vorneherein die Annahme macht, dass die Stromdichtigkeit u nur in einer sehr dünnen, an der Oberfläche liegenden Schichte endliche Werthe besitzt, in den tiefer liegenden Theilen des Drahtes aber verschwindend klein ist. Es empfiehlt sich dann, statt des Radius r die Tiefe x unter der Oberfläche als Veränderliche einzuführen. Man kann die Gleichung (4) durch die einfachere

$$\frac{du}{dt}=k\frac{d^2u}{dx^2} \tag{10}$$

und die Bedingungsgleichung (9) durch

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dx}\right)_0-\frac{n}{\sqrt{k}}\frac{d^2u_0}{dt^2}+m^2\left(\frac{du}{dx}\right)_0=0 \tag{11}$$

ersetzen, welche für $x=0$ zu erfüllen ist. Zu diesen beiden kommt dann noch die weitere Bedingung, dass für $t=0$ die Function u für alle positiven Werthe von x verschwinden muss.

Ein Integral der Gleichung (10), welches dieser letzteren Bedingung genügt, ist

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2} f(x + 2\eta\sqrt{kt})\, d\eta. \tag{12}$$

Darin bedeutet f eine beliebige Function und besteht die weitere Aufgabe nun lediglich darin, die Function f so zu wählen, dass dieses Integral auch der Gleichung (11) genügt. Dieses Verfahren ist schon von W. Thomson bei der Lösung einer analogen der Theorie der Wärmeleitung angehörigen Aufgabe angewendet worden. Aus (12) folgt zunächst

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta.$$

also

$$\frac{du_0}{dt} = \frac{k}{\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f'(2\eta\sqrt{kt}) . \eta d\eta.$$

Wendet man auf diese Formel das Verfahren der theilweisen Integration an, so erhält man

$$\frac{du_0}{dt} = -\frac{kf'(0)}{2\sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f''(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta$$

und daraus

$$\frac{d^2u_0}{dt^2} = \frac{kf'(0)}{4t\sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f'''(0)}{2\sqrt{\pi kt}} + \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f^{\text{IV}}(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta.$$

Ferner ergibt sich aus (12)

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = -\frac{f(0)}{2\sqrt{\pi kt}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f'(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta \tag{13}$$

und daraus erhält man

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{f(0)}{4t\sqrt{\pi kt}} - \frac{kf''(0)}{2\sqrt{\pi kt}} + \frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f'''(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{3f(0)}{8t^2\sqrt{\pi kt}} + \frac{kf''(0)}{4t\sqrt{\pi kt}} - \frac{k^2 f^{\text{IV}}(0)}{2\sqrt{\pi kt}}$$

$$+ \frac{k^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\eta^2} f^{\text{V}}(2\eta\sqrt{kt})\, d\eta.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (11) ein, so findet man, dass dieser genügt wird, wenn f allgemein die Gleichung

$$k^2 f^{v} - nk\sqrt{k}\, f^{iv} + m^2 f' = 0 \tag{14}$$

befriedigt und für den Nullwerth des Argumentes die Bedingungen

$$f(0) = 0,\ nf'(0) - \sqrt{k}\, f''(0) = 0,\ nf'''(0) - \sqrt{k}\, f^{iv}(0) = 0 \tag{15}$$

erfüllt.

Die Gleichung (14) liefert die Function $f'(y)$ als Summe von vier Exponentiellen. Ich will dieselbe in der Form

$$f'(y) = A_1 e^{\frac{\alpha_1 y}{\sqrt{k}}} + A_2 e^{\frac{\alpha_2 y}{\sqrt{k}}} + A_3 e^{\frac{\alpha_3 y}{\sqrt{k}}} + A_4 e^{\frac{\alpha_4 y}{\sqrt{k}}} \tag{16}$$

annehmen. Darin bedeuten A_1, A_2, A_3, A_4 erst zu bestimmende constante Grössen, α_1, α_2, α_3 und α_4 aber die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^4 - n\alpha^3 + m^2 = 0. \tag{17}$$

Zur Bestimmung der Constanten A dienen zuerst die Gleichungen (15). Die letzte derselben gibt

$$A_1(\alpha_1^3 - n\alpha_1^2) + \ldots + A_4(\alpha_4^3 - n\alpha_4^2) = 0,$$

wofür man mit Rücksicht auf (17) auch

$$\frac{A_1}{\alpha_1} + \frac{A_2}{\alpha_2} + \frac{A_3}{\alpha_3} + \frac{A_4}{\alpha_4} = 0 \tag{18}$$

setzen kann. Ebenso erhält man aus der zweiten der Gleichungen (15)

$$\frac{A_1}{\alpha_1^3} + \frac{A_2}{\alpha_2^3} + \frac{A_3}{\alpha_3^3} + \frac{A_4}{\alpha_4^3} = 0 \tag{19}$$

Es sind nun noch zwei Gleichungen nothwendig. Diese gewinnt man aus den Gleichungen (5) und (6), welche für jede Zeit, also auch für $t = 0$ gelten. Setzt man in denselben der Formel (7) entsprechend

$$\frac{dJ}{dt} = -2\pi a k \left(\frac{du}{dx}\right)_0, \tag{20}$$

so geben sie, da für $t=0$ sowohl u_1 oder $u_0=0$, als auch $J=0$ ist, für diesen Werth der Zeit

$$\frac{P_1^0-P_2^0}{2\pi akL}+\left(\frac{du}{dx}\right)_0=0$$

$$\frac{n}{\sqrt{k}}\frac{du_0}{dt}-\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dx}\right)_0=0.$$

Unter P_1^0 und P_2^0 sind die Werthe verstanden, welche die Potentiale P_1 und P_2 zur Zeit $t=0$ besitzen. Nach Einsetzung der Werthe der Differentialquotienten von u und Berücksichtigung der Gleichungen (15) erhält man

$$f'(0)=-\frac{P_1^0-P_2^0}{\pi akL},\quad nf''(0)-\sqrt{k}f'''(0)=0,$$

und daraus

$$A_1+A_2+A_3+A_4=-\frac{P_1^0-P_2^0}{\pi akL} \tag{21}$$

$$\frac{A_1}{\alpha_1^2}+\frac{A_2}{\alpha_2^2}+\frac{A_3}{\alpha_3^2}+\frac{A_4}{\alpha_4^2}=0. \tag{22}$$

Die Gleichungen (18), (19) und (21), (22) bilden einen besonderen Fall eines bekannten Systems von Gleichungen, deren allgemeine Lösung schon von Lagrange gegeben worden und welche für diesen besonderen Fall auch leicht direct zu finden ist. Es ist

$$A_1=-\frac{\alpha_1}{4\alpha_1-3n}\cdot\frac{P_1^0-P_2^0}{\pi akL}. \tag{23}$$

Setzt man in diese Formel an Stelle von α_1 der Reihe nach die Wurzeln α_2, α_3, α_4, so erhält man die zugehörigen Constanten A_2, A_3, A_4. Die Aufgabe ist hiemit vollständig gelöst.

Zur Discussion dieser Lösung will ich die Formeln, welche die Intensität der Entladung bestimmen, benützen. Aus (20) folgt, wenn man das Zeichen der Variablen η mit dem entgegengesetzten vertauscht,

$$\frac{dJ}{dt}=-\frac{2\pi ak}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\eta^2}\left(A_1e^{-2\alpha_1\eta\sqrt{t}}+\ldots A_4e^{-2\alpha_4\eta\sqrt{t}}\right)d\eta.$$

Den Werth von J kann man aus der Gleichung (6) oder direct aus der vorstehenden Formel durch Integration nach t ableiten. Zu diesem Behufe sind erst die darin enthaltenen Integrale nach dem Schema

$$\int_0^\infty e^{-\eta^2-2\alpha\eta\sqrt{t}}\,d\eta = e^{\alpha^2 t}\int_{\alpha\sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta$$

zu transformiren. Letzterer Ausdruck gibt nach t unbestimmt integrirt

$$\frac{e^{\alpha^2 t}}{\alpha^2}\int_{\alpha\sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta + \frac{1}{2\alpha\sqrt{t}}.$$

Der Werth von J setzt sich aus den vier derartigen Theilen zusammen, welche man erhält, wenn man α durch α_1 bis α_4 ersetzt. Es ist nun zu bemerken, dass die vier Glieder, welche $\sqrt{t}$ im Nenner tragen, in Folge der Gleichung (18) sich wegheben. Es bleibt sonach

$$J = -\frac{2\pi a k}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{A_1 e^{\alpha_1^2 t}}{\alpha_1^2}\int_{\alpha_1\sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta + \ldots + \frac{A_4 e^{\alpha_4^2 t}}{\alpha_4^2}\int_{\alpha_4\sqrt{t}}^\infty e^{-\eta^2}\,d\eta\right]. \tag{24}$$

Eine Constante der Integration ist nicht hinzuzufügen, da für $t=0$ auch $J=0$ werden muss und der vorstehende Ausdruck der Gleichung (22) gemäss diese Bedingung erfüllt.

Die Eigenschaften der die Stromstärke J darstellenden Function sind nun wesentlich abhängig von der Beschaffenheit der Wurzeln der Gleichung (17). Diese Gleichung kann keine reelle negative Wurzel haben, da die darin enthaltenen Grössen m und n wesentlich positiv sind. Eine negative Wurzel hätte auch zur Folge, dass das ihr entsprechende Glied in dem Ausdrucke für J mit wachsenden Werthen der Zeit t gegen unendlich convergiren würde. Die Gleichung kann nur positive reelle Wurzeln haben, da aber in ihr die Glieder mit der zweiten und ersten Potenz der Unbekannten fehlen, so können nicht alle vier Wurzeln, sondern nur zwei positiv sein, die beiden anderen sind complex, und zwar wegen des Fehlens der angeführten Glieder der Art, dass der reelle Bestandtheil derselben eine negative Zahl ist.

Es können aber auch alle vier Wurzeln complex sein, und zwar ist dies der gewöhnliche Fall. Die Abwesenheit der Glieder

mit der zweiten und ersten Potenz hat zur Folge, dass die reellen Bestandtheile der beiden complexen Wurzelpaare entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Es ist also in jedem Falle ein complexes Wurzelpaar mit einem negativen reellen Bestandtheil vorhanden.

Die Glieder in dem Ausdrucke für J, welche den complexen Wurzeln

$$\alpha_1 = p+qi, \quad \alpha_2 = p-qi$$

entsprechen, kann man, wenn die Coëfficienten

$$\frac{A_1}{\alpha_1^2} = \frac{1}{2}(M+Ni), \quad \frac{A_2}{\alpha_2^2} = \frac{1}{2}(M-Ni)$$

gesetzt werden, transformiren in

$$(M\cos 2pqt - N\sin 2pqt)e^{p^2t}\int_{p\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\eta^2}\cos 2\eta q\sqrt{t}\,.\,d\eta$$
$$+(M\sin 2pqt + N\cos 2pqt)e^{p^2t}\int_{p\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\eta^2}\sin 2\eta q\sqrt{t}\,.\,d\eta. \quad (25)$$

Ist p positiv, so convergiren mit wachsenden Werthen von t beide Theile dieses Ausdruckes gegen Null. Ist aber p negativ, so gilt dies ersichtlicher Weise nur für den zweiten Theil, für den ersten aber ist dies, weil

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\cos 2\eta q\sqrt{t}\,.\,d\eta = \sqrt{\pi}\,e^{-q^2t}$$

ist, nur dann der Fall, wenn q^2 grösser ist als p^2. Diese Bedingung ist auch thatsächlich erfüllt.

Substituirt man $p+qi$ für α in der Gleichung (17), so findet man die Relation

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{3n-4p}{n-4p}. \quad (26)$$

Da n wesentlich positiv ist, so folgt daraus sofort, dass q^2 für negative Werthe von p grösser ist als p^2.

Für das complexe Wurzelpaar, dessen reeller Theil p negativ ist, convergirt also der Ausdruck (25) mit wachsendem t gegen

$$\sqrt{\pi}\,e^{-(q^2-p^2)t}[M\cos 2pqt - N\sin 2pqt]. \quad (27)$$

Dieser Ausdruck stellt eine oscillatorische Bewegung dar, deren Amplituden mit der Zeit in geometrischer Progression abnehmen, die also der Bewegung eines Pendels entspricht. Die Schwingungsdauer τ ist durch

$$\tau = -\frac{\pi}{pq}$$

bestimmt.

Die Amplituden dieser Bewegung werden mit der Zeit umso langsamer abnehmen, je weniger q^2 von p^2 verschieden ist. Wie man aus (26) ersieht, kommt q^2 umso näher an p^2, je kleiner n ist. Für kleine Werthe von n wird also die Intensität dieser Bewegung erst nach langer Zeit verschwindend klein werden. Diese Bewegnng ist diejenige, welche den beobachteten Oscillationen entspricht.

Die durch den Ausdruck (25) für negative Werthe von p charakterisirte Bewegung ist immer vorhanden, sie bildet aber nur einen Theil des ganzen Vorganges der Entladung. Es ist ihr noch eine zweite Bewegung superponirt, welche dem anderen Wurzelpaare der Gleichung (17) entspricht. Ist dieses Wurzelpaar ebenfalls complex, so ist auch diese zweite Bewegung durch den Ausdruck (25) jedoch für positive Werthe von p bestimmt, welcher in diesem Falle mit wachsender Zeit viel rascher abnimmt, als derselbe Ausdruck für negative Werthe von p.

Sind die beiden anderen Wurzeln reell, so haben die denselben entsprechenden Glieder in der Formel (24) die Eigenschaft, für $t = 0$ mit einem endlichen Werthe zu beginnen und mit wachsender Zeit ununterbrochen abzunehmen. Diese Glieder drücken eine aperiodische, mit wachsender Zeit verschwindende Bewegung aus. Aus der Gleichung (17) erkennt man sofort, dass die reellen Wurzeln der Gleichung zwischen 0 und n liegen. Man kann aber die Gleichung auch transformiren in

$$\left(\alpha^2 - \frac{n\alpha}{2}\right)^2 = \frac{n^2\alpha^2}{4} - m^2.$$

Daraus folgt, dass ein reeller Werth von α an die Bedingung

$$\alpha = \text{oder} > \frac{2m}{n}$$

gebunden ist. Da α kleiner ist als n, so ist die Existenz der reellen Wurzeln ausgeschlossen, wenn n^2 kleiner ist als $2m$. Da m immer durch eine sehr grosse Zahl ausgedrückt ist, so muss auch n sehr gross sein, wenn diese Bedingung erfüllt sein soll. In Folge der Gleichung (26) wird in diesem Falle auch q^2 viel grösser als p^2. Die neben der aperiodischen vorhandene oscillirende Bewegung wird deshalb schon nach sehr kurzer Zeit erlöschen.

Es ist nicht leicht, die Forderung $n^2 > 2m$ experimentell in der Weise zu erfüllen, dass die Bedingungen, unter welchen die hier entwickelte Theorie gilt, gewahrt bleiben. Es müsste eine Flasche von sehr hoher Capacität und zur Schliessung derselben ein Eisendraht von sehr kleinem Durchmesser genommen werden. Für sehr dünne Drähte hört jedoch die Berechtigung, die Gleichung (4) durch die einfachere Gleichung (10) zu ersetzen, auf. Auch könnte durch die Wahl eines Leiters von sehr grossem specifischen Widerstande, z. B. eines Elektrolyten, wenn demselben ein mässiger Querschnitt, etwa 1 *cm* im Quadrat, gegeben wird, der Werth von n in sehr bedeutendem Maasse erhöht werden. Eine solche Wahl ist jedoch nicht zulässig. In einem solchen Leiter vertheilen sich elektrische Bewegungen auch wenn sie so rasch wie die Entladungen einer Leydner Flasche verlaufen, nahezu gleichförmig über den Querschnitt. Bildet ein solcher Leiter die Schliessung, dann ist die Entladung nach der gewöhnlichen Theorie zu berechnen.

Wenn n eine sehr kleine Grösse im Vergleiche zu m ist, so kann man, wenn es sich nur um die Bestimmung der Schwingungsdauer der oscillirenden Bewegung handelt, diese in genügender Annäherung finden, wenn man die Gleichung (17) auf

$$\alpha^4 + m^2 = 0$$

reducirt. Die Formel (24) vereinfacht sich unter dieser Annahme in

$$J = \frac{P_1^0 - P_2^0}{mL} \sin mt$$

und stellt eine einfache Schwingung mit constanter Amplitude dar.

Die Dauer der Oscillation τ_0 ist bestimmt durch

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{m} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Es folgt dieses Resultat auch unmittelbar aus den Gleichungen (5) und (6), wenn man in denselben das Glied $l\sigma u_1$ unterdrückt, d. h. den Einfluss des Widerstandes auf die Entladung vernachlässigt. Zu derselben Formel führt auch die gewöhnliche Theorie, nur bedeutet nach dieser L nicht den Inductionscoëfficienten für einen Faden in der Oberfläche des Drahtes, sondern den Coëfficienten der Induction des Drahtes auf sich selbst. Der letztere ist von der magnetischen Beschaffenheit des Drahtes abhängig, der erstere nicht. Dieser Umstand bedingt einen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden Theorien. Nach der hier vorgetragenen ist die Oscillationsdauer für einen Eisendraht ebenso gross, wie für einen Kupferdraht von gleichen Dimensionen, während sie nach der früheren Theorie für einen Eisendraht vielmal grösser gefunden wird.

Setzt man n sehr klein voraus und lässt in der Rechnung die Glieder weg, welche n in der zweiten oder einer höheren Potenz enthalten, so erhält man für die Wurzeln mit negativem reellen Theil den Ausdruck

$$p \pm qi = -\sqrt{\frac{m}{2}} + \frac{n}{4} \pm i\sqrt{\frac{m}{2}}.$$

Die Schwingungsdauer ist

$$\tau = -\frac{\pi}{pq} = \frac{2\pi}{m\left(1 - \frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2m}}\right)} = \frac{\tau_0}{1 - \frac{n\sqrt{\tau_0}}{4\sqrt{\pi}}}.$$

Das Gesetz, nach welchem die Amplituden mit der Zeit abnehmen, ist durch die Exponentielle

$$e^{-(q^2-p^2)t} = e^{-\frac{nt}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}}$$

bestimmt.

Nach der Formel (8) ist

$$n = \frac{2l\mu\sqrt{k}}{aL} = \frac{2l}{aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{4\pi}}.$$

Drückt man m durch die Schwingungsdauer τ_0 aus, so wird

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{m}{2}} = \frac{l}{2aL}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}}.$$

Nach der gewöhnlichen Theorie ist die Abnahme der Amplituden mit der Zeit durch die Exponentielle

$$e^{-\frac{wt}{2L}}$$

gegeben, worin w den Widerstand des Entladungsdrahtes bedeutet, also

$$w = \frac{l\sigma}{\pi a^2}$$

ist. Es hat daher auch

$$\frac{l}{a}\sqrt{\frac{\sigma\mu}{\tau_0}} = w'$$

die Bedeutung eines Widerstandes. Es ist dies dieselbe Formel, welche ich in der Abhandlung „Über elektrische Schwingungen in geraden Leitern“ für den Widerstand abgeleitet habe, welchen ein Draht gegen periodische Ströme von sehr kurzer Schwingungsdauer äussert. w' ist viel grösser als w, die Amplituden der Schwingungen nehmen nach der hier vorgetragenen Theorie viel rascher ab, als nach der gewöhnlichen. Insbesondere fordert die Theorie für Eisendrähte eine viel raschere Abnahme der Amplituden als für unmagnetische Drähte.

Zur Theorie einer Gattung windschiefer Flächen

von

Prof. Anton Sucharda in Tábor.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Mai 1890.)

1. Cayley hatte in seiner Abhandlung: On certain skew surfaces otherwise Scrolls (Transactions of the Cambridge Philos. Society Vol, 11. 1871) auf jene geradlinigen Flächen aufmerksam gemacht, welche aus zwei ebenen Leitcurven A, B entstehen, deren Punkte in $(\alpha\text{-}\alpha')$ Correspondenz sind. Sowohl auf synthetischem als auch auf analytischem Wege erhielt Cayley interessante Aufschlüsse über diese Flächen im Allgemeinen. Die Hauptergebnisse seiner Untersuchungen findet man auszugsweise mitgetheilt in Salmon-Fiedler's Analytischer Geometrie des Raumes, II. T., 3. Aufl., S. 320—322.

Die vorliegende bescheidene Arbeit befasst sich mit jener Gattung dieser Flächen, welche der Annahme entsprechen, dass A und B rationale Plancurven ohne Cuspidalpunkte sind, deren Punkte in $(m—n)$ Correspondenz stehen; diese Correspondenz wird in der Weise hervorgebracht, dass man in den Ebenen A, B der Leitcurven A, B zwei projectivische Strahlenbüschel mit den resp. Scheiteln a und b voraussetzt, und die Schnittpunkte je zweier einander entsprechenden Strahlen mit den zugehörigen Leitcurven als correspondirende Punkte auffasst. Die geraden Verbindungslinien je zweier solcher Punkte liefern stets eine Mantellinie der zu behandelnden Fläche P.

Es sei hiebei bemerkt, dass die citirte Arbeit des grossen Geometers von meinem bescheidenen Versuche in keiner Weise berührt wird, einerseits wegen seines specielleren Charakters, andererseits wegen der durchwegs synthetischen darin angewandten Methode der Untersuchung.

Es sei die Plancurve A von der Ordnung m, die Plancurve B von der Ordnung n; als rationale Curven ohne Spitzen sind sie von den resp. Classen $2(2m-1)$, $2(n-1)$.

Einem jeden Punkte von A sind n Punkte von B, einem jeden Punkte von B sind n Punkte von A zugeordnet, folglich ist A eine n-fache, B eine m-fache Curve der windschiefen Fläche.

Von der Curve B wird die Ebene A in n Punkten getroffen; durch einen jeden von diesen Punkten gehen m Mantellinien der Fläche hindurch, diese sind sämmtlich in der Ebene A enthalten, so dass der Schnitt dieser Ebene mit der Fläche aus der n fachen Curve A und aus den mn Mantellinien besteht. Er ist folglich von der Ordnung

$$mn+mn = 2mn,$$

und dies ist auch die Ordnung der windschiefen Fläche.

2. Beantworten wir nun die Frage nach den singulären Geraden dieser Fläche.

Eine beliebige singuläre Gerade P trifft die Curven A und B in den resp. Punkten p, q; die ihnen zugehörigen Tangenten Tp, Tq von A und B treffen einander in der Geraden U, in der sich die Ebenen A und B schneiden. Es ist demzufolge zunächst unsere Aufgabe, die Anzahl der Fälle aufzufinden, in denen sich die beiden, einander entsprechenden Tangenten in der Geraden U begegnen.

Fassen wir zu dem Behufe U als Träger zweier Punktreihen auf, von denen die erste durch die Schnittpunkte der Tangenten von B, die andere durch diejenigen von A dargestellt wird. Durch einen beliebigen Punkt von U, als der ersten Reihe angehörig, gehen, da B von der $2(n-1)$ten Classe ist, $2(n-1)$ Tangenten dieser Curve hindurch. Zu jedem der $2(n-1)$ Berührungspunkte gehört je ein Strahl des Büschels b. Diesen $2(n-1)$ Strahlen sind ebensoviele Strahlen des Büschels a zugeordnet. Jeder von denselben trifft A in m Punkten, und entsprechen ihm folglich m Tangenten von A. Die $2(n-1)m$ Tangenten von A treffen U in ebensovielen Punkten, folglich entsprechen je einem Punkte von U, als einem Punkte der ersten Reihe, $2(n-1)m$ Punkte von U, als Punkte der zweiten Reihe. Ferner: Durch einen beliebigen Punkt von U als der zweiten Reihen angehörig, gehen, da A von

der $2(m-1)$ Classe ist, ebensoviele Tangenten dieser Curve. Jedem der $2(m-1)$ Berührungspunkte entspricht ein Strahl des Büschels a und diesem ein Strahl des Büschels b, folglich $2(m-1)$ Secanten der Curve B; jede von ihnen trifft B in n Punkten, und da jedem von ihnen eine Tangente zugehört, so erhalten wir in U $2(m-1)n$ Punkte der ersten Reihe als einem Punkte der zweiten Reihe angehörig.

Es entsprechen hiernach
einem Punkte der ersten Reihe $2m(n-1)$ Punkte der zweiten,
einem Punkte der zweiten Reihe $2(m-1)n$ Punkte der ersten,
und sind folglich die Punkte der beiden conlocalen Reihen in einer $(2m(n-1) - 2(m-1)n)$ Correspondenz. Die

$$2m(n-1) + 2(m-1)n = 2[2mn-m-n]$$

Doppelpunkte[1] dieser Reihen sind die gesuchten. Sie geben, dem vorangehenden zufolge, ebensoviele singuläre Erzeugende (Torsallinien) der Fläche ab. Doch ist hiedurch die Anzahl derselben nicht erschöpft. Um dies einzusehen, beachten wir, dass von dem Punkte a an die Curve A sich $2(m-1)$ Tangenten ziehen lassen. Jede von diesen Tangenten hat mit A im Berührungspunkte zwei unendlich nahe benachbarte Punkte gemein.

Einer solchen Tangente entspricht eine einzige Secante von B, welche B in n Punkten trifft; die Verbindungsgeraden derselben mit dem Berührungspunkte liefern n in der Ebene B enthaltene Mantellinien der Fläche. Doch ist leicht einzusehen, dass auch die Verbindungsgeraden des dem Berührungspunkte unendlich nahe benachbarten Punktes mit den n Punkten von B der Fläche als Mantellinien angehören und wir erhalten somit für jeden Berührungspunkt je n Mantellinien, deren jede von ihrer unendlich nahe benachbarten in einem der n Punkte von B getroffen wird, somit n singuläre Erzeugende der Fläche.

Im Ganzen gelangen wir auf diese Weise in den Besitz von weiteren $2(m-1)n$ singulären Erzeugenden der Fläche.

Um die Frage nach den singulären Erzeugenden vollständig zu erschöpfen, müssen wir nun weiter bedenken, dass auch allen jenen Strahlen des Büschels b, welche zugleich Tangenten von B sind, singuläre Erzeugende entsprechen.

---

[1] Emil Weyr, Beiträge zur Curvenlehre. S. 2.

Von dem Punkte b sind an die Curve B $2(n-1)$ Tangenten möglich. Jeder ihrer $2(n-1)$ Berührungspunkte mit m in A entsprechenden Punkten verbunden, gibt eine Mantellinie, deren unendlich nahe benachbarte sie in A trifft; folglich erhalten wir auf diese Weise weitere $2(n-1)m$ singuläre Erzeugende der Fläche. Dieselbe besitzt ihrer im Ganzen

$$2(2mn-m-n)+2(m-1)n+2m(n-1)=4(2mn-m-n).$$

Dies ist auch die Anzahl der Pinchpoints der Doppelcurve, und zwar sind $2(m-1)n$ derselben in B, $2m(n-1)$ in A und die übrigen $2(2mn-m-n)$ an der Zahl, ausserhalb dieser beiden Curven zu suchen.

3. Beachten wir nun die bekannte, für windschiefe Flächen allgemein giltige Beziehung [1]

$$T+M=2R-M,$$

wo T die Anzahl der singulären Erzeugenden, M den Grad, R den Rang der Fläche bedeutet.

In unserem Falle ist

$$T=4(2mn-m-n),\quad M=2mn$$

und wir erhalten somit für den Rang der Fläche

$$R=\frac{T+2M}{2}=2(3mn-m-n).$$

Fragen wir nun neuerdings nach dem Range unserer windschiefen Fläche, als einer Fläche $2mn$ ten Grades. Der Rang gleicht bekanntlich der Classe ν ihres ebenen Schnittes. Die Classe ist, da die Curve keine Spitzen und δ Doppelpunkte besitzt, gleich

$$\nu=2mn(2mn-1)-2\delta=2(2m^2n^2-mn-\delta),$$

so dass wir unter Berücksichtigung der oben für R aufgestellten Zahl, erhalten

$$2(3mn-m-n)=2(2m^2n^2-mn-\delta),$$

woraus folgt

$$\delta=2m^2n^2-4mn+m+n.$$

---

[1] Peschka, Darstellende und projective Geometrie. IV. Bd. S. 19.

Dies ist die Anzahl der Doppelpunkte des ebenen Schnittes und somit auch die Ordnung der Doppelcurve der windschiefen Fläche.

Da die Maximalzahl der Doppelpunkte einer ebenen Curve von der $2mn$ ten Ordnung gleich ist dem Ausdrucke

$$\binom{2mn-1}{2} = 2m^2n^2 - 3mn + 1,$$

so ist das Geschlecht der Fläche,

$$D = 2m^2n^2 - 3mn + 1 - 2m^2n^2 + 4mn - m - n = (m-1)(n-1).$$

Nun ist es leicht, alle die Fälle anzuführen, in welchen die behandelte Fläche rational, d. h. vom Geschlechte Null wird. Offenbar kann die letztangeführte Relation nur in zwei Fällen befriedigt werden, nämlich, wenn entweder $m = 1$ oder aber $n = 1$ ist.

Es sind folglich einzig nur jene Flächen der angeführten Gattung, die an Stelle einer der Leitcurven eine Leitgerade haben, vom Geschlechte Null. In dem Falle, wo sowohl A als auch B Leitgeraden sind, erscheint das windschiefe Hyperboloid als Specialfall dieser Flächen.

4. Beantworten wir nun die Frage, wie vielmal es vorkommt, dass eine Tangente der Curve B mit dem ihrem Berührungspunkte zugehörigen Strahle des Büschels a in U zusammentrifft. Fassen wir zu dem Behufe die Gerade U als Träger zweier Punktreihen auf, von denen die erste durch die Schnittpunkte mit den Tangenten von B, die andere von den Schnittpunkten der Strahlen des Büschels a gebildet wird. Von einem beliebigen Punkte der ersten Reihe lassen sich an B, da sie von der $2(n-1)$ten Classe ist, ebensoviele Tangenten ziehen, deren $2(n-1)$ Berührungspunkten ebensoviele Strahlen des Büschels b, und diesen die gleiche Anzahl Strahlen im Büschel a entsprechen; einem beliebigen Punkte der Geraden U, als der zweiten Reihe angehörig, entspricht ein einziger Strahl des Büschels a, diesem ein Strahl des Büschels b. Dieser Strahl trifft B in n Punkten, und die n Tangenten von B in diesen Punkten treffen U in der gleichen Anzahl von n Punkten, die beiden Reihen bilden somit eine $(2(n-1)-n)$ Correspondenz; diese

besitzt bekanntlich $2(n-1)+n = 3n-2$ Doppelpunkte. Dies ist die gesuchte Anzahl. Bei $3n-2$ Punkten der Curve B liegt die zugehörige Tangente derselben mit dem entsprechenden Strahle des Büschels a in einer Ebene. Es liegen folglich die sämmtlichen m diesem Punkte zugehörigen Mantellinien der Fläche mit jener Tangente in einer Ebene. Sonach fallen die m Tangentialebenen dieses Punktes in eine einzige zusammen. Dieser Punkt ist also ein wirklicher m-facher Punkt der Fläche. [1] Weil sich in ihm m Mäntel derselben berühren, gehen durch ihn ausser der m-fachen Curve B noch $\binom{m}{2}$ Äste der Doppelcurve hindurch. Jede zwei der m Flächenmäntel schneiden sich nämlich in zwei durch den Berührungspunkt gehenden Curvenästen, von denen der eine stets mit der Curve B zusammenfällt, so dass der andere einen Ast der Doppelcurve bildet. Die Anzahl dieser, den Berührungspunkt enthaltenden Äste beträgt offenbar $\binom{m}{2}$.

Auch sieht man, dass die $3n-2$ m-fachen Tangentialebenen sämmtlich durch den Punkt a hindurchgehen. Durch ähnliche Untersuchungen gelangen wir zu analogen singulären Punkten von A. Die Correspondenz ist hier $[2(m-1)-m]$, die Anzahl also $3m-2$, d. h., die Curve A besitzt $3m-2$ wirkliche n-fache Punkte; in jedem derselben fallen die zugehörigen n Tangentialebenen zusammen. Durch jeden derselben gehen ausser der n-fachen Curve A noch $n-1$ Äste der Doppelcurve hindurch. Die sämmtlichen $3m-2$ n-fachen Tangentialebenen gehen alle durch den Punkt b hindurch.

5. Untersuchen wir nun die Fläche, welche von den sämmtlichen m-Tangentialebenen umhüllt wird, deren jede einem Punkte der Curve B entspricht, also die m-fach osculirende Developpable Q. Da alle diese Ebenen den Punkt a enthalten, bilden sie eine Kegelfläche mit dem Scheitel a, und es

---

[1] Wir nennen sie so analog den Salmon-Fiedler'schen „wirklichen Doppelpunkten"; vergl. Salmon-Fiedler: Anal. Geom. d. R. II. T., 3. Aufl. S. 668. Zeuthen nennt sie „points p-tuples à un seul plan tangent (p-tuple)"; vergl. Zeuthen: Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques, Mathem. Annalen, Bd. X, S. 451.

genügt offenbar, die Schnittcurve B derselben mit der Ebene B von B zu untersuchen. Die Curve B trifft die Gerade U in n Punkten; zu einem jeden von diesen gehört eine m-Tangentialebene, welche demnach mit der Ebene A von A zusammenfällt. Folglich ist U eine n-fache Tangente der gesuchten Curve R. Ein beliebiger Strahl des Büschels a trifft U in einem Punkte u. Der entsprechende Strahl des Büschels b trifft B in n Punkten. Durch einen jeden derselben geht die Trace der zugehörigen m-Tangentialebene in B, und alle diese Tracen müssen den Punkt u enthalten; folglich bilden sie n weitere Tangenten der Curve R. Dieselbe ist demnach von der Classe

$$\nu = 2n.$$

Ihre Ordnung ermitteln wir, wie folgt:

Die Gerade U, als n-fache Tangente der Curve, trifft dieselbe in $2n$ Punkten. Unter den Strahlen des Büschels b gibt es offenbar $2(n-1)$ Tangenten der Curve B. Jeder von den $2(n-1)$ Berührungspunkten liefert zwei unendlich nahe benachbarte Schnittpunkte, die ihnen zugehörigen Tracen sind zwei unendlich benachbarte Tangenten von R, und da sie sich in U schneiden, bilden sie dort einen Punkt von B. Folglich sind im Ganzen $2n+2(n-1) = 2(2n-1)$ Punkte der Curve in U enthalten, und die Curve somit von der Ordnung

$$\mu = 2(2n-1).$$

Da offenbar einem jeden Punkte von B stets nur eine einzige Tangente von R zugehört, muss diese Curve mit B von gleichem Geschlecht sein,[1] folglich das Geschlecht

$$\mathrm{p} = 0$$

haben. Diese drei Charaktere sind aber zur völligen Bestimmung der Curve hinreichend.

Aus den Plücker'schen Gleichungen folgt für die Curve:

$$\delta = 4(n-1)(2n-3); \qquad \varkappa = 6(n-1)$$

$$\tau = (n-1)(2n-1); \qquad \iota = 0;$$

zu bemerken ist, dass sie in U eine n-fache Tangente besitzt.

[1] Fiedler, Darstellende Geometrie, 2. Aufl., S. 426.

Hiemit ist für die Bestimmung der gesuchten Kegelfläche Q das Nöthige gegeben.

6. In der Folge wollen wir die Developpable D untersuchen, welche der behandelten windschiefen Fläche längs der Leitcurve B umschrieben ist.

Stellen wir uns zunächst die Aufgabe, ihre Trace P in der Ebene der Leitcurve A zu ermitteln.

Ist $G_{mm'}$ eine beliebige Mantellinie der windschiefen Fläche, wobei m ihren Schnittpunkt mit A, m' denjenigen mit B bezeichnet, so ist offenbar die zugehörige Tangentialebene, eine von denen, die die gesuchte Developpable umhüllen, durch $G_{mm'}$ und durch die Tangente Tm'_B bestimmt. Mithin geht ihre Trace in A durch den Punkt m und durch den Schnittpunkt r von Tm' mit U hindurch. Alle diese Tracen umhüllen die gesuchte Curve P. Da einem jeden Punkte m'_B m Punkte m_A entsprechen, gehen durch den Punkt r m solche Tangenten von P hindurch. Doch lassen sich durch r an B, da sie eine Curve der $2(n-1)$ Classe ist, $2(n-1)$ Tangenten ziehen, folglich entspricht der Punkt r $2(n-1)$ Punkten m'_B und demnach gehen durch ihn $2m(n-1)$ Tangenten von P hindurch. Ferner wird A von U in m Punkten getroffen; die jedem von ihnen zugehörigen n Tracen fallen, da die entsprechenden Punkte r stets in U selbst liegen, mit U zusammen, so dass U eine mn-fache Tangente von P darstellt. Wir finden demnach die Classe ν der Curve P:

$$\nu = 2m(n-1)+mn = m(3n-2).$$

Die Ordnung ermitteln wir wie folgt: Die Gerade U trifft B in n Punkten. Einen jeden von ihnen können wir als einen der Punkte r auffassen, durch welchen zwei zusammenfallende Tangenten der Curve B hindurchgehen. Da die zugehörigen Berührungspunkte m' unendlich nahe benachbarte Punkte sind, so entsprechen ihnen in A zwei unendlich nahe benachbarte Strahlen des Büschels a, so dass folglich die $2m$ durch den Punkt r gehenden Tangenten von A in m Paare von unendlich nahe benachbarten Tangenten sich gruppiren. Für jedes Paar liegt der Schnittpunkt in r_B und liefert einen Punkt der Curve P; dieser ist also ein m-facher Punkt von P. Wir erhalten auf diese Weise in der Geraden U n m-fache Punkte. Unter den Strahlen des

Büschels a befinden sich $2(m-1)$ Tangenten der Curve A, jeder der Berührungspunkte gilt für zwei unendlich nahe benachbarte Schnittpunkte; die ihnen zugehörigen Tangenten von P treffen einander in U und bilden somit einen Punkt von P, und da einem jeden der Berührungspunkte offenbar n solche Punkte in U entsprechen, so weist U deren $2(m-1)n$ auf. Beachten wir ferner, dass die Curve B als Curve von der Ordnung $\mu = n$ und der Classe $\nu = 2(n-1)$, $\iota = 3(n-2)$ Wendepunkte besitzt. Die Tangente von B in einem Wendepunkte fällt mit der Tangente des benachbarten Punktes zusammen, und folglich treffen beide mit U in einem einzigen Punkte r zusammen. Den beiden Berührungspunkten entsprechen aber im Büschel a zwei unendlich nahe benachbarte Strahlen, und wir finden sonach, dass der Punkt r uns m zusammenfallende Punkte von P liefert. Wir erhalten auf diese Weise $3(n-2)$ weitere m-fache Punkte der Curve P. Schliesslich ist U eine mn-fache Tangente von P, und liefert somit $2mn$ Punkte derselben. Wir haben folglich n m-fache, $2(m-1)n+2mn$ einfache, schliesslich $3(n-2)$ m-fache Punkte, im Ganzen also $2(4mn-3m-n)$ Punkte, und ist demzufolge die Curve P von der Ordnung

$$\mu = 2(4mn-3m-n).$$

Sie besitzt in U eine mn-fache Tangente.

Durch den Punkt a gehen $3n-2$ m-fache Tangenten der Curve; es sind das die Tracen der wirklichen $3n-2$ m-Tangentialebenen der Fläche,[1] Tangentialebenen in den wirklichen m-fachen Punkten, deren Existenz in Art. 4 nachgewiesen wurde.

Da $3n-2$ m-fache Tangenten $(3n-2)m$ einfache Tangenten repräsentiren, ist somit die Richtigkeit der Classenzahl ν der Curve neuerlich bestätigt.

7. Versuchen wir es nun, die Anzahl ι der Wendepunkte von P zu ermitteln. Ein Wendepunkt der Curve P entsteht, wenn zwei unendlich nahe benachbarte Tracen zusammenfallen. Soll

---

[1] Analog dem Salmon-Fiedler'schen „wirkliche Doppelebene", siehe Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie d. R., II. T., 3. Aufl., S. 669.

dies geschehen, so müssen dieselben offenbar einen und denselben Punkt r besitzen. Zwei unendlich nahe benachbarte Tracen besitzen einen gemeinschaftlichen Punkt r nur dann, wenn dieser Punkt mit einem der n Punkte zusammenfällt, in denen B von U getroffen wird, oder aber, wenn die ihm zugehörige Tangente von B eine Wendetangente dieser Curve ist. Nur unter dieser, offenbar endlichen, Anzahl Fälle könnte der gewünschte Fall überhaupt gesucht werden, und zwar nur dann, wenn die beiden, unendlich nahe benachbarten Punkte von A, durch welche die benachbarten Tracen hindurch gehen, mit r in eine Gerade fielen; es müsste folglich der Berührungspunkt einer der Tangenten von r an A zugleich der dem Punkte c entsprechende Punkt sein. Offenbar können deshalb nur in besonderen Ausnahmsfällen Wendepunkte vorkommen, und es gilt folglich in der Regel

$$\iota = 0.$$

Aus den erhaltenen Zahlen folgt nun den Plücker'schen Gleichungen gemäss für die Curve P

$$\delta = 2[m^2(4n-3)^2-8mn(n+1)+n(n+5)+11m],$$

$$\tau = \frac{1}{2}[m^2(3n-2)^2-m(11n-8)+2n]$$

$$\varkappa = 3(5mn-4m-2n),$$

und schliesslich für das Geschlecht derselben:

$$D = (m-1)(n-1).$$[1]

Da die Ebene A zu den die gesuchte Developpable umhüllenden Ebenen nicht zählt, denn dann müsste sie mit der Tangentialebene eines der Punkte, in denen B von U getroffen wird, zusammenfallen, so sind wir zu der Annahme berechtigt, dass P einen allgemeinen ebenen Schnitt der Developpablen darstellt.

---

[1] Eine mn-fache und $3(n-2)$ m-fache Tangenten vertreten $\binom{mn}{2}+3(n-2)\binom{m}{2}$ Bitangenten; ziehen wir diese Zahl von τ ab, so erhalten wir die Anzahl $\frac{1}{2}[m^2(8n^2-15n+10)-7mn+2(m+n)]$ der eigentlichen Bitangenten der Curve P.

Der Cremona'schen Bezeichnungsweise gemäss[1] erhalten wir nun für die Charaktere der Fläche, die folgenden Zahlen:

$$\rho = 2(4mn - 3m - n),$$

$$\mu = m(3n - 2),$$

$$\xi = 2[m^2(4n-3)^2 - 8mn(n+1) + n(n+5) + 11m],$$

$$\gamma = \frac{1}{2}[m^2(3n-2)^2 - m(11n-8) + 2n],$$

$$\alpha = 0.$$

8. Untersuchen wir nun die Anzahl θ der stationären Geraden der behandelten developpablen Fläche.

Sollte durch einen der $\varkappa$ stationären Punkte von P, z. B. durch den Punkt s eine stationäre Gerade S der Developpablen hindurchgehen, so müsste dieselbe offenbar die drei unmittelbar aufeinander folgenden, folglich unendlich nahe benachbarten, Erzeugenden $G\,{}^1G\,{}^2G$ der windschiefen Fläche treffen, deren Schnittpunkten $g\,{}^1g\,{}^2g$ mit der Leitcurve A der stationäre Punkt s entspricht; denn nur dann können die Ebenen (Gs) $({}^1Gs)$ $({}^2Gs)$ die Gerade S als gemeinschaftliche Schnittgerade enthalten. Dann müsste aber der Punkt s von P in der die Punkte $g\,{}^1g\,{}^2g$ enthaltenden Trace des durch $G\,{}^1G\,{}^2G$ bestimmten Osculationshyperboloides der windschiefen Fläche enthalten sein, was offenbar in der Regel nicht stattfindet. Wir sind folglich berechtigt, im Allgemeinen $\theta = 0$ zu setzen. (In der Folge wollen wir zeigen, in welchem Falle bei unserer Developpablen stationäre Gerade vorkommen.)

Wir erhalten nun nach den Cayley'schen Gleichungen[2] weiter:

$$\nu = 3(5mn - 4m - 2n)$$

$$\varkappa = \frac{1}{2}[9(5mn - 4m - 2n)^2 - 95mn + 78m + 44n]$$

$$\eta = 2(4mn - 3m - n)(4mn - 3m - n - 2)$$

$$\beta = 4(6mn - 5m - 3n).$$

---

[1] Cremona-Curtze, Grundzüge einer allgem. Theorie der Oberflächen, S. 9.

[2] Ibid. S. 11.

Da die Rückkehrcurve der Developpablen von der ν-ten Ordnung ist, so beträgt die Maximalzahl der Doppelpunkte ihrer Projection $\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$; in Wirklichkeit besitzt ihrer die Projection der Curve blos $\gamma+\beta$. Demzufolge ist die Rückkehrcurve vom Geschlechte

$$D = \frac{(\nu-1 (\nu-2)}{2} - (\gamma+\beta);$$

durch Substitution der obigen Werthe in diese Gleichung erhalten wir

$$D = (m-1)(n-1)$$

für das Geschlecht der Curve. Wir ersehen hieraus, dass das Geschlecht der Rückkehrcurve mit dem Geschlechte des ebenen Schnittes P der Developpabeln übereinstimmt.

9. Es sei nun gestattet, einen Fall anzuführen, welcher das Auftreten von stationären Geraden bei der behandelten Developpablen zur Folge hat. Zu dem Zwecke bemerken wir Folgendes:

Die Leitcurve A der windschiefen Fläche, welche dieser Arbeit zu Grunde liegt, wird von der Geraden U in m Punkten getroffen. Einer von ihnen heisse o, der ihm unendlich nahe benachbarte ${}^1o$, und der darauffolgende ${}^2o$; die entsprechenden, einem und demselben Mantel der Fläche angehörigen, offenbar auch unendlich nahe benachbarten, Mantellinien, resp. O ${}^1O$ ${}^2O$. Nehmen wir nun an, dass die Gerade To^1o, mit anderen Worten die Tangente der Curve A in dem Punkte ${}^1o$ durch den Punkt a hindurchgehe. Dann müssen die den Punkten ${}^1o$ ${}^2o$ zugehörigen beiden Tangenten von P offenbar in einem einzigen Punkte s der Geraden U, welche die durch den Punkt o gehende Tangente von P darstellt, zusammentreffen; dieser Punkt ist somit ein stationärer Punkt der Curve P, da durch ihn drei unendlich nahe benachbarte Tangenten dieser Curve hindurchgehen. Die mittlere von ihnen ist seine zugehörige Rückkehrtangente. Wir erhalten ihn direct als Schnittpunkt der an die Curve B in dem, dem Punkte ${}^1o$ entsprechenden Punkte ${}^1o_B$ gezogenen Tangente mit der Geraden U. Nun ist aber die Mantellinie ${}^1O$ eine singuläre Gerade der windschiefen Fläche, da sie von der unendlich nahe benachbarten ${}^2O$ in dem Punkte ${}^1o_B$ getroffen wird. Die zu ${}^1O$

gehörige singuläre Tangentialebene der windschiefen Fläche geht offenbar durch den Punkt a. Jede beliebige, diesen Punkt a enthaltende Ebene schneidet die windschiefe Fläche in einer Curve, deren ein Punkt in O, sein unendlich nahe benachbarter in ${}^1O$ liegt; die Tangente dieses letzteren geht durch a hindurch. Beachten wir überdies, dass durch den in $\overline{O}$ liegenden Punkt die Gerade U' hindurchgeht, in welcher die Schnittebene von der Ebene der Leitcurve B getroffen wird, so ersehen wir hieraus, dass die Umstände, welche in der Ebene von A den stationären Punkt s zur Folge hatten, auch in der neuen Schnittebene obwalten, und dass folglich einem jeden in ${}^1O$ liegenden Punkte der windschiefen Fläche in der zugehörigen, durch a gehenden, Schnittebene ein stationärer Punkt ihrer Schnittcurve mit der Developpablen zukommt. Wir erhalten ihn stets direct als Schnittpunkt der einzigen Tangente T^1o_B von B in ${}^1o_B$, mit der Geraden U'. Hieraus folgt aber: Die Tangente T^1o_B, als geometrischer Ort aller dieser stationären Punkte, ist eine stationäre Gerade der Developpablen.

Bislang haben wir einfachheitshalber dem Punkte ${}^1o$ von A nur den einzigen Punkt ${}^1o_B$ von B zugeordnet gedacht; bekanntlich gibt es aber n solche Punkte, somit für einen jeden Punkt ${}^1o$ der oben geschilderten Eigenschaft n stationäre Punkte s, und folglich auch n stationäre Geraden.

Wir dürfen schliesslich, unbeschadet der Resultate, die unendlich kleine Strecke $\overline{o^1o}$ vernachlässigen und sagen: So oftmals die Tangente der Curve A in einem ihrer m Schnittpunkte mit U durch a hindurchgeht, erhält die Curve P n in U enthaltene stationäre Punkte s, mit U als deren gemeinschaftlicher Tangente. Die n entsprechenden stationären Geraden der Developpablen sind Tangenten der Leitcurve B, und zwar in jenen n Punkten, in welchen diese Curve von dem, der Tangente T_{o^1o} des Büschels a in dem Büschel b entsprechenden Strahle getroffen wird.

Die eben geschilderten Umstände, welche das Auftreten von stationären Geraden in der Ebene der Leitcurve B zur Folge haben, werden stets eintreten, wenn die Curve A centrisch ist, mit a als Centrum und wenn ferner die Ebenen der Leitcurven A und B parallel sind, folglich U eine unendlich entfernte Gerade vorstellt. Dann gehen nämlich die sämmtlichen m Tangenten der

m unendlich entfernten Punkte der Curve, vorausgesetzt, dass sie einfache Punkte sind, durch ihr Centrum a hindurch;[1] die Curve P besitzt also mn stationäre Punkte im Unendlichen, mit der unendlich entfernten Geraden als der gemeinschaftlichen Tangente; die Developpable besitzt $m\,n$ unendlich entfernte stationäre Gerade; dieselben bilden m Gruppen von je n Tangenten der Curve B; die Berührungspunkte der Tangenten jeder Gruppe liegen in einem Strahle des Büschels b. Diese Berührungspunkte sind Pinchpunkte.

10. In dem Vorangehenden haben wir gesehen, dass einer jeden in der Ebene der Leitcurve B enthaltenen singulären Geraden der windschiefen Fläche eine stationäre Gerade der Developpablen entspricht.

Es ist vielleicht nicht überflüssig zu untersuchen, in welchem Falle einer sonstigen singulären Geraden der windschiefen Fläche eine stationäre der Developpablen entspricht. (Wir meinen hier nur solche singulären Geraden, deren jede von der benachbarten Mantellinie der windschiefen Fläche in einem Punkte der Curve B getroffen wird.) Unter Beibehaltung der Bezeichnungsweise des Art. 8 nehmen wir an, dass sich die Mantellinien $G\,{}^1G$ in dem Punkte m_B schneiden, folglich eine stationäre Gerade bilden, und dass die durch $m\;{}^1m\;{}^2m$ gehenden Tangenten von P in dem Punkte s, einem stationären Punkte dieser Curven, zusammentreffen. Soll es in diesem Falle eine stationäre Gerade S geben, so muss diese durch die Punkte $s\;m_B$ hindurchgehen. Die Gerade ${}^2G$ muss mit S einen Punkt, mit B den zu m_B unendlich nahe benachbarten ${}^1m_B$ gemeinschaftlich haben. Es wird demnach die Gerade $Tm_B\;{}^1m_B$, mit anderen Worten die Tangente an B in dem Punkte m_B in der Ebene $(S\,{}^2G)$ liegen, und folglich von der Geraden $T_{s_{ms}}$, d. h. von einer der drei, den Punkt s bedingenden Tangenten der Curve P geschnitten werden. Wir dürfen also, indem wir an Stelle von $T_{s_{ms}}$ die unendlich nahe benachbarte Rückkehrtangente setzen, behaupten: Soll der singulären Geraden G_{mm_B}, der ein stationärer Punkt s von P entspricht, auch eine stationäre Gerade der Developpablen zukommen, so muss

[1] Steiner, Über solche algebraische Curven, welche einen Mittelpunkt haben. Crelle's Journ. Bd. 47.

die Rückkehrtangente des Punktes s von der Tangente des Punktes m_B der Curve B geschnitten werden. Da in unserem Falle A und B Plancurven sind, muss der gemeinschaftliche Schnittpunkt offenbar in U liegen. Es ist leicht einzusehen, dass die hier geschilderten Umstände mit denen, welche das Auftreten von stationären Geraden in der Ebene der Curve B zur Folge hatten, völlig übereinstimmen.

Es ist selbstverständlich, dass wir durch Vertauschung der Buchstaben m und n in den Formeln der Art. 6—8 und durch die, den vorangegangenen ganz analogen Erwägungen zu der Developpablen, welche unserer windschiefen Fläche längs der Curve A umschrieben ist, gelangen können.

11. In Art. 3 wurde gezeigt, dass die betrachtete windschiefe Fläche P eine Doppelcurve von der Ordnung

$$2m^2n^2 - 4mn + m + n$$

besitze. Dieselbe besteht allerdings nicht aus lauter Doppelpunkten der Fläche, sondern besitzt auch Theile von einer Vielfachheit höherer Ordnung.

Wir wollen nun, um uns bezüglich des etwaigen Zerfallens derselben näher zu unterrichten, ihr Verhalten zu den Ebenen A und B der Leitcurven untersuchen. Wenden wir uns zuerst der Ebene B zu. In dieser Ebene, welche zugleich die n-fache Curve B der Fläche enthält, hat die Fläche bekanntlich mn Mantellinien. Sie treffen einander in $\binom{mn}{2}$ Punkten, durch welche offenbar die Doppelcurve hindurchgeht. Jede von den mn Geraden schneidet B in n Punkten, von denen jedoch stets einer abzuziehen ist, derjenige nämlich, durch welchen, als einen Punkt der Leitcurve B, diese Mantellinie der Fläche hindurchgeht. Es bleiben somit $mn(n-1)$ derartige Schnittpunkte. Fassen wir einen beliebigen von diesen Punkten, z. B. den Punkt p näher ins Auge. Er liegt in seiner Geraden G und in der Curve B. Der dieser Geraden zugehörige Flächenmantel schneidet in diesem Punkte die sämmtlichen m, die vielfache Curve B bildenden Flächenmäntel, und es entstehen somit m durch p gehende Äste der Doppelcurve, oder, mit anderen Worten,

ein jeder der $mn(n-1)$ Punkte der Curve B ist ein m-facher Punkt der Doppelcurve, welche übrig bleibt, wenn wir von der ursprünglich angeführten vollständigen Doppelcurve die m-fache Curve B und die n-fache Curve A abziehen. (Sonst wäre der Punkt als $(m+1)$-facher der vielfachen Curve aufzufassen.) Es wird folglich die Ebene B von der Doppelcurve in weiteren $m^2n(n-1)$ Punkten getroffen. In Art. 6 haben wir gezeigt, dass in $3n-2$ Fällen eine Tangente von B mit dem zugehörigen Strahle des Büschels a sich schneidet, so dass in diesem Falle die durch den Berührungspunkt r der Tangente gehenden m Mantellinien der Fläche eine gemeinschaftliche Tangentialebene in diesem Punkte, das ist eine wirkliche m-fache Tangentialebene besitzen. Die sämmtlichen m Flächenmäntel gehen durch B hindurch, indem sie einander gleichzeitig in dem Punkte r berühren. Es entstehen auf diese Weise $\binom{m}{2}$ durch den Punkt r gehende Äste der Schnittcurve je zweier von diesen m Mänteln, somit $\binom{m}{2}$ Äste der Doppelcurve; jeder von diesen Punkten r ist demnach ein $\binom{m}{2}$-facher Punkt derselben, (falls man hiebei von der Curve B absieht.)

Auf diese Weise gelangen wir in den Besitz von weiteren $(3n-2)\binom{m}{2}$ Punkten der Doppelcurve.

12. Die Curve B besitzt als rationale $\binom{n-1}{2}$ Doppelpunkte d. Durch einen jeden dieser Punkte gehen zwei ihrer Curvenzüge, und da durch jeden ihren einfachen Punkt m Flächenmäntel hindurchgehen, so treffen sich in jedem Doppelpunkte m Mäntel des einen Curvenzuges mit m Mänteln des anderen. Es ist klar, dass je ein Mantel des einen Zuges die m Mäntel des anderen in m Ästen der Doppelcurve schneidet, so dass im Ganzen durch jeden der genannten Doppelpunkte $m\,m = m^2$ Äste der Doppelcurve hindurchgehen.

Auf diese Weise gelangen wir zu weiteren $\binom{n-1}{2}m^2$ Punkten der Doppelcurve. Es ist von Interesse, zu berücksichtigen,

dass es unter den m^2 durch einen Doppelpunkt gehenden Ästen der Doppelcurve m gerade Linien gibt. Sie gehen durch m Schnittpunkte jenes Strahles des Büschels a mit A hindurch, der dem Strahle S_{bd} projectiv entspricht. Es geht hieraus nebenbei hervor, dass sich von der eigentlichen Doppelcurve $\binom{n-1}{2}$ mal m, je durch einen Doppelpunkt von B gehende, Doppelgerade ausscheiden.

Einem jeden von den $\binom{m-1}{2}$ Strahlen des Büschels a, der durch einen der Doppelpunkte der Curve A hindurchgeht, gehört ein Strahl des Büschels b zu, der B in n Punkten schneidet; die ihm zugehörige Mantellinie ist doppelt, so dass die Curve B noch von $\binom{m-1}{2}$ n Doppelgeraden getroffen wird.

Zählen wir schliesslich noch die Curve B selbst zu, die, da sie von der n-ten Ordnung und m-fach ist, $\binom{m}{2}n$ Äste der Doppelcurve vertritt, so erhalten wir im Ganzen

$$\binom{mn}{2} + 2m^2\binom{n}{2} + (3n-2)\binom{m}{2} + m^2\binom{n-1}{2} + \binom{m-1}{2} n + n\binom{m}{2} = 2m^2n^2 - 4mn + m + n,$$

somit die ursprünglich angeführte Ordnung derselben, w. z. b. w.

Durch Vertauschung von m mit n und umgekehrt, gelangen wir zu vollkommen analogen Resultaten über das Verhalten der Doppelcurve zu der Ebene A der Leitcurve A.

Laut den vorangeführten Untersuchungen setzt sich die Doppelcurve der windschiefen Fläche aus den folgenden Theilen zusammen:

1. aus der n-fachen Curve A von der Ordnung m,
2. aus der m-fachen Curve B von der Ordnung n,
3. aus $\binom{n-1}{2}$ mal m Geraden eines ebenen Strahlenbüschels (mit dem Scheitel in einem Doppelpunkte von B),
4. aus $\binom{m-1}{2}$-mal n Geraden eines ebenen Strahlenbüschels (mit dem Scheitel je in einem Doppelpunkte von A),

5. aus einer im Allgemeinen irreduciblen Doppelcurve K von der Ordnung $mn[2mn-m-n]$.

13. Zum Schlusse wollen wir einige Bemerkungen beifügen über diejenigen von den untersuchten Flächen, welche rational d. h. vom Geschlechte Null sind. In Art. 3 wurde gezeigt, dass für dieselben stets eine der Leitcurven eine Gerade sein müsse.

Der Fall, wo es beide gleichzeitig sind, braucht nicht weiter berücksichtigt zu werden, da ihn das windschiefe Hyperboloid erschöpft.

Nehmen wir an, dass A eine Leitgerade, B eine rationale Plancurve der n-ten Ordnung und ohne Spitzen bedeutet. Dann ist B eine einfache Curve der so bestimmten windschiefen Fläche, dagegen A eine n-fache Gerade derselben. Die Fläche ist von der $2n$-ten Ordnung, die Doppelcurve von der Ordnung $(n-1)(2n-1)$.

In der Ebene A besitzt die Fläche ausser der n-fachen Geraden A noch n einfache Gerade, in der Ebene B ausser der einfachen Curve B des n-ten Grades, ebenfalls n Gerade, doch bilden diese ein Büschel. Die Doppelcurve besteht

1. aus der n-fachen Geraden A,

2. aus $\binom{n-1}{2}$ Doppelgeraden (jede von ihnen geht durch einen der $\binom{n-1}{2}$ Doppelpunkte der Leitcurve B),

3. aus einer irreduciblen Doppelcurve K von der Ordnung

$$(n-1)(2n-1)-\binom{n}{2}-\binom{n-1}{2}=n(n-1).$$

Über das Verhalten dieser Doppelcurve zur Ebene A (dieselbe ist durch den Punkt a und die Gerade A bestimmt) wäre Folgendes zu bemerken: Die n Geraden dieser Ebene treffen einander in $\binom{n}{2}$ Punkten; diese Punkte hat die Doppelcurve mit der Ebene gemein. Ferner gibt es in der Ebene B einen Strahl des Büschels b, der die Gerade A schneidet. Seinen n Schnittpunkten mit B entspricht in A ein Punkt, er heisse p. Die durch ihn gehenden n Mantellinien der Fläche liegen mit A in einer Ebene und bilden so eine wirkliche n-fache Tangentialebene der

Fläche. Der Punkt p ist ein wirklicher n-facher Punkt der Fläche. Selbstverständlich gehört dieser Punkt der Ebene A ebenfalls der irreduciblen Doppelcurve D an. Von ihr wird die Ebene A in diesem Punkte in $\binom{n}{2}$ Punkten getroffen, so dass die Doppelcurve diese Ebene A im Ganzen in $\binom{n}{2}+\binom{n}{2}=n(n-1)$ Punkten trifft, wie vorauszusehen war.

In der Ebene B besitzt die Fläche n Mantellinien und die einfache Curve B n-ter Ordnung.

Die n Geraden bilden ein Strahlenbüschel, welches den Schnittpunkt o von A mit der Ebene B zum Scheitel hat. Diese Geraden durchstossen B in n^2 Punkten, von denen ihrer n abzuziehen sind, als zur Doppelcurve nicht angehörig. Es sind dies die in jenem Strahle des Büschels b enthaltenen Punkte, welcher dem Strahle S_{a_0} der Ebene A projectiv entspricht. So bleiben blos $n^2-n=n(n-1)$ Punkte übrig, die zu der Doppelcurve gehören. Zu ihnen treten weiter die $\binom{n}{2}$ gegenseitigen Schnittpunkte dieser Geraden hiezu. Schliesslich besitzt die Curve B, als rationale, $\binom{n-1}{2}$ eigene Doppelpunkte.

Die angeführten drei Zahlen setzen die Ordnungszahl $(n-1)(2n-1)$ der ganzen Doppelcurve zusammen, deren Zerfallen bereits oben besprochen wurde.

14. Jede durch A gehende Ebene hat mit der Fläche n Mantellinien gemein, ist folglich eine n-Tangentialebene derselben, denn sie trifft B in einer durch o gehenden Geraden P und B in diversen Punkten, deren jedem eine einzige Mantellinie der Fläche zukommt, welche offenbar die Gerade A schneiden muss. Stellen wir uns nun die Frage, ob von den erwähnten n Geraden nicht etwa einige sich in einem ausserhalb A liegenden Punkte schneiden. Den n Punkten der Geraden P entsprechen n Strahlen des Büschels b, und diesen wieder n ihnen projectiv zugeordnete Strahlen des Büschels a. Wenn nur drei von den Verbindungslinien je zweier einander entsprechenden Punkte der projectiven Reihen A und B einen gemeinschaftlichen Punkt haben sollten, so müssten die beiden in A und B enthaltenen Reihen perspecti-

visch sein. Dann müssten die sämmtlichen n Verbindungslinien (Mantellinien der Fläche) durch diesen Punkt hindurchgehen. Dem Punkte o der einen Reihe müsste dann derselbe als der anderen angehörig entsprechen, folglich dem Strahle S_{ao} der Strahl S_{bo}, was offenbar nicht Platz hat. Es folgt hieraus, dass in den Ebenen des Büschels A, ausserhalb der Achse desselben keine dreifachen Punkte, um so weniger also Punkte von einer höheren Vielfachheit vorkommen können.

In der Geraden A gibt es bekanntlich einen wirklichen n-fachen Punkt. Dieser entspricht jenem Falle, wo P durch den Punkt b hindurchgeht, denn dann entspricht dieser Geraden P ein einziger projectiver Strahl des Büschels a. Dieser trifft A in einem einzigen Punkte und durch diesen gehen die sämmtlichen n Mantellinien der Fläche hindurch. Eine Ausnahme von dem allgemeinen, eben besprochenen, Falle kommt dann vor, wenn die Gerade P durch einen Doppelpunkt d der Curve B hindurchgeht. In diesem Falle müssen (vergl. Art. 12) zwei von den n Mantellinien der Fläche zusammenfallen, und bilden eine Doppelgerade derselben, welche von den $n-2$ übrigen in $(n-2)$ Punkten getroffen wird. So entstehen offenbar $n-2$ dreifache Punkte der windschiefen Fläche, und wir erhalten deren, da die Curve B $\binom{n-1}{2}$ Doppelpunkte besitzt, in $\binom{n-1}{2}$ Ebenen des Büschels A zu je $n-2$, folglich im Ganzen $\binom{n-1}{2}(n-2)$. Das sind lauter dreifache Punkte der Fläche und ihrer Doppelcurve. Das Zustandekommen dieser Punkte in derselben ist nicht anders zu erklären, als dass die irreducible Doppelcurve D diese Punkte zu Doppelpunkten hat; ein jeder von ihnen bildet mit der zugehörigen Doppelgeraden einen dreifachen Punkt der ganzen Doppelcurve. In jeder Doppelgeraden besitzt die irreducible Doppelcurve K je $(n-2)$ nicht in A liegende Doppelpunkte.

Noch sei bemerkt, dass unter den Ebenen des Büschels A deren $2(n-1)$ solche vorkommen, bei welchen die Gerade P Tangente der Curve B ist. Es entstehen hier bekanntlich (vergl. Art. 2) $2(n-1)$ singuläre Gerade der Fläche. Jede von ihnen

wird von den übrigen n—2 Geraden dieser Ebene getroffen, und somit entstehen in einer jeden von diesen singulären Geraden n—2 Paare unendlich nahe benachbarter Doppelpunkte der Doppelcurve. Hieraus entnehmen wir: Von einer jeden singulären Geraden dieser Art wird die irreducible Doppelcurve D der Fläche in n—2 Punkten berührt. Bei den übrigen singulären Geraden der Fläche kommt dergleichen nicht vor, weil sie mit den zugehörigen n—2 Geraden ihrer Ebene in einem Punkte der Geraden A, in dem zugehörigen Pinchpunkte, zusammentreffen.

XV. SITZUNG VOM 19. JUNI 1890.

Der Vorsitzende theilt mit, dass der Herr Secretär der Classe, Prof. Suess, als Mitglied der in Budapest tagenden Delegation verhindert ist in der heutigen Sitzung zu erscheinen.

Das Curatorium der Schwestern Fröhlich-Stiftung in Wien übermittelt die diesjährige Kundmachung über die Verleihung von Stipendien und Pensionen aus dieser Stiftung zur Unterstützung bedürftiger und hervorragender Talente auf dem Gebiete der Kunst, Literatur und Wissenschaft.

Das c. M. Herr Prof. R. Maly in Prag übersendet eine chemische Abhandlung der Herren O. Gressly und M. Nencki in Bern unter dem Titel: „Zur Frage über die Constitution des Carboxyl-*o*-Amidophenols“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit des Herrn C. Glücksmann: „Über die Oxydation von Ketonen vermittelst Kaliumpermanganat in alkalischer Lösung“.

Herr Prof. Dr. Rudolph Benedikt überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Max Bamberger im Laboratorium für allgemeine und analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien ausgeführte Arbeit: „Über eine quantitative Reaction des Lignins“.

Herr Dr. Max Mandl in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über eine allgemeine Linsengleichung“.

Preis des ganzen Heftes: 3 fl. 70 kr. = 7 RMk. 40 Pfg.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. BAND. VII. HEFT.

Jahrgang 1890. — Juli.

(Mit 1 Tafel und 23 Textfiguren.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1890.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

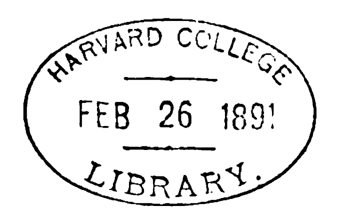
IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 7. Heftes 1890 des XCIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. = 4 RMk.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. VII. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

XVI. SITZUNG VOM 3. JULI 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1890) des 99. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte, ferner das Heft V (April 1890) des XI. Bandes der Monatshefte für Chemie vor.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Adolf Weiss in Prag übersendet eine Arbeit des Herrn Wilhelm Sigmund: Über fettspaltende Fermente im Pflanzenreiche."

Das c. M. Herr Hofrath Prof. Ernst Ludwig in Wien übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Dr. Richard Kerry und stud. med. S. Fraenkel, betitelt: „Die Einwirkung der Bacillen des malignen Oedems auf Kohlehydrate."

Herr Dr. K. Anton Weithofer übersendet eine in Gemeinschaft mit Herrn Dr. Alfred Rodler ausgeführte Arbeit, betitelt: „Die Wiederkäuer der Fauna von Maragha."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Theorie der Dampfspannung", von Dr. Gustav Jäger in Wien.
2. Beiträge zur Kenntniss der brasilianischen Provinz *São Paulo*", von Prof. Dr. F. W. Dafert aus Campinas (Brasilien).

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine Arbeit aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien von Julius Miesler, unter dem Titel: „Quan-

titativ-photographische Untersuchungen über elektrische Oscillationen."

Der c. M. Herr Prof. A. Schrauf in Wien überreicht eine Mittheilung: „Über Metacinnaberit von Idria".

Herr Dr. J. Holetschek, Adjunct der k. k. Universitäts-Sternwarte, überreicht eine Abhandlung: „Über den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen."

Herr Dr. Gustav Kohn, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung."

Herr Prof. E. Lippmann in Wien überreicht eine Arbeit des Herrn Alfred Klauber: „Über Xylylhydrazin".

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

D'Engelhardt, B., Observations Astronomiques. IIème Partie. Dresde, 1890; 4°.

Über eine allgemeine Linsengleichung

von

Dr. **Max Mandl.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. Juni 1890.)

Der Gauss'schen Theorie entsprechend wird allgemein angenommen, dass jedes System optischer Linsen mit gemeinsamer Achse durch eine einzige Linse ersetzbar sei. Versucht man jedoch diesen Satz auf ein für unendliche Entfernung eingestelltes Fernrohr anzuwenden, so versagen die Gauss'schen Gleichungen, indem für die Linse, welche dem ganzen optischen Systeme äquivalent ist, sowohl die Haupt- als auch die Brennpunkte in unendliche Entfernung rücken, so dass die Gleichungen zur Bestimmung der Lage und Grösse des Bildes illusorisch werden. Gauss selbst schreibt vor,[1] dass man sich in diesem Falle an die „allgemeinen Gleichungen" zu halten habe. Diese gestatten zwar immer, die Lage und Grösse des Bildes zu ermitteln, entbehren aber jener eleganten Form, welche die Gauss'sche Gleichung für eine einzige Linse auszeichnet, und man muss darauf verzichten, das System wie eine einfache Linse zu behandeln.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass entweder der Satz von der Ersetzbarkeit eines Linsensystems durch eine einzige Linse nicht allgemein giltig sei, oder die Gauss'sche Gleichung stellt nicht alle Fälle dar, welche bei einer Linse vorkommen können. Die folgende Betrachtung soll zur Entscheidung dieser Frage dienen. Es wird sich dabei herausstellen, dass die Gauss'sche Gleichung in der That eine bemerkenswerthe Gattung von Linsen nicht enthält, dass man aber eine Gleichung aufstellen kann,

---

[1] Siehe: Gauss, Dioptrische Untersuchungen, S. 15.

welche mit vollkommener Allgemeinheit die einfache Form der Gauss'schen Gleichung verbindet.

Gehen wir von jenen Linsengleichungen aus, in denen die Gegenstandsweite x und die Bildweite y von den brechenden Flächen an gerechnet werden, so können dieselben in folgender Form geschrieben werden:

$$y = \frac{n'r'[(n-1)d - nr]x - n'rr'd}{[(n-1)(n'-1)d - (n'-1)nr - (n-1)r']x - r[(n'-1)d - r']} \qquad 1)$$

$$\frac{\text{Bild}}{\text{Gegenst.}} = \frac{rr'}{[(n-1)(n'-1)d - (n'-1)nr - (n-1)r']x - r[(n'-1)d - r']} \qquad 2)$$

Die Vereinfachungen, welche Gauss bei diesen Gleichungen erzielt, beruhen wesentlich auf der Einführung zweier Punkte, welche so beschaffen sind, dass, wenn man Bild- und Gegenstandsweite von diesen an rechnet, das constante Glied des Zählers in Gleichung 1) verschwindet. Gauss wählt hiefür die Hauptpunkte der Linse; indessen leistet jedes beliebige Paar conjugirter Punkte dasselbe.[1]

Unter diesen unendlich vielen Punktepaaren sind die Hauptpunkte nicht gerade die geeignetsten, denn für

$$(n-1)(n'-1)d - (n'-1)nr - (n-1)r' = 0 \qquad 3)$$

rücken dieselben ins Unendliche und werden dann als Anfangspunkte einer Zählung unbrauchbar. Mit der Einführung der

[1] Denkt man sich nämlich die Gleichung 1) in der Form:

$$U \quad C_0xy + C_1x + C_2y + C_3 = 0$$

geschrieben und sind x_0, y_0 die Abstände jener conjugirten Punkte (gerechnet von den zugehörigen brechenden Flächen), welche als Anfangspunkte der Zählung gewählt werden sollen, bedeuten ferner ξ und η die Gegenstands- und Bildweite, bezogen auf diese neuen Anfangspunkte, so lautet die transformirte Linsengleichung:

$$\xi\eta\left(\frac{d^2U}{dx\,dy}\right)_0 + \xi\left(\frac{dU}{dx}\right)_0 + \eta\left(\frac{dU}{dy}\right)_0 = 0,$$

wo die an den partiellen Differentialquotienten angebrachten Indices andeuten sollen, dass nach ausgeführter Differentiation jedesmal x_0, y_0 für x und y zu setzen ist.

Die letzte Gleichung beweist nicht nur die obige, übrigens längst bekannte Eigenschaft conjugirter Punktepaare, sondern bietet auch einen bequemen Rechnungsbehelf bei Transformation von Linsengleichungen.

Hauptpunkte wird also von vornherein jene Linsengattung ausgeschlossen, zwischen deren Dimensionen die Relation 3) besteht. Auch die von Listing untersuchten „symptotischen Punkte"[1] würden in dieser Beziehung keine besseren Dienste leisten, weil nicht jede Linse reelle Punkte dieser Art besitzt.

Zu Anfangspunkten der Zählung für alle Fälle geeignet ist dagegen jenes Paar conjugirter Punkte, bei welchem $x = y$, also Bild- und Gegenstandsweite, von den brechenden Flächen an gerechnet, einander gleich sind. Man findet nämlich aus Gleichung 1)

$$x_0 = y_0 = \frac{d[(n'-1)r+(n-1)n'r'] - (nn'+1)rr' + \sqrt{R}}{2[(n-1)(n'-1)d - (n'-1)nr - (n-1)r']} \qquad 4)$$

worin

$$R = \{d[(n'-1)r+(n-1)n'r'] - (nn'+1)rr'\}^2 - \\ -4n'rr'd[(n-1)(n'-1)d - (n'-1)nr - (n-1)r'],$$

oder nach entsprechender Umformung

$$R = \{d[(n'-1)r - (n-1)n'r'] + (nn'-1)rr'\}^2 + 4nn'r^2r'^2.$$

Den beiden Vorzeichen der Quadratwurzel entsprechen zwei Paare der oben definirten Punkte, und da die Quadratwurzel immer reell ist, so kommen beide Punktepaare bei jeder Linse vor.

Für $d = \dfrac{(n'-1)nr + (n-1)r'}{(n-1)(n'-1)}$ verschwindet der Nenner in Gleichung 4), während der Zähler die Form annimmt:

$$\frac{nr^2(n'-1)^2 + n'r'^2(n-1)^2}{(n-1)(n'-1)} \pm \sqrt{\left\{\frac{nr^2(n'-1)^2 + n'r'^2(n-1)^2}{(n-1)(n'-1)}\right\}^2}.$$

In Folge dessen rückt ein Paar der oben definirten Punkte in unendliche Entfernung, dasjenige nämlich, welches man erhält, wenn man der Quadratwurzel dasselbe Vorzeichen gibt, welches dem Producte $(n-1)(n'-1)$ zukommt; das andere Paar von Punkten bleibt stets in endlicher Entfernung; denn bei entgegengesetztem Vorzeichen der Quadratwurzel verschwindet mit dem Nenner auch der Zähler in Gleichung 4), und man findet dann durch Differentiation von Zähler und Nenner etwa nach d:

---

[1] Siehe: Poggendorff's Annalen 1886, Bd. 129, S. 466 u. ff.

$$x_0 = y_0 = \frac{n' r r' [(n'-1) n r + (n-1) r']}{n r^2 (n'-1)^2 + n' r'^2 (n-1)^2}. \qquad 5)$$

Setzen wir also fest, dass die Quadratwurzel in Gleichung 4) mit dem entgegengesetzten Vorzeichen der Grösse $(n-1)(n'-1)$ zu nehmen sei, so ist dadurch ein Paar conjugirter Punkte definirt, welches bei jeder Linse vorkommt und immer in endlicher Entfernung liegt.[1]

Nebenbei bemerkt, fallen diese Punkte mit den Scheiteln der Linse zusammen, wenn man die Dicke vernachlässigt, weil für $d = 0$ auch $x_0 = y_0 = 0$ wird. Auch lässt sich zeigen, dass dieselben Punkte unter Umständen mit den Haupt- oder auch mit den Knotenpunkten coincidiren können; beides tritt gleichzeitig ein, wenn vor und hinter der Linse dasselbe Medium vorausgesetzt wird und die Linse eine gleichseitige Biconvex- oder Biconcavlinse ist.

Werden diese Punkte als Anfangspunkte der Zählung in Gleichung 1) eingeführt und die neue Gegenstandsweite mit λ, die neue Bildweite mit μ bezeichnet, setzt man ferner

$$\begin{aligned} L &= -d[(n'-1) r - (n-1) n' r'] - (n n'-1) r r' + \sqrt{R} \\ M &= d[(n'-1) r - (n-1) n' r'] + (n n'-1) r r' + \sqrt{R} \\ K &= -2[(n-1)(n'-1) d - (n'-1) n r - (n-1) r'] \end{aligned}$$

so kann man die allgemeine Linsengleichung in folgender Form schreiben:

$$\frac{L}{\lambda} + \frac{M}{\mu} = K. \qquad 6)$$

Ist K von Null verschieden, so sind

$$\frac{L}{K} = f \quad \text{und} \quad \frac{M}{K} = F$$

die vordere und hintere Brennweite der Linse, und dieselben müssen entweder beide positiv oder beide negativ sein, weil ihr Product

$$\frac{L}{K} \cdot \frac{M}{K} = \frac{4 n n' r^2 r'^2}{K^2}$$

[1] Auch der Fall der Planlinsen und der planparallelen Platte ist hierin eingeschlossen.

eine stets positive Grösse ist. Unter der Annahme, dass K von Null verschieden ist, kann man dann für Gleichung 6) auch schreiben:

$$\frac{l}{\lambda}+\frac{F}{\mu}=1.$$

Ist dagegen $K=0$, so kann man der Gleichung 6) die Form geben:

$$\frac{\lambda}{\mu}=-\frac{L}{M}=-\frac{n'r'^2(n-1)^2}{nr^2(n'-1)^2}.$$

Diese Linse nun ist es, welche einem auf unendliche Entfernung eingestellten Fernrohre äquivalent ist, und sie bietet die Eigenthümlichkeit dar, dass die Verschiebung des Bildes jener des Gegenstandes proportional und die Grösse des Bildes von der Gegenstandsweite unabhängig ist. Letzteres ergibt sich aus der für diesen Fall entsprechend transformirten Gleichung 2); es ist nämlich

$$\frac{\text{Bild}}{\text{Gegenstand}}=-\frac{(n-1)r'}{(n'-1)nr}.$$

Was die Ersetzbarkeit eines Linsensystems durch eine einzige Linse anbelangt, so kann dieselbe durch Anwendung der üblichen Schlussweise auf Gl. 6) nunmehr allgemein nachgewiesen werden, nachdem das Unendlichwerden der Brennweiten der eindeutigen Bestimmung der Bildweite jetzt keinen Eintrag thut.

Quantitativ-photographische Untersuchungen über elektrische Oscillationen

von

Julius Miesler.

(Mit 1 Tafel und 4 Textfiguren.)

Aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

Der oscillatorische Charakter der Entladung eines Condensators, der durch die Arbeiten des Herrn Hertz eine solche Bedeutung gewann, wurde zuerst in klarer und bestimmter Weise von Joseph Henry in Washington erkannt. Er gelangte zu dieser Überzeugung, indem er die Magnetisirung von Stahlnadeln durch die Entladung einer Leydnerbatterie studirte. Er sagt in einer 1842 veröffentlichten Abhandlung Folgendes:[1]

„The discharge, whatever may be its nature, is not correctly represented (employing for simplicity the theory of Franklin) by the single transfer of an imponderable fluid from one side of the jar to the other; the phenomenon requires us to admit the existence of a principal discharge in one direction and then several reflex actions backward and forward, each more feeble than the preceding, until the equilibrium is obtained."

Herr v. Helmholtz fasst in seiner Abhandlung „Über die Erhaltung der Kraft"[2] die Entladung der Leydnerflasche als

---

[1] O. Lodge, Modern views of Elektricity. Nature series 1889. Macmillan, p. 370.

[2] Gesammelte Abhandlungen, S. 46.

ein Hin- und Herschwanken der Elektricität zwischen beiden Belegungen auf.

Eine Berechnung der Entladungen von Condensatoren gab zuerst Sir William Thomson in seiner Abhandlung: „On transient currents“.[1] Wir verdanken ihm die den Entladungsvorgang darstellende Gleichung

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{w}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{CL}=0,$$

wo w den Widerstand, L das Selbstpotential der Leitung, C die Capacität des Condensators bedeutet. Ist

$$\frac{w^2}{4L^2}<\frac{1}{CL},$$

so ist die Entladung eine oscillirende, deren Schwingungsdauer gegeben ist durch

$$\tau=\frac{\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL}-\frac{w^2}{4L^2}}}.$$

Wenn w klein ist, so wird

$$\tau=\pi\sqrt{CL}.$$

Dass das Glied $\frac{w^2}{4L^2}$ wirklich vernachlässigt werden kann, werde ich unter Anderem im Folgenden zeigen.

Der oscillirende Charakter der Leydnerflaschenentladung fand seine Bestätigung durch die Arbeiten von P. Riess.[2] Einige Jahre später stellte Herr Feddersen eine Reihe umfangreicher Experimentaluntersuchungen über die Entladung von Leydnerflaschen an.[3]

---

[1] Phil. Mag., June 1853.

[2] Riess, Lehre von der Reibungselektricität, Bd. 2, S. 88, Berlin 1853.

[3] Beiträge zur Kenntniss des elektrischen Funkens. Inaug. Diss. Kiel 1857.

Pogg. Ann., Bd. 103, S. 69, 1858.
Pogg. Ann., Bd. 108, S. 497, 1859.
Pogg. Ann., Bd. 112, S. 452, 1861.
Pogg. Ann., Bd. 113, S. 437, 1861.
Pogg. Ann., Bd. 115, S. 336, 1862.
Pogg. Ann., Bd. 116, S. 132, 1862.

Herr Feddersen betrat den Weg, den Wheatstone eingeschlagen und benützte zuerst einen Elektromotor, der ihm einen Spiegel in Rotation versetzte. In seiner ersten Abhandlung theilt er jedoch bloss Beobachtungen über continuirliche und intermittirende Entladungen, nicht aber eigentlich oscillirende Entladungen mit. Erst seine dritte Abhandlung bezieht sich auf oscillatorische Entladungen. Er arbeitete mit einem vervollkommneten Apparate und fixirte die Funkenentladungen auf photographischem Wege. Er fand, dass die aus den Dimensionen des Bildes berechnete Schwingungsdauer proportional der Quadratwurzel aus der elektrischen Oberfläche der Batterie,

$$\tau = a\sqrt{s}$$

sei. Er war schon im Stande, aus der Beobachtung für eine gegebene Leitung und eine bestimmte Batterie die Schwingungsdauer für dieselbe Leitung und eine andere Batterie zu berechnen und hat mit der Berechnung gut stimmende Resultate gefunden. Er stellte auch vergleichende Beobachtungen über die Capacität verschiedener Batterien mit Hilfe eines Galvanometers an. Was die Verhältnisse der Leitung anlangt, so fand Herr Feddersen, dass die Oscillationsdauer wesentlich mit der Leiterlänge zunehme, aber in einem langsameren Verhältnisse wachse als die Länge des Schliessungsbogens.

Herr Paalzow[1] beobachtete die Entladung von Condensatoren durch Geissler-Röhren; Herr v. Oettingen[2] bestätigte durch Prüfung des Rückstandes der Leydnerbatterien den oscillatorischen Charakter der Entladung. Kirchhoff[3] behandelte das Problem mathematisch und gelangte zu ähnlichen Resultaten, wie Sir William Thomson. Kirchhoff war der erste, der eine Vergleichung zwischen den beobachteten Werthen Feddersen's und den aus der Capacität und der Leitung berechneten Werthen für die Schwingungsdauer anstellte. Er berechnete annähernd die Capacität der Leydnerflaschen, die Feddersen verwendet hatte, aus der Glasdicke und Oberfläche, sowie das Selbstpotential

---

[1] Pogg. Ann., Bd. 112, S. 567, 1860.

[2] Pogg. Ann., Bd. 115, S. 513, 1862.

[3] Pogg. Ann., Bd. 121, Ges. Abhandlungen, S. 168, 1864.

des Schliessungsbogens. Die von Feddersen aus seinen photographischen Aufnahmen bestimmten Schwingungsdauern stimmen nur der Grössenordnung nach mit den von Kirchhoff berechneten überein. Die Übereinstimmung ist, wie Kirchhoff selbst bemerkt, ungenau, weil man die Capacität und die Selbstinduction nur schätzen konnte.

Herr Ogden N. Rood hat mit einem sehr vollkommenen Rotationsapparate 1867 Untersuchungen[1] über die Dauer der Totalentladung und des ersten weissleuchtenden Entladungstheiles einer durch einen Inductionsapparat geladenen Leydnerflasche angestellt. Er findet bei 300 Rotationen seines Spiegels in der Secunde die Dauer des ersten Entladungsactes gleich 40 Tausendmillionstel Secunden. Später hat Herr L. Lorenz[2] die Entladung einer Batterie mittelst eines rotirenden Planspiegels und eines photographischen Objectivs aufgenommen, um die Ursache der Nichtübereinstimmung der von Feddersen gefundenen Werthe mit den berechneten festzustellen.

Die Übereinstimmung zwischen dem berechneten 0·00000638 Sec. und dem beobachteten 0·00000632 ist in der That geringer, wie Herr Lorenz selbst sagt, da die Capacität der Batterie gewiss grösser war, als sie angenommen wurde. Es wäre also dann die Oscillationsdauer kleiner als die beobachtete ausgefallen. Die Abweichung wäre, wie der Autor angibt, im Funken selbst zu suchen. Die Arbeiten von Bichat und Blondlot[3] haben die Drehung der Polarisationsebene des Lichtes durch oscillirende Entladungen zum Gegenstande.

Herrn v. Oettingen[4] gelang es, eine Interferenz oscillatorischer Entladungen herbeizuführen und dieselbe zu photographiren. Aus diesem Grunde, da es sich um Interferenzen handelte, fehlen die absoluten Angaben über Capacitäten und Selbstpotentiale der Leiter, von denen nur Drahtlängen angegeben sind. Zur selben Zeit hat auch Herr Oliver Lodge[5]

---

[1] Sillimans Journal, II. series, vol. 48, p. 153, 1869. — III. series, vol. 2, p. 160, 1871, vol. 4, p. 249 und 370, 1872.

[2] Wied. Ann., Bd. 7, S. 161, 1879.

[3] Comptes rendus, T. 94, p. 1590, 1882.

[4] Wied. Ann., Bd. 34, S. 570, 1888.

[5] The Electrician. 1888, p. 302, 435, 607.

Wellenlängen von Leydnerflaschenentladungen in Drähten gemessen. In diesem Jahre, als ich meine Arbeit nahezu abgeschlossen hatte, erschien eine Arbeit von Herrn v. Oettingen[1] über die oscillatorische Entladung von Metallconductoren nach der Erde, wo auch die absoluten Werthe der Capacitäten und Selbstpotentiale angegeben sind. Es existirt also ausser der Kirchhoff'schen Berechnung der Feddersen'schen Versuche, sowie den zwei Vergleichungen, die Herr Lorenz gegeben hat, keine längere Beobachtungsreihe, welche die Ubereinstimmung zwischen den beobachteten und den nach der Formel

$$\tau = \pi \sqrt{CL}$$

berechneten Werthen erweisen würde. Der Zweck vorliegender Arbeit soll also sein, zu zeigen, dass die aus den Messungen der Capacität und Selbstinduction berechneten Schwingungsdauern von Leydnerflaschenentladungen in genauer Übereinstimmung mit den auf photographischem Wege erhaltenen Werthen sind.

I. Der Apparat.

Als Rotationsapparat diente mir das Laufwerk eines Hughes'-schen Typendrucktelegraphen, das mir Herr Mechaniker Otto Schaeffler, Wien, VII., Kaiserstrasse 89, dem ich hier gleichzeitig auf das Wärmste danke, in liebenswürdigster Weise zur Verfügung stellte und vollkommen zu meinen Zwecken adaptirte. Claviatur und Typenrad waren ganz entfernt worden. Um eine horizontale Axe drehte sich der runde, in einer sehr genau gearbeiteten Fassung befindliche Planspiegel aus Glas von 50 *mm* Durchmesser. Die Axe des rotirenden Spiegels wurde durch ein System von Zahnrädern getrieben, die die Übersetzungsverhältnisse

Spiegelaxe
1 : 10
1 : 10
1 : 7

---

[1] Wied. Ann., 40, S. 83, 1890.

besassen. Die letzte Axe trug einen Zeiger, hinter welchem ein Zifferblatt angebracht war; hatte die letzte Axe eine Umdrehung gemacht, so hatte die Spiegelaxe 700 Rotationen ausgeführt. Es wurden 20 Umdrehungen der Zeigeraxe beobachtet und die Zeit an einer auf Viertelsecunden arretirbaren Uhr gemessen, so dass die Fehler bei Bestimmung der Rotationsgeschwindigkeit der Spiegelaxe möglichst reducirt wurden. Die Spiegelaxe trug an einem Ende eine Scheibe, an welche ein Stahlrädchen mittelst Friction in verschiedenen Distanzen vom Centrum der Scheibe gekuppelt werden konnte. Die Axe des Stahlrädchens, die senkrecht zur Rotationsaxe des Spiegels stand, trug einen Windflügel, der zur Erzielung einer gleichmässigen Geschwindigkeit diente. Man konnte grössere oder kleinere Umdrehungsgeschwindigkeiten des Spiegels erzielen, je nachdem man das Rädchen näher dem Centrum oder der Peripherie der Scheibe einstellte. An die Axe, die den Zeiger trug, griff das Triebwerk an, das seine gewöhnliche Form, wie am Hughes'schen Typendrucktelegraphen, beibehalten hatte und durch Niedertreten eines Hebels während des Laufes des Spiegels aufgezogen wurde. Es konnten Bleischeiben im Gewichte bis zu ungefähr 250 *kg* angehängt werden. Die Arretirung geschah durch Andrücken eines Bremsklotzes an eine der letzteren Axen.

Das Werk war auf einem festen Eichentische montirt, dessen Füsse durch Eisenconstructionen zur Erzielung grösserer Stabilität verbunden waren. Um den Stromkreis der Leydnerbatterie in dem Momente zu schliessen, wo der Spiegel das Funkenbild in das photographische Objectiv reflectirte, wurde von demselben Rade, das unmittelbar die Spiegelaxe antrieb, eine zweite Axe in Bewegung versetzt, die, gleich schnell wie der Spiegel rotirend, ein Messer trug, das zwei ungleich lange Radien von 135 und 80 *mm* bildete. Die beiden Enden des Messers gingen an zwei Kupferdrahtspitzen vorüber, die bis auf das äusserste Ende isolirt waren. Wenn der Spiegel sich in der Reflexionsstellung befand, so hatten die Enden des Doppelmessers die geringste Distanz von den Drahtspitzen, und es konnte der Entladungskreis der Leydnerbatterie, der das Funkenmikrometer enthielt, dessen Bild das Objectiv auf der matten Einstellscheibe der Camera entwarf, dadurch geschlossen werden.

II. Die Photographie der Batterieentladung.

Die photographische Aufnahme der Funken geschah, wie bereits erwähnt, nicht mittelst des schwer herzustellenden rotirenden Concavspiegels, den Feddersen verwendete, sondern mittelst eines einseitig spiegelnden Planspiegels und einer photographischen Camera. Die Aufstellung zeigt die Fig. 1.

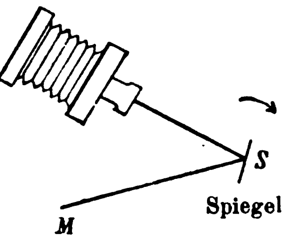


Fig. 1.

S stellt den um seine horizontale Axe rotirenden Spiegel dar, M die ebenfalls horizontale Funkenstrecke, C die Camera mit dem Objectiv. Bei den vor mir gemachten Versuchen war eine längere Rechnung nöthig, um die Grösse des Winkels, der der Dauer einer Oscillation entspricht, zu ermitteln. Man ist gezwungen, die Distanz des Objectivs vom rotirenden Spiegel zu bestimmen, die nur schwer genau sich ermitteln lässt.

Alle diese Schwierigkeiten umgeht man, wenn man das Grössenverhältniss

$$m = \frac{\text{Gegenstandsgrösse}}{\text{Bildgrösse}} = \frac{g}{b} \qquad 1)$$

einführt. Man stellt den Spiegel in die Reflexionsstellung. Dann ersetzt man die Funkenstrecke M durch einen beleuchteten Mass-

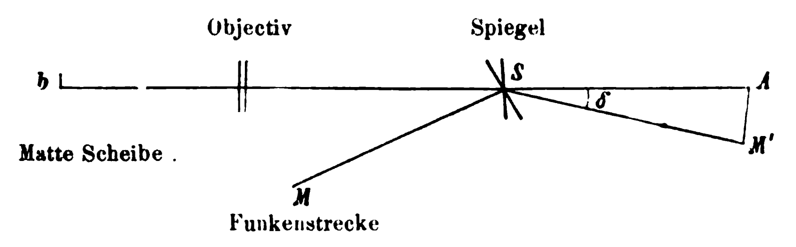


Fig. 2.

stab und nimmt denselben bei ruhendem Spiegel mittelst des Objectivs photographisch auf. Aus dieser Photographie bestimmt man $m = \frac{g}{b}$.

In der Fig. 2 ist AM' die virtuelle Bildbahn des Spiegels und als gerade Linie aufzufassen für kleine Drehungswinkel des Spiegels S. Es ist

$$AM' : \delta = 2\pi r : 360° \text{ für } SM' = r.$$

Da AM' Gegenstand für das Bild b ist, so ist der doppelte Drehungswinkel des Spiegels mit Berücksichtigung von 1)

$$\delta = \frac{bm\, 180°}{\pi r}.$$

Eingesetzt in die Formel von Wheatstone

$$\tau = \frac{\delta}{2n . 360°}$$

ergibt sich

$$\tau = \frac{bm}{4\pi rn}. \tag{2}$$

Wir haben also den Vortheil, dass wir die schwierige Messung der Distanz von der Linsenfläche umgehen; wir haben nur eine Distanz zu messen, die der Funkenstrecke von der Rotationsaxe des Spiegels, die sich mit grosser Sicherheit ermitteln lässt. Die Brennweite des Linsensystems kommt ebenfalls in der Formel 2) nicht vor.

Bei allen meinen Versuchen war r, sowie das Grössenverhältniss m und die Zahl der Umdrehungen in der Secunde n dieselbe. Man braucht dann nur die Länge einer Oscillation b mit einer ein- für allemal bestimmten Constanten zu multipliciren, um die Oscillationsdauer zu erhalten. Dann ist

$$\tau = Cb,$$

wo

$$C = \frac{m}{4\pi rn} \tag{3}$$

ist.

Bei meinen Versuchen war

$$r = 272\ mm$$

$$n = 63 \cdot 40 \text{ Rotationen pro Secunde}$$

m als Mittelwerth einer Reihe von Messungen an einem Mikroskopcomparator,

$$m = \frac{69 \cdot 90}{43 \cdot 20},$$

woraus

$$C = 0 \cdot 0000074667.$$

Das Objectiv war ein lichtstarkes Voigtländer-Porträtobjectiv. Die Aufnahmen erfolgten auf hochempfindlichen Schleussner'schen Trockenplatten, die mit Pyrogallol entwickelt wurden. Das Material der Elektroden, zwischen denen der zu photographirende Funke übersprang, war Zinn, jenes Metall, das sich, wie schon Herr Feddersen gefunden, am besten für photographische Aufnahmen eignet.

Durch einen auf dem hölzernen Schutzkasten, der das Laufwerk deckte, angebrachten einfachen Commutator wurde die Leydnerbatterie einmal mit einer Holtz'schen Influenzmaschine geladen und vermittelst Umlegen desselben, nachdem das Uhrwerk in Betrieb gesetzt und seine Geschwindigkeit eine constante geworden war, durch die Mikrometerfunkenstrecke und die jeweilig eingeschalteten Spiralen mit Selbstinduction entladen. Diese letzteren, 39 Spiralen von 0·8 *mm* dickem Messingdraht und einer Länge von je 6 *m*, einer Windungsfläche von etwa 2·3 cm^2, waren in geeigneter Weise auf vier langen Glasröhren aufgehängt. Die Längenmessung der Photographieen erfolgte durch einen Comparator mit einem zehnmal vergrössernden Mikroskope und einer Schraubenspindel. Da die Contouren der einzelnen Oscillationen im Mikroskope oft verschwommen erschienen, während sie sich für das unbewaffnete Auge scharf abgegrenzt zeigten, so wurde das durchgehende Licht, mit dem die Photogramme während der Längenmessung beleuchtet wurden, durch matte Scheiben oder färbige Gläser abgeschwächt, wodurch man schärfere Contouren auch unter dem Mikroskope erzielte, wie sie zu einer Messung nöthig waren. Es wurden stets alle Oscillationen zusammen gemessen und die Gesammtlänge durch die Zahl der Oscillationen dividirt. Die Oscillationsdauer, worunter hier wie bei Feddersen die Dauer einer einfachen Schwingung verstanden ist, bewegte sich innerhalb der Grössen

Hunderttausendstel- bis Millionstelsecunden. Ich gebe nachfolgend eine Übersicht über die aus den Photogrammen ermittelten Zahlen, die im weiteren Verlaufe immer „beobachtete“ Schwingungsdauern genannt werden sollen.

1. 7 grosse und 7 kleine Flaschen.
   Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
   Länge der Funkenstrecke 13 *mm*.
   Länge einer Oscillation 2·09 *mm*.
   τ beob. = 0·00001561 Sec.
2. 6 grosse Flaschen.
   Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
   Länge der Funkenstrecke 10 *mm*.
   Länge einer Oscillation 1·92 *mm*.
   τ beob. = 0·00001434 Sec.
3. Wie 2.
   Länge einer Oscillation 1·83 *mm*.
   τ beob. = 0·00001366 Sec.
4. 6 grosse Flaschen.
   28 Spiralen.
   Länge der Funkenstrecke 10 *mm*.
   Länge einer Oscillation 1·55 *mm*.
   τ beob. = 0·00001157 Sec.
5. Wie 4.
   Länge einer Oscillation 1·55 *mm*.
   τ beob. = 0·00001157 Sec.
6. Die 4 ersten grossen Flaschen.
   Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 10 *mm*.
   Länge einer Oscillation 1·48 *mm*.
   τ beob. = 0·00001105 Sec.
7. Wie 6.
   Länge einer Oscillation 1·48 *mm*.
   τ beob. = 0·00001105 Sec.
8. Die 4 ersten grossen Flaschen.
   34 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 10 *mm*.
   Länge einer Oscillation 1·40 *mm*.
   τ beob. = 0·00001046 Sec.

9. Die ersten 3 grossen Flaschen.
   Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 12·5 *mm.*
   Länge einer Oscillation 1·30 *mm.*
   τ beob. = 0·000009707 Sec.
10. Wie 9.
   Länge einer Oscillation 1·29 *mm.*
   τ beob. = 0·000009632 Sec.
11. 6 grosse Flaschen.
   14 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 10 *mm.*

Bei allen Photographien wurden stets die Mittelwerthe von 8 bis 10 Comparatormessungen, die Oscillationen an der einen, sowie an der anderen Elektrode betreffend, genommen. Eine Elektrode zeigte hier sieben regelmässige, gleiche Oscillationen von einer mittleren Länge von 1·10 *mm.* Die letzten Oscillationen der anderen Elektrode jedoch, die etwas verschwommen waren, schienen länger als die vorhergehenden; Mittelwerth 1·23 *mm.*

Nehmen wir die mittlere Oscillationslänge der ersten Elektrode, so erhalten wir

$$\tau_1 \text{ beob.} = 0\cdot000008213 \text{ Sec.}$$

Mit der zweiten Ziffer, der mittleren Länge einer Oscillation an der zweiten Elektrode,

$$\tau_2 \text{ beob.} = 0\cdot000009184 \text{ Sec.}$$

12. Die letzten 2 grossen Flaschen (5 und 6).
   28 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 13·8 *mm.*
   Länge einer Oscillation 0·90 *mm.*
   τ beob. = 0·000006720 Sec.
13. Die letzten 3 grossen Flaschen (4, 5, 6).
   18 Selbstinductionsspiralen.
   Funkenstrecke 13·8 *mm.*
   Länge einer Oscillation 0·86 *mm.*
   τ beob. = 0·000006421 Sec.
14. 7 kleine Flaschen.
   Alle 39 Selbstinductionsspiralen.

Funkenstrecke 10 *mm*.
Länge einer Oscillation 0·84 *mm*.
τ beob. = 0·000006272 Sec.

15. Erste grosse Flasche allein.
Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
Funkenstrecke 10 *mm*.
Länge einer Oscillation 0·76 *mm*.
τ beob. = 0·000005675 Sec.

16. Wie 15.
Funkenstrecke 12 *mm*.
Länge einer Oscillation 0·76 *mm*.
τ beob. = 0·000005675 Sec.

17. 6 grosse Flaschen.
6 Selbstinductionsspiralen.
Funkenstrecke 11·5 *mm*.
Länge einer Oscillation 0·71 *mm*.
τ beob. = 0·000005301 Sec.

18. 5 kleine Flaschen.
Alle 39 Selbstinductionsspiralen.
Funkenstrecke 10 *mm*.
Länge einer Oscillation 0·70 *mm*.
τ beob. = 0·000005227 Sec.

Die Länge der Funkenstrecke, die nach Feddersen ohne jeglichen Einfluss auf die Oscillationsdauer ist, variirte bei den Aufnahmen von 10 bis 13·8 *mm*. Zwei weitere Aufnahmen, die besondere Eigenthümlichkeiten zeigen, werde ich später besprechen.

III. Messung der Selbstinduction.

Die Art der Wicklung meiner Spiralen liess voraussehen, dass man es mit kleinen Coëfficienten der Selbstinduction zu thun habe. Ich habe eine Reihe von Methoden in Betracht gezogen, wie die von Lord Rayleigh,[1] deren Schwierigkeit in der Verwendung eines hochempfindlichen ballistischen Galvanometers liegt. Herrn H. F. Webers[2] Methode konnte ich nicht verwenden, obwohl sie sehr geeignet gewesen wäre, die kleinen Coëfficienten

---

[1] Proc. Royal Soc., 32, p. 116.
[2] Sitzungsber. der k. preuss. Akademie, 1886, S. 511.

der Selbstinduction zu messen, weil mir die beiden Spulen mangelten, mit deren berechneten gegenseitigen Inductionscoëfficienten die zu messenden Coëfficienten verglichen werden. Schliesslich stellte ich Vorversuche mit der cumulativen Methode der Herren Ledeboer und Manœuvrier[1] an. Da mir aber durch die Liebenswürdigkeit des Herrn T. W. W. Melhuish, des Directors der elektrischen Abtheilung der Imperial-Continental-Gas-Association, dem ich aufs wärmste danke, ein Condensator von Elliott Brothers, der in Tausendstel Mikrofarad getheilt war, zur Verfügung stand, ohne welchen Etalon es mir überhaupt sehr schwer geworden wäre, meine Bestimmungen durchzuführen, so war ich nicht darauf angewiesen, absolute Messungen der Selbstinduction zu machen, sondern konnte die Coëfficienten der Selbstinduction mit einer Capacität vergleichen, wie es Maxwell[2] zuerst vorgeschlagen. Die Rechnung von Maxwell führt zu der einfachen Schlussformel

$$L = QRC,$$

wo Q der Widerstand der Spule, deren Selbstinductionscoëfficient bestimmt werden soll, R der Widerstand des gegenüber liegenden Zweiges der Brücke, C die Capacität des dem letzten Zweige parallel geschalteten Condensators ist. Die bei Unterbrechung des Batteriekreises erhaltenen Ausschläge waren jedoch so gering, dass eine Messung unmöglich war. Es wurde daher ähnlich, wie die Herren Ledeboer und Manœuvrier und die Herren Ayrton und Perry beim Secohmmeter eine Cumulation anwandten, Maxwell's[3] Methode cumulativ gemacht, um grössere Ausschläge zu erzielen. Der Batteriekreis wurde durch einen rotirenden Unterbrecher

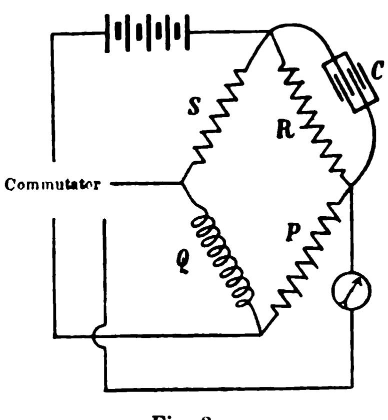


Fig. 3.

[1] Comptes rendus, T. 104, p. 900.
[2] Treatise on E. and M., vol. II, 1. Aufl., Art. 778
[3] Soc. of. Telegraph Engineers 1887. 28. April

abwechselnd geschlossen und unterbrochen, die Brücke war bloss für Öffnungsströme geschlossen. Fig. 3 gibt die Schaltung.

Man braucht hier keine Galvanometerausschläge zu bestimmen, denn Maxwell's Methode ist an sich eine Nullmethode, durch Einschalten einer passenden Capacität wird der Ausschlag auf Null reducirt. Man eliminirt die Rotationsgeschwindigkeit des Unterbrechers; ferner ist die Formel von Maxwell exact giltig, während bei manchen anderen Methoden kleine Ablenkungswinkel vorausgesetzt werden; auch kann durch Erhöhung der Rotationsgeschwindigkeit des Unterbrechers die Methode entsprechend empfindlich für kleine Coëfficienten gemacht werden. Der erwähnte Rotationsapparat trug auf einer Axe durch Ebonit von einander getrennte Messingzahnräder, deren Lücken eben-

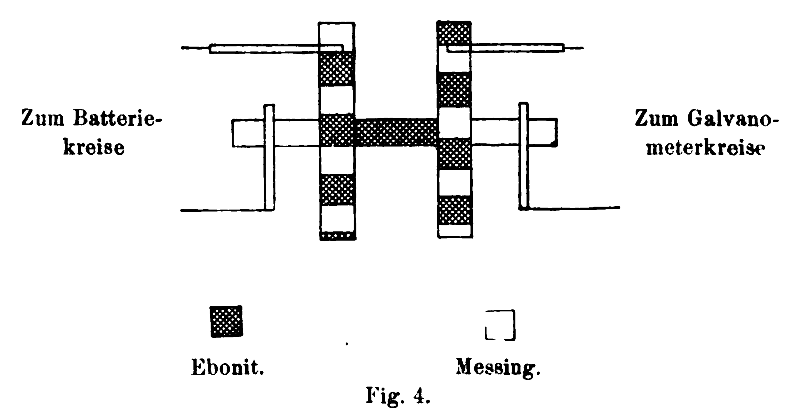


Fig. 4.

falls mit Ebonit ausgefüllt waren. Jedes Rad hatte 12 leitende Felder; die Stromzu- und -Abfuhr erfolgte durch Schleiffedern. Die gegenseitige Stellung der beiden Räder war, wie Fig. 4 zeigt, so gewählt, dass der Galvanometerkreis nur von Öffnungsströmen durchflossen war; zur Zeit der Entstehung des Schliessungsstromes berührte die zum Galvanometerkreise gehörige, auf dem Rade schleifende Feder ein nicht leitendes Feld. Als Galvanometer erwies sich das Wiedemann'sche geeignet, und zwar mit den Rollen von geringem Widerstande und dem schweren Magnetspiegel. Die Brücke wurde mittelst des Universalwiderstandskastens von Siemens & Halske gebildet. Es war z. B. bei der Bestimmung des Selbstinductionscoëfficienten der ganzen 39 Spiralen

$$S = R = 11 \text{ S. E.}$$

$$Q = 33\cdot 5 \text{ S. E.}$$

Der durch Einschaltung von acht kleinen Chromsäureelementen bei ungefähr 180 Stromunterbrechungen pro Secunde erzielte Ausschlag wurde durch

$$C = 0\cdot 85 \text{ Mikrofarad}$$

compensirt, so dass in den vom Internationalen Elektrikercongresse zu Paris 1889 adoptirten Einheiten, den Quadranten

$$L = 0\cdot 0002787 \text{ Quadrant}$$

ist.

Im Folgenden eine Tabelle der Coefficienten:

Zahl der Spiralen	L in Quadranten
39	0·0002787
34	0·0002005
20	0·0001457
18	0·0001298
14	0·0001007
6	0·00004327
2	0·00001082

Die Schnelligkeit der Oscillationen hätte eine starke Ungleichheit der Stromvertheilung im Drahtquerschnitte und dadurch eine Änderung des Selbstinductionscoëfficienten bedingen können, wie dies Herr Stefan in einer nach Abschluss meiner Arbeit erschienenen Abhandlung über die Theorie der oscillatorischen Entladung[1] entwickelt hat. Ich berechnete jedoch nach den Stefan'schen Formeln[2] über veränderliche Ströme in dicken Leitern, die sich für meine Schwingungszahlen ergebenden Correctionen für die Selbstinductionscoëfficienten und fand, dass bei den langsameren Schwingungen (10^{-5}) die Correction nicht einmal mehr die letzte geltende Ziffer erreichte, dass sie bei schnelleren Schwin-

---

[1] Diese Berichte, Bd. XCIX, Juni 1890.

[2] Diese Berichte, Bd. XCV, Mai 1887.

gungen etwa 0·6 % betrug, ein Fehler, den ich wegen seiner Kleinheit nicht berücksichtigte. Es war also der Querschnitt des Drahtes ganz vom Strome erfüllt und die Bestimmungen der Coëfficienten hinreichend exact.

IV. Messung der Capacität.

Eine annähernde Schätzung über die Capacität einer der grossen Leydnerflaschen, die aus Glasstürzen hergestellt worden waren und deren einseitige Oberfläche etwa 2200 cm^2 betrug, ergab, die Glasdicke mit 2 *mm* und die specifische Inductionscapacität mit 6 angenommen, die Grössenordnung Tausendstel Mikrofarad. Vorversuche mit dem Wiedemann'schen Galvanometer, mit den Rollen von hohem Widerstande und dem Ringmagnet lehrten mich, dass eine genaue Bestimmung auf diesem Wege nicht möglich war, denn für ein Tausendstel Mikrofarad war der Ausschlag bei einer ladenden Potentialdifferenz von 150 Volt nur wenige Millimeter. Ich verglich daher die Capacitäten mit Hilfe eines Mascart-Carpentier'schen Elektrometers nur mit einer sehr geringen Spannung, durch vier Latimer-Clark-Elemente geladen wurden. Nach Maxwell's Vorschlage[1] wurde die Leydnerflasche, deren Capacität unbekannt war und der Condensator durch geeignete Commutatoren parallel geschaltet und mit einer Zink-Wasser-Kupfer-Batterie von 150 von einander wohl isolirten Elementen geladen. Dann wurde das gemeinsame Potential am Elektrometer abgelesen. Hierauf wurden die Belegungen beider Condensatoren gekreuzt verbunden, so dass die Ladungen sich neutralisiren konnten und dann mit dem Elektrometer verbunden und jetzt das Potential bestimmt. Durch eine einfache Rechnung ergibt sich nun die unbekannte Capacität. Da ich aber durch den Condensator in der Lage war, die bekannte Capacität beliebig abzustufen, so pflegte ich gewöhnlich die Parallelschaltung wegzulassen und die am Condensator gestöpselten Capacitäten so lange zu variiren, bis bei der Gegeneinanderschaltung der Condensatoren sich die Ladungen vollkommen oder nahezu neutralisirten. Bei allen Messungen wurde eine constante Ladungszeit von einer Minute eingehalten. Die

[1] Treatise on E. and M., vol. I, art. 229, 1. Aufl.

Messung der Capacität der 7 kleinen Leydnerflaschen, die früher schon im Messraume der Imperial-Continental Gas-Association mit Hilfe eines sehr empfindlichen Thomson'schen Galvanometers vorgenommen worden war, ergab das genau gleiche Resultat wie die spätere elektrometrische. Im Folgenden eine Tabelle der Capacitäten.

	Mikrofarad
Die sechs grossen Flaschen	0·067
Flasche Eins	0·012
Flaschen Eins+Zwei+Drei	0·034
Flaschen Fünf+Sechs+Sieben	0·033
Flasche Fünf	0·011
Die sieben kleinen Flaschen	0·014

V. Vergleich zwischen den beobachteten und den berechneten Werthen.

Da die Werthe der Capacitäten und Selbstinductionscoëfficienten in elektromagnetischen praktischen Einheiten, in Mikrofarad und Quadranten, gegeben sind, so vermeidet man in der Formel die Lichtgeschwindigkeit.

Es ergibt sich als berechnete Oscillationsdauer

$$\tau = \pi \sqrt{C \times 10^{-15} \times L \times 10^{9}}$$

C und L in den praktischen Einheiten

Es waren für Aufnahme 1.

$C = 0 \cdot 092$ Mikrofarad.

$L = 0 \cdot 0002787$ Quadrant.

τ ber. $= 0 \cdot 00001591$ Sec. τ beob. $= 0 \cdot 00001561$ Sec.

Wir dürfen in der That das Glied $\frac{w^2}{4L^2}$ gegen $\frac{1}{CL}$ vernachlässigen. $\frac{w^2}{4L^2}$ ist etwa der tausendste Theil von $\frac{1}{CL}$, wie sich aus einer kleinen Schätzung ergibt, wobei unter w nur der messbare Widerstand des Schliessungsbogens berücksichtigt ist.

2. $C = 0 \cdot 067$ Mikrofarad.

$L = 0 \cdot 00002787$ Quadrant.

τ ber. $= 0 \cdot 00001358$ Sec. τ beob. $= 0 \cdot 00001434$ Sec.

3. Wie 2.

τ ber. = 0·00001358 Sec. τ beob. = 0·00001359 Sec.

4. $C = 0·067$ Mikrofarad.

$L = 0·0002005$ Quadrant.

τ ber. = 0·00001151 Sec. τ beob. = 0·00001157 Sec.

5. Wie 4.

τ ber. = 0·00001151 Sec. τ beob. = 0·00001157 Sec.

6. $C = 0·045$ Mikrofarad.

$L = 0·0002787$ Quadrant.

τ ber. = 0·00001113 Sec. τ beob. = 0·00001105 Sec.

7. Wie 6.

τ ber. = 0·00001113 Sec. τ beob. = 0·00001105 Sec.

8. $C = 0·045$ Mikrofarad.

$L = 0·0002422$ Quadrant.

τ ber. = 0·00001037 Sec. τ beob. = 0·00001046 Sec.

9. $C = 0·034$ Mikrofarad.

$L = 0·0002787$ Quadrant.

τ ber. = 0·000009671 Sec. τ beob. = 0·000009707 Sec.

10. Wie 9.

τ ber. = 0·000009671 Sec. τ beob. = 0·000009632 Sec.

11. $C = 0·067$ Mikrofarad.

$L = 0·0001007$ Quadrant.

τ ber. = 0·000008160 Sec. τ_1 beob. = 0·000008213 Sec.

τ_2 beob. = 0·000009183 „

Wie man sieht, stimmt der Mittelwerth der ersten Elektrode besser als der der zweiten, bei der die letzten Oscillationen aus einem unbekannten Grunde verlängert erschienen.

12. $C = 0·022$ Mikrofarad.

$L = 0·0002005$ Quadrant.

τ ber. = 0·000006598 Sec. τ beob. = 0·000006720 Sec.

13. $C = 0·033$ Mikrofarad.

$L = 0·0001298$ Quadrant.

τ ber. = 0·000006502 Sec. τ beob. = 0·000006421 Sec.

14. $C = 0·014$ Mikrofarad.

$L = 0·0002787$ Quadrant.

τ ber. = 0·000006206 Sec. τ beob. = 0·000006272 Sec.

15. $C = 0·012$ Mikrofarad.

$L = 0·0002787$ Quadrant.

τ ber. = 0·000005745 Sec. τ beob. = 0·000005675 Sec.

16. Wie 15.

τ ber. = 0·000005745 Sec. τ beob. = 0 000005675 Sec.

17. C = 0·067 Mikrofarad.

L = 0·00004327 Quadrant.

τ ber. = 0·000005349 Sec. τ beob. = 0·000005301 Sec.

18. C = 0·010 Mikrofarad.

L = 0·0002787 Quadrant.

τ ber. = 0·000005245 Sec. τ beob. = 0·000005227 Sec.

Diese 18 Gegenüberstellungen zeigen also, dass die berechneten Werthe, erhalten aus den Werthen der Capacität und Selbstinduction, in guter Übereinstimmung mit den aus den Dimensionen des Bildes bestimmten Werthen sind. Die Formel

$$\tau = \pi \sqrt{CL}$$

hat also strenge Giltigkeit für dünne Drähte.

Ich habe noch zum Schlusse zweier Aufnahmen zu gedenken, die, wie schon erwähnt, auffallende Unregelmässigkeiten zeigten. Es waren bei der ersten dieser Aufnahmen A 2 kleine Flaschen = 0·004 Mikrofarad und 39 Spiralen = 0·0002787 Quadrant in Verwendung. Es war also

$$\tau \text{ ber.} = 0{\cdot}000003317 \text{ Sec.}$$

Auf der Photographie war die mittlere Länge einer Oscillation 0·70 *mm*, was sehr auffallend ist, denn es ist dieselbe Länge wie bei Aufnahme 18. Die Funkenstrecke 10 *mm*.

$$\tau \text{ beob.} = 0{\cdot}000005227 \text{ Sec.},$$

also eine sehr bedeutende Differenz gegenüber dem berechneten Werthe. Ich machte an der photographischen Platte A die Beobachtung, dass die wenigen, an einer Elektrode deutlich sichtbaren Oscillationen als scharf abgegrenzte Linien, eher Punkte, erschienen, die aber durch ebenso grosse Zwischenräume getrennt erschienen. Nun mass ich bloss die Länge jedes einzelnen schwarzen Striches allein, was 0·46 *mm* und

$$\tau \text{ beob.} = 0{\cdot}000003434$$

ergab, ein Werth, der ziemlich gut mit dem berechneten stimmt. Bei einer zweiten Aufnahme *B* mit 6 grossen Flaschen $= 0\cdot067$ Mikrofarad und 2 Spiralen $= 0\cdot00001082$ Quadrant war

$$\tau \text{ ber.} = 0\cdot000002675 \text{ Sec.};$$

die Aufnahme ergab als Länge einer Oscillation 0 47 *mm*. Funkenstrecke 10·5 *mm*.

$$\tau \text{ beob.} = 0\ 000003509 \text{ Sec.},$$

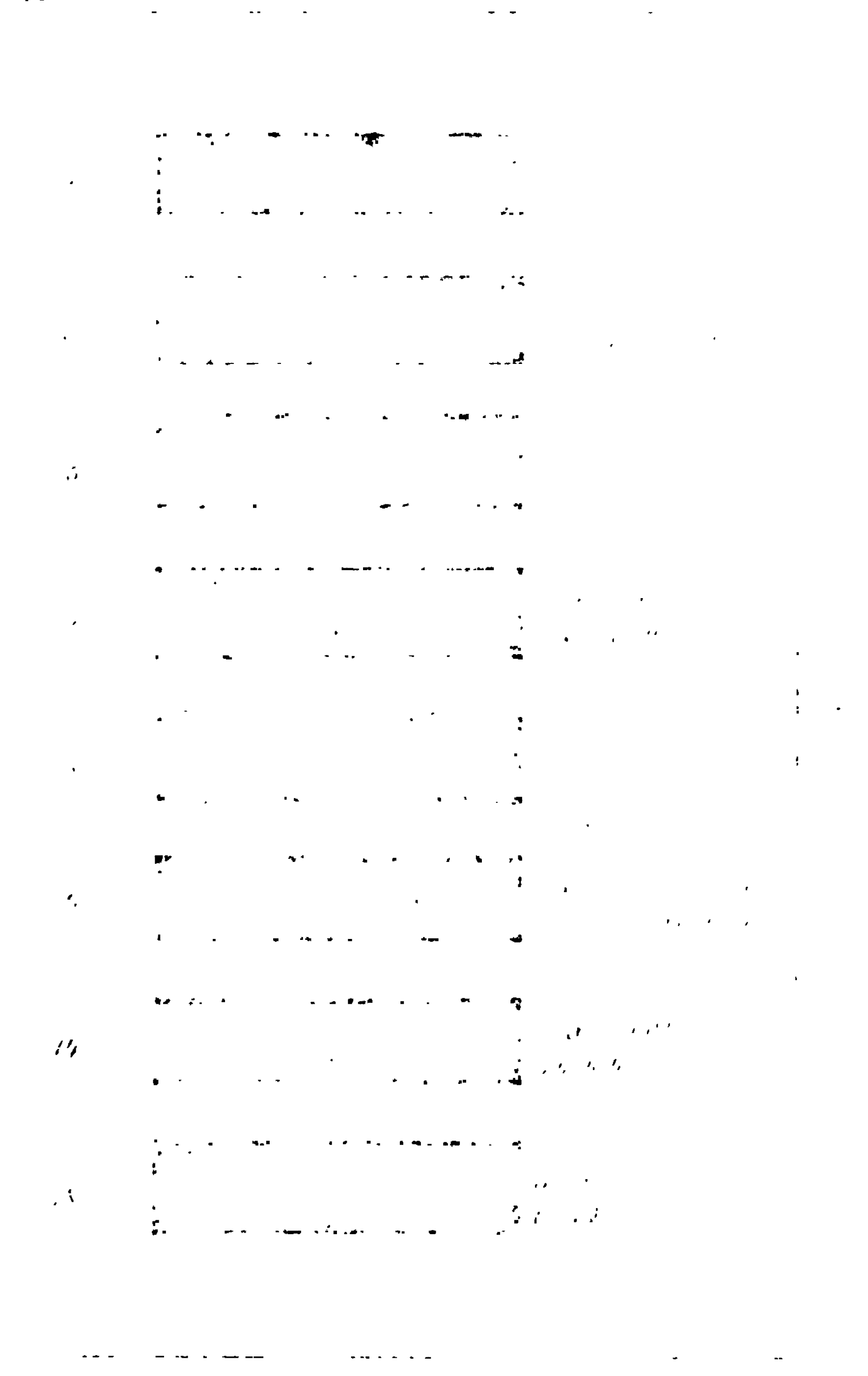
was wieder erheblich vom berechneten Werthe abweicht. Nimmt man jedoch wieder bloss die Länge einer Oscillation allein, vom Anfange bis zum Ende des schwarzen Striches, so erhält man 0·36 *mm* und

$$\tau \text{ beob.} = 0\cdot000002688 \text{ Sec.}$$

in guter Übereinstimmung mit der berechneten Oscillationsdauer. Man müsste also hier bei diesen hohen Schwingungen die Schwingungsdauer nicht als die Zeit vom Beginne des periodischen Aufleuchtens der Elektrode bis zum Wiederbeginne des folgenden Aufleuchtens, sondern bloss als Zeit vom Beginne bis zum Ende des Aufleuchtens der Elektrode auffassen, um mit den berechneten übereinstimmende Resultate zu erhalten.

Bei langsamer Oscillationsdauer scheinen diese Zwischenräume, wo die Elektrode nicht leuchtet, nicht in Betracht zu kommen Eine sichere Folgerung lässt sich jedoch nicht aus diesen zwei Aufnahmen ziehen.

An dieser Stelle ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Privatdocenten Dr. J. Moser auf's Herzlichste zu danken für die vielen Erfahrungen, die ich während vier Jahren unter seiner Leitung und an seiner Seite im physikalisch-chemischen Laboratorium gemacht habe.



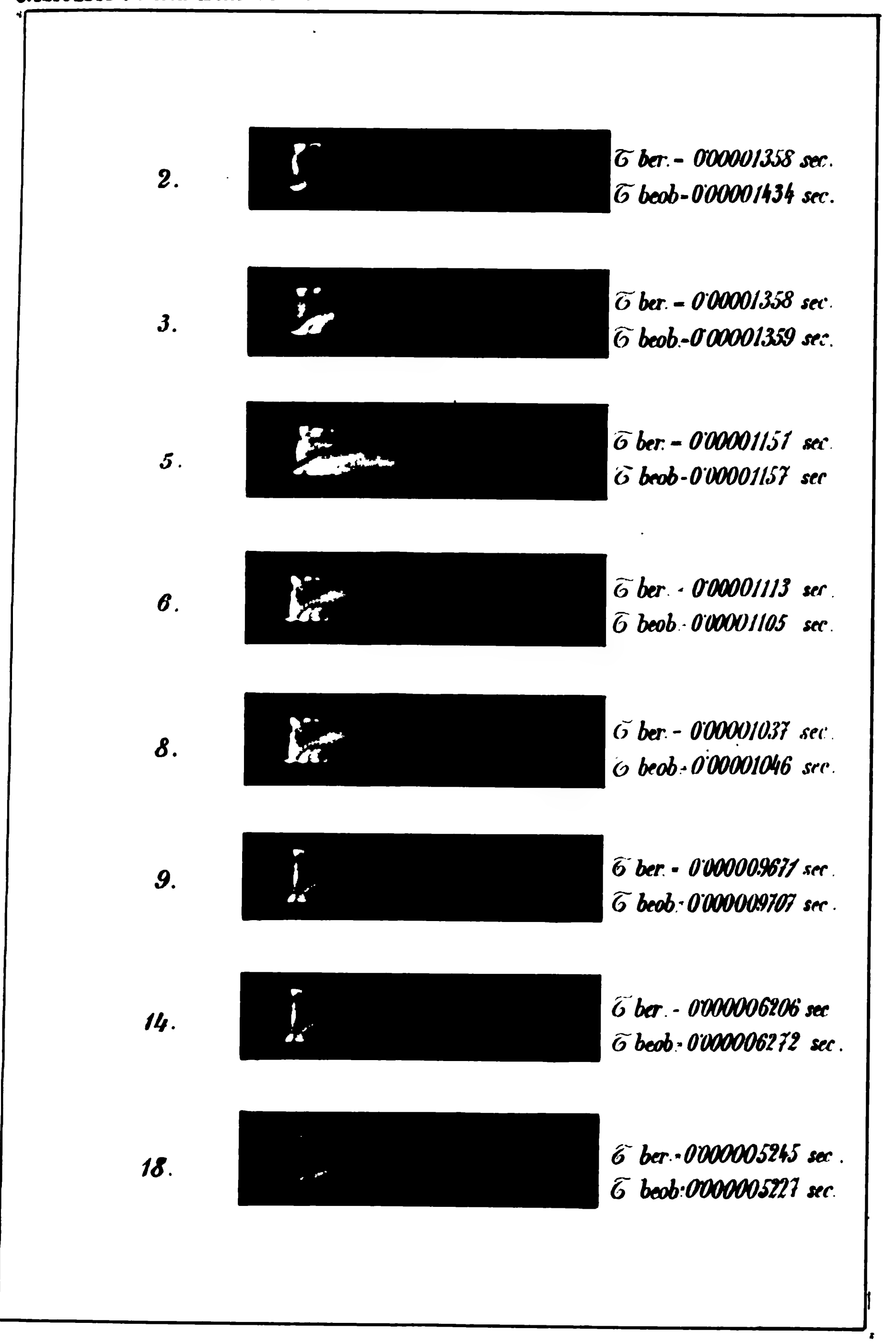


Photo. Lith. v. J. Barth, Fünfhaus Wien.

XVII. SITZUNG VOM 10. JULI 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft I—III (Jänner bis März 1890) des 99. Bandes, Abtheilung I der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Rich. Maly in Prag übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Einfache Umwandlung von Thioharnstoff in Harnstoff".

Von Dr. Gejza Bukowski ist ein dritter Reisebericht aus Kleinasien, ddo. Smyrna, am 27. Juni 1890 eingelangt.

Herr Prof. Dr. J. Gerstendörfer am k. k. Obergymnasium in Mies (Böhmen) übersendet eine Abhandlung unter dem Titel „Die Mineralien von Mies".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit von Alfons Spitzer: „Über Tetramethylphloroglucin".

Das w. M. Herr Prof. C. Toldt überreicht eine Abhandlung von Prof. Dr. M. Holl in Graz „Über die Reifung der Eizelle des Huhns".

Das c. M. Herr Prof. Franz Exner überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Beobachtungen über atmosphärische Elektricität in den Tropen." (II.)

Herr Prof. Dr. Karl Exner in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über die polarisirende Wirkung der Lichtbeugung". (I. Mittheilung.)

Herr Dr. Gottlieb Adler, Privatdocent an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine vorläufige Mittheilung: „Über die Energie magnetisch polarisirter Körper von veränderlicher Magnetisirungszahl“.

Herr Dr. S. Zeisel überreicht folgende zwei Abhandlungen: 1. „Neue Beobachtungen über Bindungswechsel bei Phenolen“, von J. Herzig und S. Zeisel. (V. Mittheilung.) „Die Äthylirung des Resorcins.“ 2. „Neue Beobachtungen über Bindungswechsel bei Phenolen“, von J. Herzig und S. Zeisel. (VI. Mittheilung). „Die Äthylirung des sym. m. Orcins.“

Herr Dr. Josef Schaffer, Privatdocent und Assistent am histologischen Institute der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über Roux'sche Canäle in menschlichen Zähnen.“

Beobachtungen über atmosphärische Elektricität in den Tropen, II.

von

Prof. **Franz Exner**,
c. M. k. Akad.

(Mit 4 Textfiguren.)

Die Mittheilungen welche ich über die Ergebnisse meiner Reise in den Tropen im ersten Theile[1] dieser Arbeit gegeben habe, bezogen sich lediglich auf die directen Beobachtungsresultate; im vorliegenden zweiten Theile sollen letztere einer eingehenden Discussion unterzogen und mit den Consequenzen der Theorie verglichen werden, die ich in früheren Publicationen über diesen Gegenstand ausführlich dargelegt und insoweit auch verificirt habe, als es das damals vorgelegene Beobachtungsmateriale gestattete.

Es handelte sich bei der vorliegenden Untersuchung wieder in erster Linie um die Gesetze der „normalen Luftelektricität", d. h. der Luftelektricität wie sie bei normalem schönem Wetter auftritt. Die zu bestimmende Grösse ist dabei das Potentialgefälle in der Luft in Richtung des Erdradius.

Dass diese Grösse, respective ihre Variation im Laufe der Jahreszeiten an ein und demselben Orte, oder beim Fortschreiten von einem Punkte der Erdoberfläche zum anderen, in erster Linie durch den Wassergehalt der Atmosphäre bedingt sei, habe ich durch zahlreiche vorangegangene Messungen zum mindesten

---

[1] Beob. über atm. Elektr. in den Tropen, I. Diese Berichte, Bd. 98, Juli 1889.

höchst wahrscheinlich gemacht. Es hat sich dabei auf theoretischem Wege eine gewisse Abhängigkeit des Potentialgefälles vom jeweiligen Wassergehalte der Luft ergeben, die durch das vorhandene Beobachtungsmateriale, soweit eben ein solches vorlag, bestätigt wurde.

Nun sind aber die normalen Variationen des Wassergehaltes in unseren Breiten innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen — etwa zwischen 2 *mm* und 15 *mm* Dunstdruck — so dass bisher die Curve, welche die fragliche Abhängigkeit darstellt, auch nur innerhalb dieses Intervalles verfolgt werden konnte.

Es sind aber, wie ich auch schon in früheren Arbeiten gezeigt habe, gerade die extremen Partien dieser Curve, welche ein ganz besonderes Interesse beanspruchen, und zwar nicht nur desshalb, weil dadurch die Vergleichung von Theorie und Erfahrung am schärfsten wird, sondern auch, weil sich aus ihnen die elektrischen Constanten der Erde, ihre Ladung und Potential, am sichersten bestimmen lassen. Was den letzteren Punkt anlangt, so muss der Umstand noch besonders betont werden, dass die Grösse der elektrischen Ladung der Erde, wie sie aus den Messungen des normalen Potentialgefälles abgeleitet wird, von einer jeden Theorie der Luftelektricität unabhängig ist; sie stellt sich als directes Beobachtungsresultat dar.

Die vorstehenden Gründe liessen es wünschenswerth erscheinen, den Verlauf der Curve wenigstens nach einer Richtung hin möglichst weit zu verfolgen; die von mir gewählten Punkte in den Tropen (Ceylon) gestatten bei den höchsten auf der Erde während schönen Wetters vorkommenden Dunstdrucken — bis zu 24 *mm* — zu beobachten. Es war somit möglich, wenigstens nach dieser Richtung hin die Aufgabe vollständig zu lösen.

Wenn auch die Untersuchung hauptsächlich auf die Ermittlung des Zusammenhanges von Potentialgefälle und Wassergehalt, also auf die Abhängigkeit des ersteren von der absoluten Feuchtigkeit, gerichtet war, so gestattet doch das reichhaltige Beobachtungsmateriale auch die Lösung einer Reihe anderer, für die Theorie der Luftelektricität äusserst wichtiger Fragen. So ergibt sich z. B. von Neuem, dass der von mancher Seite namentlich in früherer Zeit vermuthete Zusammenhang zwischen Potentialgefälle und relativer Feuchtigkeit nicht besteht, jedenfalls nicht

in der Weise einer directen Abhängigkeit dieser beiden Grössen von einander.

Auch in Bezug auf die tägliche Periode der Luftelektricität, einer bisher noch ganz unaufgeklärten Erscheinung, bietet das vorliegende Beobachtungsmateriale einigen Aufschluss. Es zeigt sich neuerdings die von mir schon vor längerer Zeit ausgesprochene Vermuthung bestätigt, dass die tägliche Variation eine jedenfalls ganz locale und mit den localen Verhältnissen sich ändernde Erscheinung ist, die an manchen Orten ausserordentlich scharf ausgeprägt, an anderen hingegen gar nicht auftritt.

Hält man an der Richtigkeit der Hypothese fest, dass die Grösse des normalen Potentialgefälles in erster Linie durch die Menge des in der Luft enthaltenen Wasserdampfes bedingt sei, so fordert die Theorie eine bedeutende Zunahme des Potentialgefälles in grösseren Höhen über dem Erdboden. Eine Möglichkeit nach dieser Richtung hin Versuche anzustellen, ergibt sich — da Messungen im Luftballon wohl nur ausnahmsweise gemacht werden können — durch Benützung eines Hochplateau. Ich habe auch diesen Umstand auf meiner Reise im Auge behalten und sowohl in Ägypten als in Ceylon derartige Messungen ausgeführt. Dieselben sind wohl viel zu wenige, um in quantitativer Hinsicht brauchbare Resultate zu liefern; immerhin ergeben sie aber wenigstens eine qualitative Übereinstimmung zwischen Theorie und Beobachtung.

Dass dem Wassergehalte der Luft in Bezug auf die Grösse der atmosphärischen Elektricität eine wesentliche Rolle zukommt, wird wohl kaum mehr bezweifelt werden; es fragt sich aber, ob nicht noch andere Träger elektrischer Massen in der Atmosphäre vorkommen. Man hat da zunächst an den Staub zu denken, dem unzweifelhaft ein gewisser störender Einfluss zukommt, wie ja schon längst bekannt ist, von dem es aber zweifelhaft ist, ob er bei der Erscheinung der Luftelektricität eine wesentliche Rolle spielt; ich war bemüht diese Frage durch Messungen auf hoher See zu lösen, und zwar im Indischen Ocean, also jedenfalls so weit von jedem Lande entfernt, dass man von einem Vorhandensein von Staub in gewöhnlichem Sinne in der Luft wohl nicht mehr reden kann. Die vollkommene Übereinstimmung der Messungen auf hoher See mit jenen vom Lande scheint ent-

schieden gegen einen wesentlichen Einfluss des Staubes auf das fragliche Phänomen zu sprechen.

In jüngster Zeit hat man auch der Intensität der Sonnenstrahlung einen Einfluss auf die Grösse der Luftelektricität zugeschrieben; obwohl ich nicht Gelegenheit hatte, speciell nach dieser Richtung hin Messungen anzustellen, so wird sich doch aus dem gesammten Beobachtungsmateriale ergeben, dass — wenigstens in Bezug auf meine Messungen in den Tropen — sich ein derartiger Einfluss nicht constatiren lässt.

Ich gehe nun an die detaillirte Besprechung der im ersten Theile dieser Abhandlung mitgetheilten Beobachtungen; da im Folgenden, wenn nichts Besonderes bemerkt ist, nur die normalen Messungen in Betracht kommen, d. h. solche, welche bei vollkommen normalem Wetter ausgeführt wurden, so finden sich von dem gesammten Beobachtungsmateriale auch nur jene berücksichtigt, bei welchen unter der Rubrik „Anmerkung" (im I. Theile) sich keine Notiz findet. Es ist dies aber die überwiegende Mehrheit, von welcher allein auf die Tropen 305 Messungen entfallen.

§. 1.

Der zu lösenden Hauptfrage entsprechend untersuchen wir zunächst den Einfluss der absoluten Feuchtigkeit, also der Quantität des in der Luft enthaltenen Wassers, auf die Grösse des Potentialgefälles. Zu diesem Zwecke theilen wir die Beobachtungen nach Dunstdruckgruppen ein, wie dies auch früher in Bezug auf die Messungen in unseren Breiten geschehen ist.

Die Beobachtungen in den Tropen (Bombay und Mount Lavinia auf Ceylon) umfassen ein Dunstdruckgebiet von 11 bis 24 *mm*, doch ist dabei zu bemerken, dass Drücke unterhalb 16 *mm* nur in Bombay und auch da nur bei ausnahmsweiser Trockenheit beobachtet wurden. Es sind daher auch in der folgenden Tabelle I alle Drücke unterhalb dieser Grenze in eine Gruppe zusammengezogen. Unter p finden sich die Dunstdrücke, unter $\frac{dV}{dn}$ die Potentialgefälle in Volts pro Meter angegeben; n bedeutet die Anzahl der Einzelbeobachtungen in jeder Gruppe.

Tabelle I.

Dunstdruckgruppen aller normalen Beobachtungen in den Tropen (Bombay und Ceylon).

p	$\frac{dV}{dn}$
I. $n = 16$, $p = 11$—$15 \cdot 9$ mm	
14·2	80
12·6	112
11·6	97
12·2	76
12·2	76
11·3	61
11·0	65
14·4	76
15·2	76
14·3	89
14·3	61
15·3	65
14·6	70
13·3	59
13·7	53
13·5	51
13·5	**73**

p	$\frac{dV}{dn}$
II. $n = 11$, $p = 16 \cdot 0$—$16 \cdot 9$ mm	
16·7	64
16·7	65
16·9	85
16·5	70
16·5	70
16·8	89
16·8	65
16·1	76
16·9	51
16·5	51
16·6	66
16·6	**68**

p	$\frac{dV}{dn}$
III. $n = 22$, $p = 17 \cdot 0$—$17 \cdot 9$ mm	
17·6	76
17·7	65
17·4	51
17·1	56
17·6	51
17·4	51
17·0	51
17·1	71
17·8	81
17·9	43
17·2	66
17·7	44
17·7	72
17·7	82
17·9	75
17·7	42
17·8	47
17·8	57
17·8	57
17·8	57
17·8	57
17·8	57
17·6	**60**

p	$\frac{dV}{dn}$
IV. $n = 27$, $p = 18 \cdot 0$—$18 \cdot 9$ mm	
18·5	65
18·8	47
18·3	50
18·3	57
18·8	60
18·0	80
18·2	80
18·9	78
18·2	51
18·6	78
18·4	71
18·5	51
18·0	50
18·5	58
18·4	58
13·4	53
18·8	61
18·3	72
18·3	68
18·7	76
18·7	76
18·0	53
18·0	45
18·4	47
18·4	61
18·2	64
18·7	66
18·4	**62**

p	$\frac{dV}{dn}$	p	$\frac{dV}{dn}$	p	$\frac{dV}{dn}$
V. $n = 56$		19·8	58	20·9	71
$p = 19·0—19·9$ *mm*		19·5	64	20·9	56
		19·5	68	20·8	71
19·9	54	19·6	70	20·8	56
19·1	47	19·7	66	20·9	56
19·1	42	19·5	58	20·7	51
19·2	47	19·3	82	20·7	51
19·0	50	19·3	64	20·6	56
19·9	65	19·2	76	20·9	60
19·9	65	19·3	61	20·2	47
19·9	65	19·6	68	20·8	52
19·9	65	19·6	53	20·8	68
19·3	57	19·5	53	20·9	53
19·3	54	19·2	50	20·9	58
19·3	57	19·6	58	20·9	64
19·3	54	19·8	50	20·4	47
19·2	50	19·8	42	20·1	58
19·2	54	19·4	66	20·4	61
19·5	54	19·9	64	20·6	66
19·5	50	**19·5**	**60**	20·3	61
19·5	47	VI. $n = 60$		20·6	72
19 5	47	$p = 20·0—20·9$ *mm*		20·6	76
19·5	54			20·7	68
19·3	42			20·6	68
19·8	78	20·8	65	20 5	72
19·2	93	20·4	57	20·0	42
19·7	51	20·8	57	20·2	68
19·0	80	20·8	57	20·0	64
19·1	91	20·8	57	20·1	50
19·8	59	20·0	65	20·3	50
19·4	58	20·3	47	20·8	50
19·8	41	20·3	47	20·8	50
19·4	64	20·3	47	20·6	50
19·4	64	20·1	50	20·4	58
19·9	61	20·1	54	20·6	61
19·2	68	20·1	50	20·8	45
19·7	72	20·8	47	20·9	42
19·1	76	20·8	47	20·7	45
19·3	68	20·1	42	20·7	42
19·7	53	20·0	63	20·1	53

p	$\frac{dV}{dn}$
20·5	53
20·8	58
20·7	47
20·9	42
20·5	**56**
VII. $n = 72$ $p = 21·0—21·9$ *mm*	
21·6	42
21·6	42
21·6	47
21·6	42
21·4	50
21·4	42
21·1	47
21·1	42
21·1	42
21·1	42
21·0	63
21·1	53
21·2	71
21·7	68
21·8	60
21·2	64
21·2	64
21·2	58
21·2	58
21·4	64
21·4	61
21·3	72
21·7	61
21·7	64
21·5	64
21·5	64
21·0	64
21·8	64
21·5	53
21·5	55
21·5	55
21·8	66
21·5	64
21·9	69
21·9	64
21·9	66
21·2	64
21·9	61
21·9	58
21·8	53
21·0	58
21·0	53
21·3	72
21·2	42
21·9	53
21·8	53
21·2	45
21·0	47
21·5	47
21·5	45
21·3	37
21·3	37
21·5	42
21·7	42
21·6	53
21·4	68
21·5	58
21·5	53
21·3	58
21·3	61
21·4	45
21·1	47
21·2	53
21·0	53
21·1	53
21·1	58
21·1	58
21·5	61
21·5	64
21·2	72
21·0	64
21·0	58
21·4	**56**
VIII. $n = 29$ $p = 22·0—22·9$ *mm*	
22·0	71
22·4	58
22·0	64
22·2	66
22·0	68
22·0	66
22·6	64
22·4	55
22·1	68
22·2	47
22·2	47
22·7	53
22·7	47
22·7	55
22·7	45
22·7	47
22·0	42
22·0	42
22·2	37
22·1	58
22·0	66
22·3	47
22·7	42
22·7	45
22·2	42
22·3	58
22·2	42
22·7	42
22·9	42
22·8	**53**

p	$\frac{dV}{dn}$
IX. $n = 12$ $p > 23 \cdot 0$	
23·0	55
23·5	64
24·0	50
23·8	58
23·8	55
23·8	55
23·8	50
23·0	53
23·2	42
23·4	42
24·0	39
23·5	42
23·5	**50**

Es sei hier nochmals darauf aufmerksam gemacht, dass das Vorzeichen aller Messungen in den Tropen ausnahmslos das positive war, also dasselbe wie in unseren Gegenden.

Durchblickt man die Zahlen der vorstehenden Tabelle, so findet man im Allgemeinen innerhalb der einzelnen Gruppen geringere Differenzen der Einzelwerthe wie bei uns, was wohl mit der grösseren Constanz des Witterungscharakters in den Tropen zusammenhängen mag.

Ein Einfluss der absoluten Feuchtigkeit auf die Grösse des Potentialgefälles ist unverkennbar und tritt deutlich hervor, wenn man die Mittelwerthe der einzelnen Gruppen in eine Tabelle vereinigt, wie dies in der folgenden Tabelle II geschehen.

Tabelle II.

Mittelwerthe für die einzelnen Dunstdruckgruppen.

Gruppe	p	$\frac{dV}{dn}$	Gruppe	p	$\frac{dV}{dn}$
I	13·5	73	VI	20·5	56
II	16·6	68	VII	21·4	56
III	17·6	60	VIII	22·3	53
IV	18·4	62	IX	23·5	50
V	19·5	60			

Man ersieht aus vorstehender Tabelle eine deutliche Abnahme des Potentialgefälles mit steigendem Wassergehalte der Luft; es ist dies derselbe Einfluss, wie er sich in unseren Gegenden äussert. Der absolute Betrag der Änderung ist trotz der bedeutenden Steigerung des Dunstdruckes relativ gering, was jedoch natürlich erscheint, wenn man die Art der Abhängigkeit beider Grössen von einander bedenkt. In meiner Abhandlung „Über die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft"[1] habe ich die Curve gezeichnet die man erhält, wenn man als Abscissen die Dunstdrucke und als Ordinaten die Potentialgefälle aufträgt; diese Curve nähert sich mit wachsendem Dunstdrucke asymptotisch der Abscissenaxe, es war daher zu erwarten, dass bei hohen Drucken sich nur mehr geringe Änderungen des Potentialgefälles ergeben werden, wie dies eben die Erfahrung bestätigt hat.

Die Gleichung obiger Curve habe ich seinerzeit abgeleitet, sie lautet:

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{A}{1+k.p_0}.$$

Hier bedeutet p_0 den Dunstdruck an der Erdoberfläche, k eine nicht näher definirte Constante und A jenes Potentialgefälle, das an der Erdoberfläche herrschen würde, wenn sich kein Theil der elektrischen Ladung der Erde in der Luft, sondern Alles auf der Oberfläche selbst befinden würde. Diese Constante ist es, um deren Ermittlung aus den Beobachtungen es sich in erster Linie handelt, denn sie lehrt uns die Gesammtladung der Erde und deren Potential kennen.

Zur genauen Kenntniss von A sind natürlich möglichst zahlreiche Beobachtungen des normalen Potentialgefälles in einem möglichst grossen Dunstdruckintervall erforderlich. Das gegenwärtig vorliegende Beobachtungsmateriale ist nun schon ein so bedeutendes, dass man mit einiger Beruhigung an die Bestimmung von A gehen kann; es umfasst mit 1123 Messungen einen Zeitraum von fünf Jahren (1885 — 1890) und ein Dunstdruckintervall von 1·7—23·5 *mm* in den Gruppenmitteln, also alle Feuchtigkeiten, die — mit Ausschluss der allerniedersten in

[1] Diese Berichte, Bd. 96, S. 419 (1887).

gewissen nordischen Gegenden, von denen leider noch Beobachtungen ausstehen — bei normalem Wetter auf der Erde vorkommen.[1]

Diese 1123 Messungen wurden zum Theile von mir selbst in Wien (1885, 1886), St. Gilgen (1885, 1886, 1887), Bombay (1888) und Ceylon (1889), zum Theile von den Herren Elster und Geitel in Wolfenbüttel[2] (1887—1890) ausgeführt.

Dabei muss ich bemerken, dass die letzten, den Zeitraum vom October 1889 bis Mai 1890 umfassenden Messungen der Herren Elster und Geitel bisher noch nicht publicirt, mir jedoch in bereitwilligster Weise zur Verfügung gestellt wurden, wofür ich den beiden Herren auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank ausspreche. Ich habe diese Messungen bei den später folgenden Mittelwerthen mit in Rechnung gezogen und dabei von den auf diese Zeit entfallenden 37 Beobachtungstagen nur zwei ausgeschlossen, den 28./II. und 30./III. 1890, an welchen, wie sich aus den beigefügten meteorologischen Notizen ergibt, kein normales Wetter geherrscht hat.

Bevor ich an die Auswerthung des nun vorliegenden Beobachtungsmateriales gehe, muss ich noch einer kleinen Correctur

---

[1] Ich möchte hier nochmals an alle Meteorologen und Physiker, die in die Lage kommen Messungen über Luftelektricität anzustellen, die dringende Bitte richten, sich nicht mit Beobachtungen an einem willkürlich gelegenen Orte zu begnügen, z. B. dadurch, dass sie den Wassercollector vor dem Fenster eines Hauses aufstellen, sondern die Angaben dieses Ortes durch einmaligen Vergleich auf die freie Ebene zu reduciren; nur dadurch werden absolute und für verschiedene Orte unter einander vergleichbare Resultate gewonnen, da sonst die Grösse der Werthe in erster Linie von der Art der Aufstellung des Collectors abhängt. Es liegt in diesem Umstande der Grund, dass fast alle älteren Messungen für den vorliegenden Zweck absolut unbrauchbar sind, darunter auch solche, die ohne diesen bedauerlichen Umstand sehr werthvoll wären. So z. B. die Messungen der schwedischen Polarstation auf Spitzbergen (1882—1883); es sind dies die ersten in hohen Breiten exact ausgeführten Messungen über Luftelektricität, aber leider fehlt wieder die Reduction auf die Ebene und damit bleibt der absolute Werth des beobachteten Potentialgefälles unbekannt.

[2] Elster und Geitel, Messungen des normalen Potentialgefälles der atmosphärischen Elektricität in absolutem Maasse. Diese Berichte, Bd. 98 (1889).

erwähnen, die an meinen Messungen aus St. Gilgen [1] anzubringen ist. Es hat sich gezeigt, dass die in den Tropen gewonnenen Werthe sich sehr gut in die aus den Wiener und Wolfenbüttler Beobachtungen abgeleitete Curve einordnen, dass dagegen die Werthe aus St. Gilgen sämmtlich etwas zu tief waren. Durch diesen Umstand wurde ich auf ein Versehen aufmerksam gemacht, das mir bisher entgangen war: ich hatte bei Berechnung des Dunstdruckes aus den Angaben des Psychrometers die Tabellen der directen Ablesungen benützt, anstatt der corrigirten, ein Versehen, das die Dunstdrucke merklich zu klein erscheinen liess, da die Thermometer des Apparates Réaumurtheilung hatten. Die beobachteten Werthe des Potentialgefälles entsprachen also in Wirklichkeit höheren Dunstdrucken und erschienen desshalb zu klein; durch die Correctur richtiggestellt ordnen sie sich vollkommen in die übrigen Messungen ein. Da im Folgenden zur Ermittlung der Constante *A* auch diese Beobachtungen benützt werden, so lasse ich die corrigirten Werthe in der beistehenden Tabelle III folgen; unter a. F. und r. F. sind die absolute und relative Feuchtigkeit angegeben.

Tabelle III.

[St. Gilgen 1885—1887.]

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1885, VIII, 11	10 *a.*	23·5	64	15·2	71
11	11	23·6	64	15·2	70
11	12	25·5	60	15·7	65
11	8 *p.*	20·8	76	11·8	65
IX, 4	11 *a.*	20·5	76	13·1	73
6	8 *a.*	11·6	110	8·9	88
6	10	14·3	74	16·4	86
6	12	19·0	72	11·7	72
6	3 *p.*	20·9	93	10·5	57
1886, VII, 20	7 *a.*	23·1	74	14·3	68
21	12	30·0	60	16·8	53

[1] Diese Berichte, Bd. 97 (1888).

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1886, VII, 21	4 *p.*	29·3	74	16·1	53
21	6	26·2	55	15·7	62
22	11 *a.*	29·3	64	17·2	57
22	4 *p.*	28·8	72	15·3	52
26	11 *a.*	30·0	58	16·8	53
26	3	31·2	89	12·6	37
26	4	30·0	100	12·4	39
27	8 *a.*	22·5	69	13·9	69
29	10 *a.*	18·1	90	9·8	63
29	6 *p.*	15·6	117	9·7	74
29	8	12·5	138	9·1	86
30	10 *a.*	19·3	100	11·8	71
30	3 *p.*	23·8	92	13·1	60
30	5	23·1	92	13·5	64
VIII, 2	4 *p.*	20·0	71	12·4	72
8	3 *p.*	24·3	87	13·6	60
9	11 *a.*	26·2	87	14·6	58
9	1 *p.*	26·2	80	14·6	58
10	4 *p.*	27·5	67	19·6	72
10	8	20·0	67	14·0	80
12	4 *p.*	16·2	100	10·3	75
13	11 *a.*	18·8	113	10·7	66
13	1 *p.*	21·2	106	10·7	57
13	3	20·7	117	12·9	72
13	5	20·0	117	13·4	77
27	4 *p.*	20·0	63	15·4	89
28	10 *a.*	20·0	85	15·4	89
28	1 *p.*	23·1	80	14·3	68
30	10 *a.*	21·9	117	15·1	77
30	4 *p.*	25·6	130	18·4	75
IX, 2	10 *a.*	24·3	95	15·8	70
2	12	28·1	87	15·7	56
3	10 *a.*	23·1	95	15·5	74
3	5 *p.*	25·0	128	14·7	62
7	10 *a.*	20·6	95	15·0	83
7	4 *p.*	24·3	95	13·6	60
8	1 *p.*	26·9	74	14·2	54
10	9 *a.*	20·6	80	12·4	65
10	1 *p.*	25·6	77	12·3	53

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1886, IX, 12	9 *a.*	19·3	74	13·3	80
12	1 *p.*	25·6	69	15·0	62
13	12	25·0	69	14·3	61
13	5 *p.*	21·2	95	13·6	73
14	4 *p.*	23·8	87	12·0	55
15	10 *a.*	21·9	87	12·2	63
15	1 *p.*	26·2	79	14·6	58
17	12	15·7	117	8·1	61
17	1 *p.*	16·9	127	9·8	69
17	5	15·7	130	9·6	73
18	10 *a.*	16·2	79	10·3	75
18	3 *p.*	20·6	127	11·0	61
18	5	15·7	127	9·6	73
19	10 *a.*	15·0	117	11·0	87
19	1 *p.*	20·0	108	11·4	66
26	1 *p.*	13·8	122	6·9	59
26	4	12·5	127	7·6	71
27	1 *p.*	16·2	122	7·8	57
27	4	13·8	95	8·3	71
28	11 *a.*	17·5	95	9·5	64
30	11 *a.*	17·5	85	12·2	82
X, 1	10 *a.*	13·8	100	10·4	90
1	2 *p.*	23·1	95	12·4	59
1	4	18·1	97	11·8	76
2	9 *a.*	15·0	108	11·0	87
2	2 *p.*	22·8	97	13·1	60
1887, VII, 19	9 1/2 *a.*	21·7	88	16·0	83
19	4 3/4 *p.*	27·8	88	17·0	61
19	6 1/2	24·8	88	15·6	68
19	7 1/2	23·5	99	14·9	70
20	8 1/2 *a.*	21·2	56	16·3	87
20	11	24·0	81	17·5	79
20	1 *p.*	26·9	85	18·1	69
22	12	25·5	100	18·4	76
24	1 *p.*	23·1	98	14·1	68
24	4	23·2	82	14·0	66
24	6	22·3	100	13·6	69
24	8	18·1	127	12·2	79
24	11	15·5	116	11·7	89

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1887, VII, 25	8 *a.*	18·8	99	12·1	75
25	11	20·2	53	14·0	80
25	1 *p.*	25·0	53	14·3	61
25	4	25·8	86	15·2	62
25	7	20·5	109	12·3	69
27	8½ *a.*	19·2	93	14·6	88
29	10 *a.*	21·5	80	16·5	87
29	12	26·9	76	18·1	69
29	2 *p.*	27·5	80	17·7	65
29	7	22·0	88	17·0	87
30	7 *a.*	18·5	64	15·0	95
30	10	22·5	69	15·8	78
30	12	25·8	74	17·3	70
30	1½ *p.*	27·8	64	15·7	57
30	11	18·3	80	13·3	85
31	8 *a.*	19·2	70	15·9	96
31	9	20·5	79	14·1	79
31	12	25·0	50	16·0	68
31	2 *p.*	28·7	53	16·4	57
31	11	19·2	80	14·3	87
VIII, 1	8 *a.*	20·5	74	16·3	91
7	5½ *p.*	23·8	80	15·4	71
7	7	20·6	63	13·5	74
9	9 *a.*	24·0	63	13·3	60
9	8 *p.*	23·0	82	12·3	59
12	11 *a.*	19·3	76	11·8	71
12	3 *p.*	19·8	106	11·5	67
13	9 *a.*	18·0	77	12·6	82
13	10	19·0	80	13·2	81
13	8 *p.*	18·0	82	13·1	85
15	9 *a.*	20·5	80	13·8	77
15	11	19·2	93	13·4	81
15	4 *p.*	21·8	74	14·6	75
15	11½ *p.*	14·8	93	11·4	91
20	12	17·5	79	11·5	77
20	3 *p.*	20·0	82	12·3	71
20	4½	17·5	88	11·5	77
23	9½ *a.*	12·0	114	9·4	91
23	11	14·5	85	10·4	85

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1887, VIII, 23	2 *p.*	18·5	73	10·9	69
23	4	17·2	129	10·7	73
23	11	9·7	100	8·4	94
24	9½ *a.*	13·5	106	9·8	86
24	12	16·4	77	11·4	82
24	2 *p.*	18·8	88	10·4	64
24	4	18·2	108	10·7	69
24	7½	13·8	124	9·6	82
24	11	9·8	116	8·2	91
25	8½ *a.*	12·2	103	10·0	95
25	12	18·5	111	12·0	76
25	2 *p.*	20·0	93	12·4	72
25	3	19·8	108	12·4	72
25	5	19·0	99	12·9	79
25	7½	14·0	111	10·6	90
25	8	13·2	116	10·0	89
25	9	12·8	129	10 0	91
25	10	11·5	74	9·5	95
25	11	11·5	69	9·5	95
26	8½ *a.*	14·0	77	11·8	99
26	12	20·0	78	13·4	77
26	1 *p.*	20·2	74	14·3	82
26	2	24·0	74	14·9	67
27	9 *a.*	16·8	77	12·8	90
27	12	18·5	63	13·5	85
27	1½ *p.*	23.5	68	14·9	70
27	5½	21·8	77	14·6	75
27	8	17·5	93	12·0	81
27	12	14·8	63	11·1	89
28	7 *a.*	14·8	79	11·7	93
28	10	18·2	80	14·0	90
28	11	20·1	68	15·0	86
28	12	21·2	77	16·3	87
28	1 *p.*	23·5	68	16·1	75
28	4½	24·8	77	17·9	77
28	5½	24·0	84	17·5	79
28	7	22·0	77	17·0	87
28	8	20·0	74	15·5	90
28	9	19·2	76	14·9	90

Tag	Stunde	Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	a. F.	r. F.
1887, VIII, 28	11 1/2 *p.*	17·8	81	13·9	92
29	8 *a.*	19·2	84	14·8	89
30	4 3/4 *p.*	22·5	84	16·7	83
31	9 *a.*	18·8	93	14·7	91
31	12	22·8	88	17·4	84
31	3 1/2 *p.*	24·8	80	17·0	73
31	5	24·8	88	17·1	79
31	7	20·8	79	15·6	86
31	10	18·0	18	14·1	92
IX, 2	9 1/2 *a.*	19·2	63	14·9	90
2	11 1/4	21·8	63	15·5	80
2	2 *p.*	26·8	43	17 1	66
2	4 1/2	25·2	91	18·1	76
4	9 1/2 *a.*	19·9	79	15·1	88
4	10 1/2	21·7	74	16·0	83
7	8 1/2 *a.*	17·2	80	14·1	97
7	9 1/4	17·8	85	13·9	92
7	10	18·5	74	14·6	92
7	12	23·2	55	17·1	81
7	3 *p.*	26·2	96	18·5	73
7	5 1/2	23·6	77	17·2	80
11	8 1/2 *a.*	15·5	58	12·4	94
11	10 1/2	16·5	77	12·5	90
11	1 1/2 *p.*	19·2	84	10·8	65
16	12	17·2	53	12·2	84
16	3 1/4 *p.*	18·2	85	11·8	75
16	6 3/4	14·8	100	10·7	86
17	1 1/2 *p.*	20·0	89	12·4	72
17	5	17·2	85	12·5	86
17	6	16·0	80	12·1	89
18	10 *a.*	16·9	53	12·7	89
18	11	17·1	63	12·9	89
18	12	20·0	53	12·9	74
18	1 *p.*	21·6	68	13·5	71
18	3	21·5	106	13·5	71
18	3 1/2	20·2	80	14·0	80
18	4	19·8	84	13·9	81
18	4 1/2	18·0	72	12·9	84
18	5	17·2	74	12·7	87

Ordnet man die Werthe der vorstehenden Tabelle wieder nach Dunstdruckgruppen, die von 1 zu 1 *mm* vorschreiten, so ergeben sich die folgenden Mittelwerthe, wobei *n* die Anzahl der Einzelbeobachtungen in jeder Gruppe bedeutet.

Tabelle IV.

p_0	$\frac{dV}{dn}$	n
7·4	124	3
8·4	107	5
9·5	109	12
10·5	98	18
11·5	91	19
12·4	82	33
13·5	84	25
14·4	79	31
15·4	76	25
16·3	69	13
17·3	76	15
18·3	96	6
19·6	67	1

Die beiden letzten Werthe dieser Tabelle wurden bei Dunstdrucken gewonnen welche für St. Gilgen ganz abnorm hohe und ausnahmsweise sind, ich habe dieselben desshalb auch von der weiteren Berechnung ausgeschlossen; sie sind aber ein deutlicher Beleg dafür, dass man nur bei ganz constantem Wetter aus dem Dunstdrucke am Erdboden auf die ganze, in der Luft vorhandene Wassermenge einen Schluss ziehen kann, und in dieser Hinsicht wird noch Gelegenheit sein, auf dieselben zurückzukommen.

Es folgt nun eine Zusammenstellung der aus den einzelnen Dunstdruckgruppen zwischen $p_0 = 1·7$ und $p_0 = 23·5$ an den verschiedenen Beobachtungsorten gewonnenen Mittelwerthe; unter *n* ist wieder die Zahl der Einzelwerthe innerhalb jeder Gruppe angeführt.

Tabelle V.

Mittel der Dunstdruckgruppen von je 1 *mm* für die einzelnen Beobachtungsorte.

p_0	Wien 1885—1886		Wolfenbüttel 1887—1890		St. Gilgen 1885—1887		Indien 1888—1889	
	$\frac{dV}{dn}$	n	$\frac{dV}{dn}$	n	$\frac{dV}{dn}$	n	$\frac{dV}{dn}$	n
1·7	—	—	431	53	—	—	—	—
1·8	450	2	—	—	—	—	—	—
2·4	360	14	351	61	—	—	—	—
3·4	—	—	325	70	—	—	—	—
3·8	297	6	—	—	—	—	—	—
4·3	—	—	262	88	—	—	—	—
4·4	197	11	—	—	—	—	—	—
5·4	—	—	216	49	—	—	—	—
5·5	166	8	—	—	—	—	—	—
6·3	—	—	191	75	—	—	—	—
7·4	—	—	—	—	124	3	—	—
7·6	—	—	138	62	—	—	—	—
8·2	—	—	109	81	—	—	—	—
8·4	—	—	—	—	107	5	—	—
9·3	—	—	114	27	—	—	—	—
9·5	—	—	—	—	109	12	—	—
10·5	—	—	—	—	98	18	—	—
11·5	—	—	77	12	91	19	—	—
12·4	—	—	—	—	82	33	—	—
13·5	—	—	—	—	84	25	73	16
14·4	—	—	—	—	79	31	—	—
15·4	—	—	—	—	76	25	—	—
16·3	—	—	—	—	69	13	—	—
16·6	—	—	—	—	—	—	68	11
17·3	—	—	—	—	76	15	—	—
17·6	—	—	—	—	—	—	60	22
18·4	—	—	—	—	—	—	62	27
19·5	—	—	—	—	—	—	60	56
20·5	—	—	—	—	—	—	56	60
21·4	—	—	—	—	—	—	56	72
22·3	—	—	—	—	—	—	53	29
23·5	—	—	—	—	—	—	50	12

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass die Abnahme des Potentialgefälles mit steigendem Dunstdrucke unabhängig vom Beobachtungsorte gleichmässig auftritt, also keinesfalls an locale Bedingungen geknüpft ist; die für denselben Dunstdruck an verschiedenen Orten gefundenen Werthe stimmen ganz befriedigend überein, namentlich wenn man bedenkt, dass man es hier mit einer zahlreichen Störungen ausgesetzten meteorologischen Erscheinung zu thun hat, dass das vorliegende Beobachtungsmateriale immerhin noch ein kleines ist und dass die Messungen zu den verschiedensten Jahres- und Tageszeiten ausgeführt wurden.

Die geographische Lage der einzelnen Orte — auf continentaler Ebene, im Gebirge, am Ocean und im tropischen Indien — ist eine so verschiedene, dass die allgemeine Verbreitung der Erscheinung über die ganze Erdoberfläche nicht dem geringsten Zweifel mehr unterliegen kann.

Es muss darum auch ohneweiters gestattet sein, behufs Feststellung der fraglichen Beziehung zwischen Potentialgefälle und Dunstdruck die an den verschiedenen Beobachtungsorten gewonnenen Resultate untereinander so zu combiniren, dass man von allen zu einer Dunstdruckgruppe gehörigen Werthen das Mittel nimmt. Wir wollen dies im Nachfolgenden thun, doch vorerst noch den Einfluss der Temperatur auf die Resultate berücksichtigen.

Die Formel

$$\frac{dV}{dn} = \frac{A}{1+kp_0}$$

ist nur eine Näherungsformel, indem in ihr der Dunstdruck p_0 anstatt des in der Luft über der Flächeneinheit enthaltenen Wasserquantums gesetzt wurde; letzteres ist der Wassermenge q_0 in der Volumseinheit am Erdboden proportional, welches, in Grammen ausgedrückt, für eine Temperatur von $+16°$ dem p_0 in Millimetern gleich wird. Bisher hatten die Beobachtungen noch nicht einen solchen Grad der Genauigkeit, dass es nothwendig schien, diese Correctur anzubringen, umsomehr, als die meisten derselben bei einer mittleren Temperatur angestellt waren. Das gegenwärtig vorliegende Beobachtungsmateriale,

unter welchem sich viele Messungen bei sehr tiefen und viele bei sehr hohen Temperaturen befinden, macht es jedoch nothwendig, nun auch diesen Umstand zu berücksichtigen.

Die Quantität q_0 des Wassers in der Volumseinheit ist durch die bekannte Formel gegeben:

$$q_0 = p_0 \frac{1 \cdot 06}{1 + \alpha t}$$

und kann somit, da t und p_0 für die Beobachtungen bekannt ist, gefunden werden.

Ich habe für die einzelnen Beobachtungsorte und Dunstdruckgruppen die Mitteltemperaturen berechnet, wodurch sich die folgende Tabelle ergab, in welcher der Druck p_0 und die Temperaturen T zusammengestellt sind.

Tabelle VI.

Wolfenbüttel		St. Gilgen		Indien	
p_0	T	p_0	T	p_0	T
1—2 *mm*	—12° C.	9—10 *mm*	+14° C.	13—16 *mm*	+26° C.
2—3	— 6	10—11	+16	16—17	+26
3—4	— 2	11—12	+17	17—18	+25
4—5	+ 2	12—13	+19	18—19	+26
5—6	+ 7	13—14	+21	19—20	+25
6—7	+10	14—15	+22	20—21	+26
7—8	+15	15—16	+23	21—22	+26
8—9	+16	16—17	+24	22—23	+26
		17—18	+25	23—24	+27

Unter Berücksichtigung dieser, wie man sieht, ziemlich extremen Temperaturen erhält man schliesslich die Werthe q_0 der folgenden Haupttabelle, in welcher alle einer Dunstdruckgruppe angehörigen Messungen ohne Rücksicht auf den Beobachtungsort zu einem Mittelwerthe vereinigt sind; n bedeutet wieder die Zahl der Einzelmessungen.

Tabelle VII.

Haupttabelle.

T	p_0	q_0	$\frac{dV}{dn}$	n
−12° C.	1·7	1·9	432	55
− 6	2·4	2·6	353	75
− 2	3·4	3 6	323	76
2	4·3	4·5	255	99
7	5·4	5·5	209	57
10	6·3	6·4	191	75
15	7·6	7·6	137	65
16	8·2	8·2	109	86
14	9·3	9·3	112	39
16	10·5	10·5	98	18
17	11·5	11·5	86	31
19	12·4	12·3	82	33
21	13·5	13·3	79	41
22	14 4	14·2	79	31
23	15·4	15·1	76	25
25	16·5	16 1	69	24
25	17·5	17·1	66	37
26	18 4	17·9	62	27
25	19·5	18 9	60	56
26	20·5	19·9	56	60
26	21·4	20·8	56	72
26	22·3	21·6	53	29
27	23·5	22·8	51	12

Es fragt sich nun, wie die Werthe der vorstehenden Tabelle mit der von der Theorie geforderten Relation

$$\frac{dV}{dn} = \frac{A}{1+k.q_0}$$

übereinstimmen und welches die Werthe der beiden Constanten, von denen uns übrigens nur das A interessirt, sind.

Eine directe Ausmittlung der beiden Constanten nach der Methode der kleinsten Quadrate ist hier nicht möglich; man muss sich mit einem Näherungsverfahren begnügen, das aber die

Werthe innerhalb genügend enger Grenzen einzuschliessen gestattet. Man erhält so

$$A = 1410 \frac{V}{m}; \qquad k = 1 \cdot 15.$$

Diese Zahlen weichen von den bisher gefundenen nicht wesentlich ab; so ergaben bislang die bei niederen Dunstdrucken angestellten Messungen für A Werthe zwischen 1300 und 1500, es ordnen sich also die Messungen aus den Tropen auch quantitativ den bisherigen vollkommen ein.

Berechnet man mit den vorstehenden Werthen die Potentialgefälle für die einzelnen Dunstdrucke, so ergeben sich die Zahlen der folgenden Tabelle, wo unter Δ die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung beigefügt wurden.

Tabelle VIII.

p_0	$\frac{dV}{dn}$ Beobachtung	$\frac{dV}{dn}$ Rechnung	Δ
1·9	432	441	− 9
2·6	353	352	+ 1
3·6	323	276	+47
4·5	255	227	+28
5·5	209	193	+16
6·4	191	168	+23
7·6	137	145	− 8
8·2	109	135	−26
9·3	112	120	− 8
10·5	86	107	− 9
11·5	86	98	−12
12·3	82	93	−11
13·3	79	86	− 7
14·2	79	81	− 2
15·1	76	76	0
16·1	69	72	− 3
17·1	66	69	− 3
17·9	62	66	− 4
18·9	60	62	− 2
19·9	56	59	− 3
20·8	56	57	− 1
21·6	53	54	− 1
22·8	51	52	− 1

Trägt man als Abscissen die q_0, als Ordinaten die Potentialgefälle auf, so erhält man die Curven in Fig. 1, wobei die ausgezogene die Beobachtungen, die gestrichelte die Resultate der Rechnung wiedergibt.

Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dass die von der Theorie geforderte hyperbolische Curve in ihrem Charakter durch

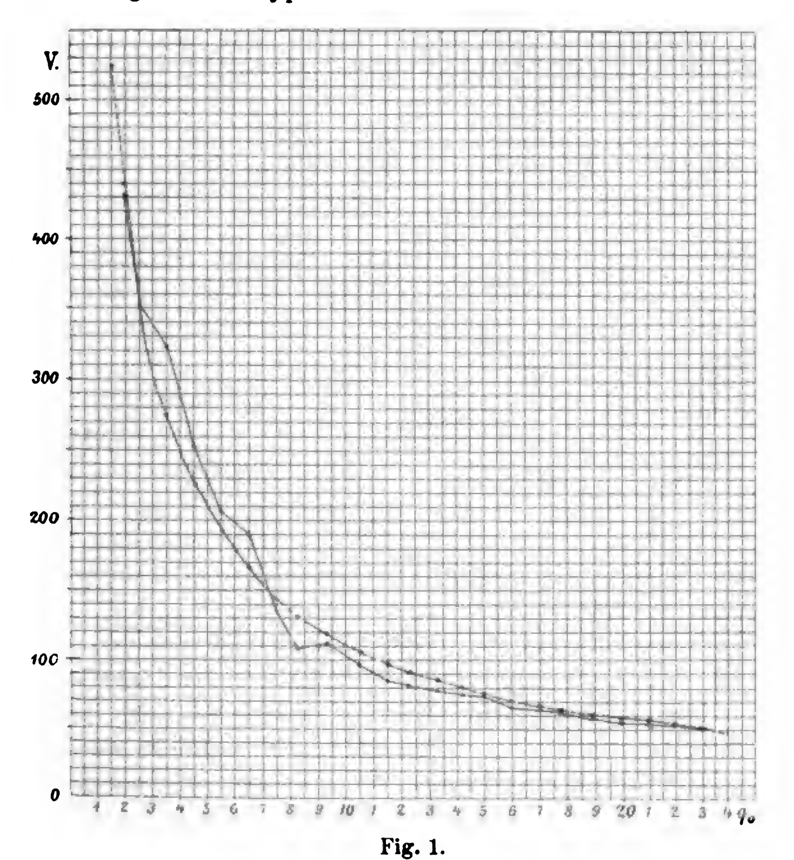


Fig. 1.

die Beobachtungen wiedergegeben wird; nur ein Punkt — bei $q_0 = 8 \cdot 2$ — ordnet sich aus der Curve aus und ergibt sogar eine Anomalie, nämlich ein kleineres Potentialgefälle als der nächstfolgende bei höherem Dunstdrucke. Ich habe denselben zwar von der Berechnung nicht ausgeschlossen, da für ihn eine beträchtliche Anzahl von Einzelmessungen — 86 — vorliegt und somit im vorhinein eine fehlerhafte Messung nicht wahrscheinlich war; nach

den neuesten Beobachtungen von Elster und Geitel im Mai 1890, deren Resultate mir die beiden Herren gütigst zur Verfügung gestellt haben, verschwindet jedoch diese Anomalie, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht, wo wieder n die Zahl der Einzelmessungen bedeutet.

Tabelle IX.

Datum	q_0	$\frac{dV}{dn}$	n
V, 5, 18	7·7	143	25
V, 7, 17, 23, 24	8·2	112	52
V, 25	9·2	107	14

Obwohl hier, wie man sieht, der Gang ein regelmässiger wird, bleiben die Werthe doch auffallend niedrig, auf welchen Umstand später noch Gelegenheit sein wird zurückzukommen.

Sieht man von der Anomalie bei $q_0 = 8 \cdot 2$ ab, so zeigen Beobachtung und Rechnung eine gute Übereinstimmung mit Ausnahme der vier Werthe im Dunstdruckintervalle von $3 \cdot 4 - 6 \cdot 3$ *mm*, für welche die Beobachtungen durchwegs bedeutend zu hoch liegen. Ohne hier schon auf die möglichen Ursachen dieses Umstandes einzugehen, möchte ich nur bemerken, dass ein etwaiger Fehler von $0 \cdot 5$ *mm* in der Bestimmung des Dunstdruckes den Unterschied bereits ausgleichen würde.

Am besten stimmen die Werthe bei sehr niedrigem und sehr hohem Drucke, was seine Erklärung wohl darin findet, dass erstere bei constantem Frostwetter, letztere aber in den Tropen, beide also bei länger dauerndem normalem Wetter angestellt wurden, wo demnach die der Rechnung zu Grunde liegende Bedingung einer normalen Vertheilung des Wasserdampfes in der Luft auch am besten erfüllt gewesen sein mag; für die zwischenliegenden Drucke von circa $3 - 14$ *mm* dagegen wird man in unseren Gegenden selten auch nur zwei aufeinander folgende Tage mit gleichen Witterungsfactoren finden.

Es ist demnach fraglich, ob man am besten thut, bei Ausmittlung der Constanten alle Punkte als gleichwerthig anzusehen; man könnte auch so verfahren, dass man die voraussichtlich am sichersten bestimmten Endpunkte der beobachteten Curve als

richtig annimmt und durch Einsetzen ihrer Werthe in die Formel die Constanten bestimmt. Thut man dies, so erhält man:

$$A = 1409 \qquad k = 1\cdot 19.$$

Der Werth für A stimmt vollkommen mit dem aus sämmtlichen Beobachtungen gefundenen Näherungswerthe, den wir somit auch künftig beibehalten wollen; construirt man mit den vorstehenden Werthen die ganze Curve, so ergibt sich eine Form, die von der in Fig. 1 gezeichneten nur ganz unwesentlich abweicht. Die Endpunkte stimmen natürlich mit der Beobachtung vollkommen, die niederen Drucke etwas schlechter, die höheren dafür noch besser als in Fig. 1.

Auffallend sind die constant niedrigen Werthe zwischen $q_0 = 8$ und $q_0 = 13$; die überwiegende Mehrheit der betreffenden Beobachtungen wurde in St. Gilgen am Wolfgangsee gewonnen, also in einem breiten Gebirgsthale, und da liegt der Gedanke nahe, dass das Potentialgefälle in Folge der Terraingestalt herabgedrückt erscheint. Ich habe desshalb an einem künstlichen Relief dieser Gegend Messungen der Dichte an verschiedenen Punkten bei constanter Ladung vorgenommen, ohne einen wesentlichen Unterschied mit Punkten der Ebene constatiren zu können; auch umfassen die Messungen in Wolfenbüttel, wie man aus Tabelle V sieht, zum Theile dieselben Dunstdrucke wie die in St. Gilgen, ohne hiefür höhere Werthe zu liefern als diese, so dass die Terraingestalt bei letzteren keinen merklichen Einfluss gehabt zu haben scheint.

§. 2.

Es ist von Wichtigkeit, über die mittleren Fehler, mit welchen die Einzelmessungen bei verschiedenen Dunstdrucken behaftet sind, ein Urtheil zu bekommen; ich habe schon früher für einzelne Beobachtungsreihen gezeigt, dass diese Fehler bei niederen Drucken immer grösser sind als bei hohen, das nun vorliegende umfangreiche Beobachtungsmateriale gestattet diese Erscheinung noch weiter zu verfolgen.

In Tabelle VII sind für alle Dunstdruckgruppen die Mittelwerthe der Potentialgefälle angegeben; bildet man die Differenzen Δ der letzteren mit allen Einzelwerthen jeder Gruppe, summirt sie ohne Rücksicht auf das Vorzeichen und dividirt die Summe

durch die Anzahl n der Einzelmessungen, so erhält man die mittlere Amplitude $\frac{\Sigma\Delta}{n}$ oder die absolute Grösse, um welche durchschnittlich eine einzelne Beobachtung falsch ist. Multiplicirt man diesen Werth noch mit $\frac{100}{\frac{dV}{dn}}$, so ergibt sich der mittlere Fehler in Procenten des mittleren Potentialgefälles.

In der folgenden Tabelle X finden sich diese Grössen für das gesammte jetzt vorliegende Beobachtungsmateriale zusammengestellt; nur die in Tabelle IX angeführten letzten Messungen aus Wolfenbüttel konnten für diesen Zweck noch nicht verwendet werden, da mir von diesen eben nur die Mittelwerthe der Gruppen, nicht aber die Einzelmessungen bekannt sind.

Tabelle X.

(Mittlere absolute und procentuale Amplituden der Einzelmessungen.)

p_0	$\frac{dV}{dn}$	n	$\frac{\Sigma\Delta}{n}$	$\frac{\Sigma\Delta}{n} \cdot \frac{100}{\frac{dV}{dn}}$
1·7	432	55	131	30·3%
2·4	353	75	109	30·8
3·4	323	76	102	31·5
4·3	255	99	75	29·5
5·4	209	57	75	35·8
6 3	191	75	52	27·2
7·5	133	40	39	29·3
8·3	105	34	28	26·6
9·4	115	25	25	21·8
10·5	98	18	13	13·3
11·5	86	31	15	17·4
12·4	82	33	14	17·1
13·5	79	41	12	15·2
14 4	79	31	9	11·7
15·4	76	25	12	15·4
16·5	69	24	10	14·2
17·5	66	37	13	20·0
18·4	62	27	9	15·3
19·5	60	56	9	15·3
20·5	56	60	7	13·2
21·4	56	82	8	14·3
22·3	52	29	9	17·4
23·5	51	12	6	12·4

Man ersieht aus der vorstehenden Zusammenstellung die grosse Unsicherheit, der eine einzelne Messung unterworfen ist; es zeigt sich wieder, dass diese Unsicherheit mit steigendem Dunstdrucke abnimmt, nicht nur ihrem absoluten, sondern auch ihrem percentualen Werthe nach. Wenn trotzdem selbst in dem constanten Tropenklima bedeutende Fehler den einzelnen Beobachtungen bei hohem Drucke anhaften können, so hat das seinen Grund zum grossen Theile in der relativen Kleinheit der zu messenden Grösse, in Folge dessen locale Störungen einen bedeutenden Einfluss gewinnen. Dass aber diese letzteren nicht die hauptsächliche Ursache der Unsicherheit sind, das geht eben aus dem Umstande hervor, dass im Winter, wo schon in Folge

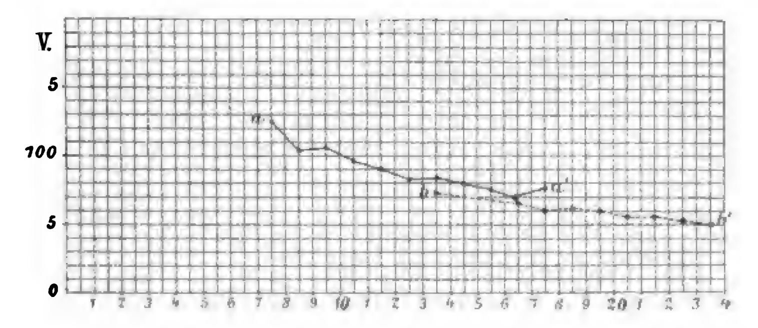


Fig. 2.

der Schneedecke die localen Störungen durch Staub vermieden sind, die Abweichungen absolut und percentuell viel bedeutender sind als im Sommer. Ich glaube vielmehr, dass man die Ursache dieser Erscheinung in einer nicht normalen Vertheilung des Wasserdampfes zu suchen hat, die — wie ein Blick auf die Curve in Fig. 1 lehrt — bei niederem Dunstdrucke von weit grösserem Einflusse sein muss als bei hohem.

Den Einfluss der nicht normalen Vertheilung des Wasserdampfes auf die Resultate der Beobachtung kann man aus folgendem speciellen Beispiele klar ersehen. Ich habe in der beigefügten Fig. 2 die Mittelwerthe der Potentialgefälle für die Dunstdruckgruppen nach den Beobachtungen in St. Gilgen und in den Tropen gesondert eingetragen; *a a'* bezieht sich auf St. Gilgen, *b b'* auf die Tropen.

Man sieht, dass die Anfangswerthe von bb' zu tief, die Endwerthe von aa' dagegen auffallend zu hoch liegen. Der Grund dieser Anomalie liegt, wie ich glaube, im Folgenden: Werthe des Dunstdruckes von 13—15 *mm* sind für die Beobachtungsorte in den Tropen ganz abnorm tiefe — die normalen betragen mindestens 18 *mm* — dagegen sind Drucke über 17 *mm* für St. Gilgen ausnahmsweise hoch und wurden auch nur an einzelnen Tagen beobachtet.

Solche plötzlich auftretende abnorme Dunstdrucke muss man wohl localen Einflüssen in der Nähe der Erdoberfläche zuschreiben und annehmen, dass bei zu tiefem Drucke in Wirklichkeit sich mehr Wasserdampf in der Luft befand, bei zu hohem dagegen weniger, als die Berechnung unter Zugrundelegung einer normalen Vertheilung und des an der Erdoberfläche beobachteten Druckes ergibt.

Damit stimmt nicht nur das Verhalten der obigen Curven überein, sondern auch noch manche anderweitige Beobachtung, wovon ich hier nur ein sehr auffälliges Beispiel geben möchte.

In ihrer schon mehrfach erwähnten Publication haben die Herren Elster und Geitel auch die Thatsache mitgetheilt, dass man für einen und denselben Dunstdruck oft verschiedene Werthe des Potentialgefälles erhält, wenn man die Einzelmessungen nach Jahreszeiten oder nach Temperaturen sondert. Sie zeigen dies speciell an dem Beispiele der Dunstdruckgruppe von 4 *mm*. Sie haben diesen Druck in 30 Fällen beobachtet, und zwar bei Temperaturen zwischen —1·5 und +13·8° C.; theilen sie nun die ganze Gruppe in zwei Theile, von denen einer die Temperaturen unter +2·2° C., der andere die höheren umfasst, so erhalten sie folgendes, dem ersten Anscheine nach auffallende Resultat:

n	Temperatur	Mittlere Temperatur	$\frac{dV}{dn}$	p_0
16	>2·2	+6·7	187	4·4
14	<2·2	+0·22	321	4·2

Es wird also hier bei nahezu gleichem p_0 das Potentialgefälle bei den tiefen Temperaturen fast doppelt so gross als bei

den höheren; nun ist aber klar, dass der normale Werth von p_0 nicht für so verschiedene Temperaturen der gleiche sein kann, und aus den meteorologischen Tabellen für Wien — die für Wolfenbüttel dürften in dieser Beziehung nicht wesentlich abweichen — geht hervor, dass ein Dunstdruck von $4\cdot 3\,mm$ normaler Weise bei einer Mitteltemperatur (des Tages) von $+1\cdot 5°$ C. eintritt. Es bezieht sich also der Werth 321 auf ein zu hohes p_0, der Werth 187 auf ein bedeutend zu tiefes. Nach dem Früheren muss also ersterer zu hoch, letzterer zu tief gefunden werden, und dies stimmt vollkommen mit dem aus sämmtlichen Messungen abgeleiteten Werthe $\frac{dV}{dn} = 255$ für $p_0 = 4\cdot 3$ (Tab. VII) überein.

Noch deutlicher wird dieser Effect nach der Tabelle, in welcher die Herren Elster und Geitel die obigen Messungen nach den Jahreszeiten zusammengestellt haben; die Mittelwerthe sind die folgenden, wobei ich für die Monate December und Jänner die für Wien normalen Werthe der Temperatur und des Dunstdruckes beifüge.

Monat	p_0	$\frac{dV}{dn}$	Wien	
			T	p_0
Jänner	4·4	390	—1·56	3·6
Februar—November	4·2	180	—	—
December	4·5	280	+1·46	4·3

Es waren somit die Messungen im December bei normalem Drucke ausgeführt, die im Jänner bei etwas zu hohem und die der übrigen Monate jedenfalls bei bedeutend zu tiefem. Dem entsprechen aber auch die Werthe von $\frac{dV}{dn}$, die gegen das allgemeine Mittel (255) theils zu hoch (Jänner), theils bedeutend zu tief (Febr.—Nov.) sind und nur im December eine genügende Übereinstimmung aufweisen.

Aus dem Vorstehenden wird klar, dass verlässliche Werthe nur bei ganz constantem Witterungscharakter gewonnen werden können oder durch so lange fortgesetzte Beobachtungsreihen,

dass es möglich wird, den Einfluss der Witterungsfactoren zu climiniren.

Die Curve der Beobachtungen in Fig. 1 zeigt noch eine auffällige Erscheinung, nämlich die starke Knickung bei einem Dunstdrucke von 3 *mm*; ich habe diese anfangs für eine Unregelmässigkeit gehalten, es scheint aber doch, dass dem nicht so sei, sondern dass bei diesem Dunstdrucke das Potentialgefälle wirklich eine Anomalie zeigt. Es spricht dafür der Umstand, dass sich diese Knickung bei allen Beobachtungen wiederfindet, bei den von mir in Wien angestellten so gut, wie bei denen aus Wolfenbüttel. Dabei ist noch zu bemerken, dass diese beiden Messungsreihen sich je über mehrere Jahre erstreckten und dieselben ausserdem durch zwei Jahre zeitlich von einander getrennt waren. Ein zufälliger Zusammenhang zwischen beiden ist somit unbedingt ausgeschlossen; die Anzahl der Einzelmessungen betrug für Wien 41 und für Wolfenbüttel 396; die beiden Curven sind in Fig. 3 besonders verzeichnet, aa' bezieht sich auf Wien, bb' auf Wolfenbüttel.

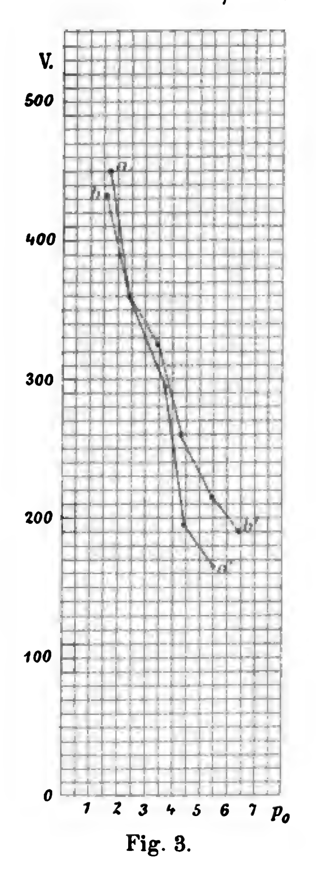


Fig. 3.

Man sieht hier in beiden Fällen deutlich die Knickung zwischen $p_0 = 3$ und 4; dieser Dunstdruck entspricht einer mittleren Temperatur um 0° C., und es scheint, dass eben dieser Umstand dieselbe veranlasst. Man könnte da zunächst an die Theorie von Sohncke denken, der zufolge an der Temperaturfläche 0° das Potentialgefälle eine plötzliche Änderung erleiden soll; allein abgesehen davon, dass diese von einer ganz anderen Grössenordnung sein müsste, würde sie auch, wenn sie existirte, wesentlich anders verlaufen. Denn sinkt die Temperaturfläche 0° von einem Punkte oberhalb des Beobachtungsortes unter diesen herab, d. h. geht die Temperatur

vom Positiven ins Negative über, so müsste — nach Sohncke's Theorie — das Potentialgefälle sehr bedeutend abnehmen, um bei noch tieferen Temperaturen und bei Abwesenheit alles Wassers in der Atmosphäre, also für $p_0 = 0$, auf Null zu sinken. Dem widerspricht aber gänzlich die Erfahrung, dass den tiefsten bisher erreichten Temperaturen unter Null die weitaus höchsten Werthe des Potentialgefälles zukommen.

Eher wäre man versucht, dabei eine Mangelhaftigkeit der Psychrometerangaben in der Nähe des Eispunktes, speciell beim häufigen Übergange von positiven Temperaturen zu negativen und zurück, anzunehmen; es ist nämlich zu beachten, dass ein Irrthum von 0·5 *mm* in der Bestimmung des Dunstdruckes die Knickung der Curve bereits erklären würde. Ob die Annahme eines derartigen Fehlers zulässig ist, vermag ich nicht zu beurtheilen, die Möglichkeit derselben scheint mir jedoch nicht ausgeschlossen.

Ich glaube jedoch, dass die Sache sich durch folgende Überlegung am einfachsten erklären lässt; sinkt die Temperatur bei normalem Wetter unter Null, so wird zwar ein kleiner Theil des in der Nähe der Erdoberfläche vorhandenen Wassers als Reif etc. condensirt, die Psychrometerangabe wird aber doch sehr angenähert den normalen Dunstdruck zeigen. Steigt dagegen die Temperatur unter gleichen Umständen über Null, so werden die der Erde zunächst liegenden Luftschichten einen durch das Schmelzwasser des Schnees, Reifes etc. bedingten höheren Gehalt an Wasser aufweisen, als ihnen bei normaler Vertheilung desselben in der Luft zukäme. Die aus dem beobachteten Dunstdrucke in diesem Falle für die ganze Luftsäule berechnete Wassermenge wird grösser sein als die thatsächliche, mit anderen Worten, das Potentialgefälle wird dem Dunstdrucke gegenüber zu gross gefunden. Dieser Umstand bedingt meines Erachtens die abnorm hohen Werthe des letzteren zwischen Drucken von 3—5 *mm.*

§. 3.

Wie aus den bisherigen Betrachtungen hervorgeht, ist die Unsicherheit, mit welcher die fragliche Curve behaftet ist, immer noch eine ziemlich bedeutende; für einen meteorologischen Vorgang, und noch dazu für einen so variablen wie es die Luft-

elektricität ist, ist eben das vorhandene Beobachtungsmateriale noch bei weitem nicht ausreichend. Ob, wie es allerdings wahrscheinlich ist, die tiefsten Punkte der Curve richtig bestimmt sind, das zu entscheiden wird erst dann möglich sein, wenn Messungen bei noch tieferen Dunstdrucken vorliegen werden, und zwar aus Gegenden, wo diese niederen Drucke bei normalem Wetter, nicht nur ausnahmsweise wie bei uns, herrschen. Messungen im Innern Sibiriens müssten diese Werthe mit derselben Sicherheit liefern, die den Beobachtungen aus den Tropen anhaftet, für welche in Bezug auf hohe Drucke ganz dasselbe gilt, wie für jene Gegenden in Bezug auf tiefe.

Obwohl die Curve in Fig. 1 unzweifelhaft denselben Charakter hat wie die gerechnete, auch die Übereinstimmung beider im Ganzen eine gute ist, so sieht man doch, dass der Grenzwerth A des Potentialgefälles für $p_0 = 0$ durch eine kleine Änderung der Curve schon stark alterirt wird. Der Werth $1410 \frac{V}{m}$, den wir für diese Grösse aus der Curve abgeleitet haben, kann desshalb noch beträchtlich falsch sein, und darum wären Messungen bei noch tieferen Temperaturen und Drucken von besonderem Werthe, denn sie würden die Grenzen des eventuellen Fehlers dieser Grösse bedeutend einengen.

Bleiben wir vorläufig bei dem obigen, bis jetzt sichersten Werthe von A stehen, so ergibt sich daraus das Potentiale der Erde gegen einen Punkt unendlich weit im Weltraume aus der bekannten Relation

$$V = -R \frac{dV}{dn},$$

wo R den Radius der Erde bedeutet; man erhält

$$V = -9.10^9 \text{ Volt.}$$

Die Ladung der Erde ist negativ, ihre Flächendichte μ beträgt in absoluten elektrostatischen Einheiten:

$$\mu = -0 \cdot 0038$$

und die Gesammtladung Q der Erde wird in denselben Einheiten:

$$Q = -2.10^{16}.$$

Es ist nicht ohne Interesse, die höchsten bisher bei normalem Wetter beobachteten Potentialgefälle mit dem für A gefundenen Werthe von 1410 zu vergleichen. Nach der hier vertretenen Theorie können abnorme positive Potentialgefälle bei Ansammlung von Wolkenmassen über dem Beobachtungsorte allerdings bis zu beliebiger Höhe vorkommen, nicht so aber bei heiterem Wetter; in diesem Falle kann eine scheinbare Störung im Allgemeinen nur dadurch eintreten, dass die Luft in höheren Schichten weniger Wasser enthält, als nach dem Dunstdrucke am Erdboden zu erwarten wäre. Im äussersten Falle könnte somit das Potentialgefälle den Werth A erreichen, der bei Abwesenheit jeglichen Wassers in der Luft herrschen würde, und wird, da dieser Grenzfall wohl niemals erreicht wird, sich zwischen den normalen Werthen und dem Werthe A bewegen.

Das trifft auch in der That zu; Potentialgefälle bis gegen $600 \frac{V}{m}$ sind im Winter nicht selten, höhere kommen nur mehr ganz vereinzelt vor und erreichen — nach den Messungen in Wolfenbüttel — ihr Maximum bei $828 \frac{V}{m}$ an einem Tage, wo dem gemessenen Dunstdrucke $p_0 = 1 \cdot 5$ entsprechend der Werth etwa 500 hätte sein sollen. Es bleiben diese Werthe also noch weit unter A und erklären sich, wie ein Blick auf Fig. 1 lehrt, ohneweiters aus einer nur geringen Abweichung der Vertheilung des Wasserdampfes von der normalen.

Dasselbe gilt natürlich auch von besonders tiefen Werthen des Potentialgefälles, auch diese werden, wie ich glaube, dadurch bedingt, dass das Psychrometer durch locale Störungen an der Erdoberfläche eine grössere Trockenheit anzeigt, als der ganzen Luftmasse wirklich zukommt.

Die Messung des Potentialgefälles erscheint so gewissermassen als eine psychrometrische Durchschnittsmessung der ganzen Luftsäule über dem Beobachtungsorte; und damit stimmt auch die von mir und auch von anderen Beobachtern oftmals gemachte Erfahrung, dass einem plötzlichen Sinken des Potentialgefälles bei anscheinend normalem Wetter unbedingt im Laufe einiger Stunden ein Wetterumschlag folgt. Das Elektrometer zeigt in diesem Falle das Auftreten von Wassermassen in der

Luft an, wenn dieselben auch noch lange nicht dem Auge sichtbar sind.

§. 4.

Wir haben im Vorangegangenen das in den Tropen gesammelte Beobachtungsmateriale mit Hinblick auf die Abhängigkeit des Potentialgefälles von der absoluten Feuchtigkeit untersucht und dabei uns an die Mittelwerthe der einzelnen Dunstdruckgruppen gehalten.

Diese Abhängigkeit tritt auch zu Tage, wenn man nicht die einzelnen Messungen direct verwerthet, sondern die Tagesmittel, wie dies auch von Elster und Geitel bei Sichtung ihrer Beobachtungen aus Wolfenbüttel geschehen ist. Ich habe in der folgenden Tabelle diese Tagesmittel für alle Tage, die mindestens drei Beobachtungen aufweisen, zusammengestellt; unter T ist die Temperatur, unter R. F. die relative Feuchtigkeit angegeben.

Tabelle XI.

Zeit	Ort	Anzahl der Beobachtungen	T	R.F.	p_0	$\frac{dV}{dn}$ (Tagesmittel)
1888, XII, 6	Indischer Ocean	6	26·0	83	20·6	58
7	"	10	25·3	81	19·5	58
8	"	13	25·2	82	19·6	51
9	"	6	25·3	82	19·6	50
10	"	8	24·9	78	17·9	57
11	"	13	26·4	83	21·2	44
15	Bombay	8	26·7	58	15·0	70
16	"	14	27·0	59	15·5	72
1889, I, 10	"	5	27·3	69	18·6	67
11	"	3	26·7	71	20·9	66
12	"	8	25·5	86	20·7	53
14	"	4	25·7	74	18·4	56
26	Ceylon	6	25·4	89	21·3	61
27	"	7	25·5	89	21·5	65

Zeit	Ort	Anzahl der Beobachtungen	T	R.F.	p_0	$\frac{dV}{dn}$ (Tagesmittel)
1889, I, 28	Ceylon	3	27·5	80	21·7	64
29	„	3	24·2	87	19·6	68
30	„	7	25·3	92	21·8	61
31	„	7	24·7	94	21·6	61
II, 1	„	17	26·0	91	22·7	56
2	„	4	25·4	84	20·3	60
3	„	8	25·8	76	18.6	59
4	„	14	25·6	85	19·8	67
5	„	20	25·1	88	20·8	55
6	„	17	25·2	83	19·9	63
7	„	17	26·3	31	20·7	49
8	„	16	25·5	81	19·6	53
9	„	13	25·6	88	21·4	50
10	„	19	26·3	85	21·7	52

Ordnet man die vorstehenden Tagesmittel nach Dunstdruckgruppen, wie dies früher für die Einzelwerthe geschehen, so erhält man schliesslich die folgende Zusammenstellung:

Tabelle XII.

p_0	$\frac{dV}{dn}$	Zahl der Tage	Zahl der Einzelbeobachtungen
15·3	71	2	22
17·9	57	1	8
18·4	61	3	17
19·7	58	7	79
20·7	56	6	58
21·5	57	8	75
22·7	56	1	17

Wenn hier auch die Abnahme des Potentialgefälles mit wachsendem Dunstdrucke nicht so deutlich hervortritt, wie bei der früheren Anordnung, so ist sie doch immerhin noch sichtbar, nur ist die Zahl der Tage für eine derartige Gruppirung noch eine viel zu geringe, und es wird sich eine solche erst empfehlen, wenn einmal ein viel umfangreicheres Beobachtungsmateriale vorliegen wird.

§. 5.

Es ist wiederholt die Behauptung ausgesprochen, wenn auch durch nichts gestützt worden, dass die Grösse des Potentialgefälles nicht sowohl durch den Dunstdruck, als vielmehr durch die relative Feuchtigkeit bestimmt werde. Wenn auch diese Annahme schon den älteren Beobachtungen gegenüber schwer zu vertheidigen war, so lässt sich nun — mit Hilfe des vollständigeren Beobachtungsmateriales — ihre Unhaltbarkeit unzweifelhaft darthun. Es war dieselbe bisher scheinbar durch den Umstand gestützt und wahrscheinlich auch durch denselben hervorgerufen, dass in unseren Gegenden sehr hohe Feuchtigkeitsprocente hauptsächlich im Winter, sehr tiefe hauptsächlich im Hochsommer vorkommen; erstere werden dann regelmässig von hohen, letztere von niederen Potentialgefällen begleitet. Dieser Zusammenhang ist aber nur ein scheinbarer, dadurch bedingt, dass eben im Winter tiefe Dunstdrucke, im Sommer hohe die Regel sind, und diese Drucke, nicht aber die Feuchtigkeitspercente sind das Bestimmende. Dies wird durch die Messungen in den Tropen ganz evident erwiesen, wo einerseits sehr hohe Drucke mit sehr hohen Feuchtigkeitspercenten vereint vorkommen, stellenweise sogar die Regel bilden, wie in Ceylon, anderseits aber hohe Drucke auch bei geringer relativer Feuchtigkeit herrschen, wie zeitweise in Bombay.

Ordnet man die Tropenbeobachtungen nach Gruppen der relativen Feuchtigkeit, wovon eine jede ein Intervall von 10% umfasst, und bildet die Mittelwerthe, so erhält man die Zahlen der folgenden Tabelle. Unter R. F. ist die relative Feuchtigkeit in Percenten der Sättigung angegeben, unter n die Zahl der Einzelbeobachtungen. Die mittlere Temperatur bei sämmtlichen Messungen betrug circa 26° C.

Tabelle XIII.

Beobachtungen in den Tropen ($T = 26°$ C.).

R. F.	$\frac{dV}{dn}$	n
38%	63	2
45	65	4
56	69	5
66	69	14
76	61	55
85	54	158
93	59	47

Hier ist von einer Abhängigkeit des Potentialgefälles von der relativen Feuchtigkeit absolut nichts zu sehen; dagegen springt der Einfluss der Temperatur, also der absoluten Feuchtigkeit, sofort in die Augen, wenn man mit vorstehender Tabelle die entsprechenden Zusammenstellungen für unsere Gegenden vergleicht. So leiten sich z. B. aus den Messungen in St. Gilgen und Wien, wovon erstere bei einer mittleren Temperatur von circa 18° C., letztere bei einer solchen von circa 0° C. ausgeführt wurden, die beiden folgenden, der obigen analog angeordneten Tabellen ab.

Tabelle XIV.

Beobachtungen in St. Gilgen ($T = 18°$ C.).

R. F.	$\frac{dV}{dn}$	n
38%	95	2
56	82	20
65	87	43
74	90	58
85	82	55
92	84	28

Tabelle XV.

Beobachtungen in Wien ($T = 0°$ C.).

R. F.	$\frac{dV}{dn}$	n
45%	128	4
55	251	5
65	349	7
75	316	8
83	315	13
92	254	10

Aus diesen drei Tabellen geht klar und deutlich hervor, dass für eine bestimmte relative Feuchtigkeit das Potentialgefälle ganz durch die Temperatur, d. h. also durch die Grösse des Dunstdruckes oder durch die Quantität des in der Luft vorhandenen Wassers bestimmt ist. Für eine relative Feuchtigkeit von 75% finden wir z. B. die Potentialgefälle 316, 90 und 61, je nachdem die Temperatur 0°, 18° oder 26° betrug, und das gleiche Verhalten zeigen alle anderen Zahlen der drei Tabellen.

Es ist sonach nicht die relative Feuchtigkeit, sondern der Dunstdruck das Bestimmende für die Grösse des Potentialgefälles; ein Einfluss der ersteren kann scheinbar dann eintreten, wenn dieselbe einen vom Dunstdrucke bedingten Gang aufweist, wie dies allerdings für ein und denselben Ort, namentlich in unseren Gegenden, nicht selten vorkommt.

§. 6.

Wir wenden uns nun zur Frage nach dem Verhalten der Luftelektricität in den Tropen in Hinsicht der täglichen Periode. Eine Erklärung oder auch nur eine einigermassen erschöpfende

Beschreibung dieses Phänomens wird man erst auf Grundlage sehr umfassender Beobachtungsreihen geben können, und da solche nur an fixen Stationen ausführbar sind, so konnte auf meiner Reise diesem Theile der Aufgabe von Anfang an nur in untergeordnetem Masse Rechnung getragen werden. Nichtsdestoweniger gestattet das gesammelte Materiale wenigstens in qualitativer Beziehung eine interessante Vergleichung mit den Ergebnissen aus unseren Gegenden; wir müssen uns vorläufig freilich damit begnügen, diese Vergleichung rein empirisch anzustellen, denn bisher vermag noch keine der Theorien über Luftelektricität die Erscheinung der täglichen Variation auch nur qualitativ zur erklären.

Ich habe sowohl im Indischen Ocean als auch in Ceylon mein Augenmerk darauf gerichtet gehabt, ob die beiden täglichen Maxima — des Morgens und Abends — die z. B. in St. Gilgen so ausgesprochen auftreten, sich auch in den Tropen wiederfinden. Es war bald zu constatiren, dass diese Erscheinung in den Tropen, wenn überhaupt, so jedenfalls lange nicht mit der Intensität auftritt wie bei uns. Am Ocean liess sich zwar an manchen Tagen sowohl ein Morgen- als Abendmaximum constatiren, an anderen dagegen war von beiden keine Spur zu entdecken; in Ceylon aber war ein Abendmaximum gewiss nicht vorhanden, nur ein ganz flach verlaufendes Morgenmaximum zeigte sich mit einiger Deutlichkeit.

Die Stunden dieser eventuellen Maxima waren ziemlich gleich gelegen mit den von mir in St. Gilgen gefundenen, circa 10^h *a.* und $5^1/_2{}^h$ *p.*; letztere Zeit war zugleich die Zeit des Sonnenunterganges, und ich möchte in Bezug auf diesen Umstand besonders bemerken, dass in den beiden Fällen, in denen ich dieses Abendmaximum constatiren konnte, dasselbe auffallend mit dem Verschwinden der Sonnenscheibe hinter dem Horizonte zusammenfiel.

Ich habe in den folgenden Tabellen die Stundenmittel der möglichst vollständigen Beobachtungstage behufs Ermittlung des täglichen Ganges zusammengestellt, wobei einzelne mit * bezeichnete Zahlen aus den Nachbarwerthen interpolirt sind; zum besseren Vergleiche füge ich auch meine bisher noch nicht veröffentlichten Beobachtungen aus St. Gilgen vom Jahre 1887 bei.

Tabelle XVI.

Stundenmittel vom Indischen Ocean.

(Die Maxima sind zu den nächstgelegenen Stunden gezogen.)

Tag	6 a.	7	8	9	$9^1/_2$	10	$10^1/_2$	11	12	1	2	3	4	5	$5^1/_2$	6
1888, XII, 6	—	—	—	—	—	—	90	—	—	—	65	57	57	57	82	57
7	47	45	42	47	48*	50	53*	57*	61*	65	65*	65*	65	65	108	65
8	—	57	57	54	90	54	50	52*	54	54*	54	52*	50	47	47	47
9	—	—	50	53*	54	53*	51*	50	52*	54	48*	42	45	47	—	—
10	—	—	—	50	52*	56*	57	57	57	57	57	57	60	—	—	—
11	—	42	42	47	44*	42	44*	47	47	50	42	47	42	42	42	42
Mittel....	47	48	48	50	58	51	58	51	54	56	55	54	54	51	70	53

Tabelle XVII.

Stundenmittel von Mount Lavinia (Ceylon).

Tag	5 a.	6	7	8	9	9½	10	10½	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1889, I, 27	—	—	65	68	68	64	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	61	64
30	58	55	60*	66	67	67*	68	66	64	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
II, 1	—	—	64	61	55	61*	68	57*	47	47	53	55	60*	64	52	50	53*	56*	58	55	55	50
2	—	—	68	69*	70*	72	47	49*	51*	53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	—	—	—	66	66	70	82	77	93	58	53	61	58	58*	58	—	—	—	—	—	—	—
4	—	47	72	75	100	84	96	64	66	72	68	68*	68	70	60	63*	66*	69*	72	—	—	—
5	—	70	68	68	58	42	66	73	96	96	64	50	42	53	45	45	42	40	37	47*	58	53
6	64	61	70	50	50	50	58	100	58	64	76	76	76	61	59*	56*	53	—	—	—	—	—
7	—	—	61	68	53	50	58	54*	50	45	45	45	46	45	42	—	—	—	—	—	—	—
8	—	42	47	45	61	64	66	76	66	53	47	44	42	—	—	—	—	—	—	—	58	—
9	—	—	37	42	53	68	68	72	58	58	45	53	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	—	—	53	53	42	53	58	58	61	72	58	42	42	42	39	42	—	—	—	—	—	—
Mittel....	59	56	60	61	62	62	67	68	65	62	57	55	54	56	51	51	53	55	55	51	58	56

Tabelle XVIII.

Stundenmittel von St. Gilgen 1887.

Tag	6 *a.*	7	7½	8	8½	9	10	11	12	1 *p.*	2	3	4	5	6	6½	7	7½	8	9	10	11	12
1887, VIII, 25	—	—	125	112*	97	99*	101*	103*	105*	96	88	102	97*	93	97	133	170	105	110	122	70	18	62
27	—	—	—	—	—	73	68*	63*	60	65	66*	68*	70*	72	78	88	180	110	88	84*	80	70*	60
28	60	75	160	200	130	95	76	65	73	65	68*	70*	73	80	78*	76	73	117	70	72	75*	77	—
31	—	—	120	220	130	88	98	90*	83	81*	80*	78*	76	83	100	160	75	88	110	87*	65	—	—
IX, 2	—	80	120	200	125	90	60	60	53*	47*	40	50*	70*	86	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	—	—	—	—	—	—	50	60	50	65	82*	100	80	70	90	95	170	65	60	60	50	—	—
19	—	60	60	83	150	60	55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Mittel....	60	78	117	163	126	84	73	73	71	70	71	79	77	81	88	110	124	97	87	85	68	72	61

Man ersieht aus den vorstehenden Tabellen unmittelbar, um wie viel schwächer ausgeprägt die tägliche Variation in den Tropen auftritt als bei uns; um dies noch augenscheinlicher zu machen, habe ich die Curven der betreffenden Stundenmittel in der folgenden Fig. 4 gezeichnet. Es bezieht sich daselbst *aa'* auf den Indischen Ocean, *bb'* auf Ceylon, *cc'* auf St. Gilgen und *dd'* auf Wolfenbüttel, welch' letztere Curve ich nach den von Elster und Geitel für normale Frühjahrs- und Herbsttage gegebenen

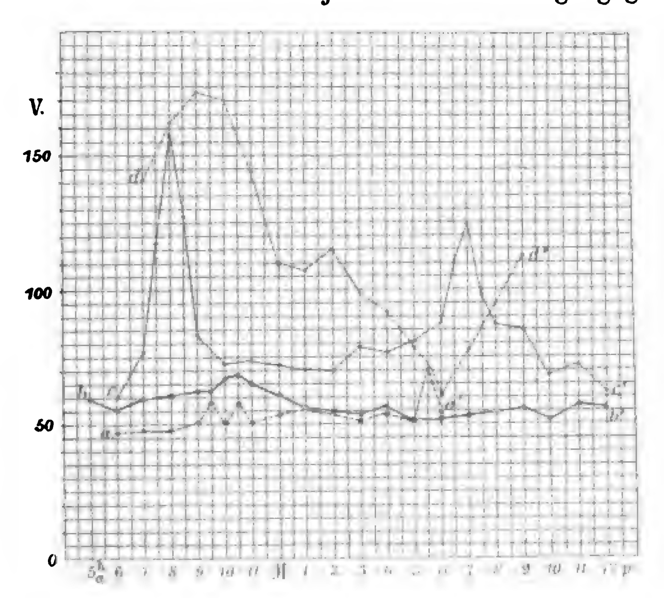


Fig. 4.

Zahlen beigefügt habe. Die Curve von St. Gilgen umfasst nur Beobachtungen von Herbsttagen.

Es zeigt sich, dass das Phänomen der täglichen Periode von Ort zu Ort selbst in qualitativer Weise sich ändert; in dem constanten Klima Ceylons, wo Temperatur und Feuchtigkeit im Laufe von 24 Stunden sich kaum merklich ändern, ist es fast gänzlich verschwunden, von einem scharfen Charakter des Maximums, wie z. B. in St. Gilgen, ist keine Spur mehr zu finden.

Die Vermuthung, die ich schon vor längerer Zeit ausgesprochen habe, dass die tägliche Periode ein rein locales Phänomen sei, wird durch die Fig. 4 deutlich illustrirt; dazu

muss man noch bemerken, dass selbst für ein und denselben Ort sich der Charakter der Curve mit der Jahreszeit gänzlich ändern kann, wie dies von Elster und Geitel für Wolfenbüttel nachgewiesen wurde. Während die Herbst- und Frühlingscurve *dd'* Nachmittags ein tiefes Minimum zeigt, steigt die Wintercurve allmälig von einem schwachen Minimum um 11^h *a.* bis zu einem Maximum um 7^h *p.* an.

Auch an den diversen europäischen Stationen, wo fortlaufende Beobachtungen über Luftelektricität gemacht werden (Paris, Kiew, Lissabon, Florenz, Neapel etc.), hat man bezüglich der Maxima verschiedene Resultate erhalten, manchmal deren zwei, manchmal nur eines, ohne dass der Grund dieser Differenzen — der anscheinend wieder localer Natur ist — bisher aufgeklärt wäre.

Einem jüngst erschienenen Berichte[1] über die Resultate der Beobachtungen über Luftelektricität an der schwedischen Polarstation zu Cap Thordsen auf Spitzbergen (1882/83) entnehme ich die Thatsache, dass auch dort der tägliche Gang ein zweifaches Maximum, um 8^h *a.* und 8^h *p.*, also fast zu denselben Stunden, wie in St. Gilgen, zeigt. Die Maxima sind nur bedeutend flacher, was seinen Grund aber wenigstens zum Theile in dem Umstande hat, dass Werthe von höherem Betrage als das doppelte Monatsmittel als Störungen ausgeschieden wurden. Eine Tabelle der Vertheilung der Störungen über die Tagesstunden zeigt aber, dass dieselben gleichfalls sehr nahe bei 8^h *a.* und 8^h *p.* bedeutende Maxima haben, so dass durch Vernachlässigung derselben die Curve zu flach erscheinen muss. Im Übrigen sind die Werthe leider wieder willkürliche, nicht auf die Ebene reducirte, so dass eine Verwerthung derselben nach der absoluten Grösse unmöglich ist.

Die Ursache der täglichen Variation ist, wie gesagt, bisher vollständig unaufgeklärt; das Einzige, was sich nach den vorliegenden Beobachtungen mit einiger Wahrscheinlichkeit sagen lässt, ist, dass ein Zusammenhang derselben mit der Plötzlichkeit der Temperaturänderungen im Laufe des Tages zu bestehen scheint; in den Tropen, wo die Temperatur Tag und Nacht fast

[1] Meteorologische Zeitschrift, XXV, Jänner 1890.

constant bleibt, verschwinden auch die Maxima des Potentialgefälles, in unseren Gebirgsgegenden aber (St. Gilgen), wo die Temperatur sehr rasche Sprünge macht, treten sie scharf markirt auf.

Schliesslich möchte ich noch zwei vereinzelte Messungen erwähnen, von denen die eine in Cairo, die andere auf dem Hochplateau von Newara Eliya in Ceylon in einer Höhe von circa 2000 *m* ausgeführt wurde und die beide je ein Maximum deutlich erkennen lassen; ob auch die anderen Maxima vorhanden waren, konnte wegen der Ungunst der Witterung, die an keinem der Orte einen ganzen Tag zu beobachten gestattete, leider nicht entschieden werden. In Newara Eliya trat das Morgenmaximum um $7^1/_2{}^h$, in Cairo das Abendmaximum gegen 5^h präcise mit Sonnenuntergang ein. Beide Orte weisen starke Temperaturschwankungen im Laufe eines Tages auf, wesshalb ich auch das Auftreten der Maxima erwartete.

§. 7.

Wenn, wie es die hier vertretene Theorie fordert, die unteren Luftschichten eine negative Ladung haben, dann muss das Potentialgefälle mit der Erhebung über dem Erdboden wachsen, um schliesslich in einer Höhe, wo alle negativen Ladungen sich unterhalb des Beobachtungsortes befinden, den constanten Werth A anzunehmen. Ich habe in meiner schon citirten Abhandlung über die Abhängigkeit der atmosphärischen Elektricität vom Wassergehalte der Luft diese Relation zwischen Potentialgefälle und Höhe genauer untersucht, wobei sich die folgende Formel ergeben hat:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_h = \frac{A-B}{2\cdot 65}(h-0\cdot 123\, h^2+0\cdot 005\, h^3)+B.$$

Hier bedeutet die linke Seite das Potentialgefälle per Meter in der Höhe h, B dasselbe gleichzeitig am Erdboden und A die Grösse $1410\,\frac{V}{m}$, wie sie sich aus den vorhergehenden Untersuchungen ergeben hat. Als Einheit der Höhe h ist 1000 *m* genommen.

Es war bisher leider nicht möglich, diese Relation mehr als in qualitativer Beziehung zu prüfen, da Einzelmessungen der Natur der Sache nach nicht verlässlich genug sind, um in quantitativer Beziehung verwerthet werden zu können, fortgesetzte Beobachtungsreihen nach dieser Richtung aber noch nicht angestellt wurden. Immerhin bietet schon die qualitative Prüfung Interesse genug, denn sie entscheidet endgiltig über die Frage, ob die in der Luft vorhandenen elektrischen Ladungen ein positives oder negatives Vorzeichen haben. Eine vor längerer Zeit zu diesem Zwecke unternommene Ballonfahrt, über die ich in der oben erwähnten Abhandlung schon berichtete, entschied zu Gunsten der letzteren Annahme und damit gegen alle jene Theorien, welche die Luftelektricität auf die Reibung des Wassers an der Erdoberfläche zurückführen.

Dasselbe qualitative Ergebniss erhielt später auch L. Weber[1] mittelst Messungen des Luftpotentiales durch fliegende Drachen; leider sind auch diese Beobachtungen zu einer quantitativen Verwerthung nicht ausreichend.

Messungen auf Bergspitzen sind für den vorliegenden Zweck nicht brauchbar, da die Niveauflächen über denselben deformirt sind; diese Deformation würde aber auf einem mässig ausgedehnten Hochplateau verschwinden, selbst wenn dasselbe nur eine Längs- und Quererstreckung in etwa dem 5—6fachen Betrage seiner Höhe hätte. Man könnte dann die obige Formel, die eigentlich für einen Punkt in freier Luft gilt, direct anwenden, solange nur die Voraussetzung erfüllt bleibt, dass der über dem Beobachtungsorte befindliche Wasserdampf so angeordnet ist, wie es bei Abwesenheit des Plateaus in derselben Höhe der Fall sein würde. Diese Bedingung wird nur bei mässiger Erstreckung desselben erfüllt sein können, denn werden die Dimensionen so gross, dass ein merklicher Theil des Wasserdampfes vom Plateau selbst stammt und nicht von der Ebene, so besitzt derselbe auch eine elektrische Ladung, die nicht mehr der Flächendichte in der Ebene, sondern der am Plateau proportional ist. Das Potentialgefälle über einer solchen ausgedehnten Erhebung wird dann von der absoluten Höhe unabhängig.

---

[1] Elektrotechnische Zeitschrift, X, August (1889).

Ich hatte auf meiner Reise Gelegenheit, sowohl auf einem kleinen als auch auf einem grossen Plateau zu beobachten; leider war es mir nicht möglich, grössere Messungsreihen auszuführen, so dass ich den Resultaten auch nur einen qualitativen Werth zuschreiben kann, sie bestätigten jedoch auffallend die Richtigkeit der vorstehenden Bemerkungen.

Die beiden Plateaux waren das des Mokkatam bei Cairo in Ägypten und das von Newara Eliya im Innern Ceylons. Ersteres erhebt sich 100 *m* über die Ebene, gegen welche es an drei Seiten ganz steil abfällt; nach der vierten hin setzt es sich in gleicher Höhe auf grosse Distanz fort, so dass die Bedingung des Freistehens hier allerdings nur zum Theile erfüllt ist. Letzteres bildet ein angenähert kreisförmiges hügeliges Tafelland von circa 70 *km* Durchmesser und 2000 *m* absoluter Erhebung.

Bei Cairo, respective auf der Höhe des Mokkatam, habe ich an zwei Tagen beobachtet und — wie aus den diesbezüglichen Tabellen des I. Theiles zu ersehen ist — für unten und oben, d. h. in diesem Falle für eine Höhendifferenz von 100 *m*, die folgenden Zahlen erhalten:

	Datum	
	1888, IX, 22	1888, IX, 24
$\frac{dV}{dn}$ unten	85	67
$\frac{dV}{dn}$ oben	111	87

An beiden Tagen zeigt sich also deutlich die von der Theorie geforderte Zunahme des Potentialgefälles; allein rechnen wir dieselbe aus der früher gegebenen Formel, indem wir in derselben $h = 0 \cdot 1$ setzen, so erhalten wir für die beiden Tage für oben die Werthe: 135 und 118. Es bleibt also die beobachtete Zunahme hinter der berechneten merklich zurück; ob dies eine Folge der schon erwähnten Unvollkommenheit des Plateaus, deren Effect sich allerdings in diesem Sinne äussern müsste, ist, oder ob die Zahlen nur zufällig so klein ausgefallen, könnte erst durch längere Beobachtungsreihen entschieden werden.

Auf der Höhe von Newara Eliya wurde gleichfalls an zwei Tagen beobachtet, am 19. und 20. Februar 1889. Würde das Potentialgefälle daselbst einem gleich hoch, aber frei in der Luft gelegenen Punkte entsprechen, so hätte es bei der Höhe von 2000 *m* und bei einem Werthe von 50 an der Küste ein sehr bedeutendes — nach unserer Formel circa 850 — sein müssen. Statt dessen zeigte sich sogleich, dass dasselbe von jener Grösse ist, wie es dem gleichen Dunstdrucke in der Ebene entspricht; es war nämlich im Mittel gleich 83, bei einem mittleren Dunstdrucke von 8·7 *mm*, und das ist ungefähr der Werth für die Ebene, wie die Curve in Fig. 1 lehrt. Letzterer ist sogar noch etwas höher, was wohl dem Umstande zuzuschreiben ist, dass das Wetter in Newara Eliya nur kurze Zeit schön und an den benachbarten Tagen von Regenschauern unterbrochen war. Es ist somit die Theorie auch hier ganz im Einklange mit der Beobachtung, sobald man nur die an und für sich fast selbstverständliche Annahme macht, dass der über einem Plateau von derartiger Ausdehnung befindliche Wasserdampf auch von diesem Plateau selbst stammt.[1] Dabei ist noch im Auge zu behalten, dass es sich hier nicht um den Wasserdampf in höheren Schichten der Luft, sondern in erster Linie um jenen nahe am Boden handelt, denn dieser übt vermöge seiner grösseren Dichte auch die grössere Wirkung auf das Potentialgefälle aus.

Soweit demnach bisher Beobachtungen über die Änderung des Potentialgefälles mit der absoluten Höhe vorliegen, bestätigen sie vollkommen die Annahme, die unserer Theorie gemäss über die Wirkung des Wasserdampfes in der Atmosphäre gemacht wurde.

§. 8.

Im Folgenden fasse ich kurz die Ergebnisse meiner Untersuchungen in den Tropen mit Rücksicht auf die gegenwärtig

---

[1] Für die Richtigkeit dieser Voraussetzung spricht auch der Werth des Dunstdruckes der oben beobachtet wurde; für einen freien Punkt in gleicher Höhe hätte, nach der bekannten Formel von Hann, derselbe 13·5 *mm* betragen sollen (für 22 *mm* in der Ebene), statt der gefundenen 8·7 *mm*.

herrschenden Theorien über die atmosphärische Elektricität zusammen:

1. Das Vorzeichen der Luftelektricität ist auch in den Tropen bei normalem Wetter ausnahmslos das positive, d. h. irgend ein Punkt in der Luft hat stets ein höheres Potentiale als die Erde. Dasselbe Verhalten zeigt sich bekanntlich auch in unseren Gegenden und, dem schon erwähnten Berichte über die schwedische Polarexpedition nach Spitzbergen zufolge, auch am Cap Thordsen in 78° 28′ n. Br.

Man ist demnach wohl berechtigt den Satz auszusprechen: Das Vorzeichen der normalen Luftelektricität ist auf der ganzen Erde und zu allen Zeiten das positive. Dieser Satz steht aber in Widerspruch mit einigen Theorien (Edlund, Kiesel etc.), denen zufolge das Vorzeichen in den Äquatorialgegenden wechseln sollte, es wären dieselben also, auch wenn keine anderen Gründe dagegen sprechen würden, schon durch diesen Umstand allein widerlegt; meine Theorie dagegen, ebenso wie die von Sohncke und Arrhenius, stehen mit dieser Erfahrung ganz im Einklange.

2. Die Grösse des Potentialgefälles in den Tropen hat sich, wie Fig. 1 lehrt, ganz in dem von meiner Theorie geforderten Betrage ergeben; die Constanten der Formel, wie sie aus Messungen in unseren Breiten berechnet werden, genügen auch den Tropenbeobachtungen, so dass diese Formel nun in Bezug auf den Dunstdruck im Umfange von $1 \cdot 7\,mm$ bis $24 \cdot 0\,mm$ und in Bezug auf die Temperatur von $-15°$ bis $+30°$ geprüft und richtig befunden ist. Die Curve in Fig. 1 gilt zugleich für die jährliche Periode der Luftelektricität, so dass diese auch in quantitativer Beziehung durch den vorausgesetzten Zusammenhang mit der absoluten Feuchtigkeit wohl genügend erklärt erscheint.

Das Potentialgefälle bei absoluter Trockenheit der Luft, also bei Abwesenheit aller elektrischen Massen in derselben, bestimmt sich aus dieser Curve zu $1410 \frac{V}{m}$, und daraus resultirt ein Potential der Erde $= -9.10^9$ Volt. Die Gesammtladung der Erde beträgt -2.10^{16} absolute elektrostatische Einheiten und endlich die Dichte derselben, im gleichen Masse, $0 \cdot 0038$.

Die Theorie Sohncke's[1] vermag die jährliche Periode nur dann zu erklären, wenn man dem Wasser in der Luft eben die Rolle zutheilt, welche ich ihm von Anfang an zugeschrieben habe, d. h. wenn man dasselbe als negativ geladen annimmt. Aber auch dann gestattet diese Theorie keine quantitative Controle; das Einzige, was sich voraussehen lässt, ist, dass das Potentialgefälle bei Temperaturen unter Null sich nur mehr ganz wenig ändern müsste, um bei den allertiefsten Temperaturen auf Null zu sinken. Dies widerspricht aber aller Erfahrung, der zufolge das Potentialgefälle gerade bei den grössten Kältegraden und bei der grössten Trockenheit rapide wächst.

Was die Theorie von Arrhenius[2] anlangt, so vermag auch diese in quantitativer Beziehung absolut keinen Aufschluss zu geben, in qualitativer erklärt sie allerdings die jährliche Periode, da auch sie den Wassergehalt der Luft als negativ geladen ansieht. Über die Provenienz dieser Ladung habe ich die Annahme gemacht, dass dieselbe durch Convection von der Erdoberfläche mitgenommen werde, Sohncke sucht ihre Ursache dagegen in einer Reibung der Eis- und Wassertheilchen aneinander längs der Temperaturfläche von 0°, wobei die Eistheilchen im Winter ihre Ladung noch von Reibungen im Sommer her behalten haben sollen! Arrhenius endlich geht auch von einer ursprünglichen negativen Ladung der Erde aus und schreibt der Luft unter dem Einflusse der Sonnenstrahlung eine eigenthümliche elektrolytische Leitung zu, der zufolge sich die Ladung der Erdoberfläche theilweise dem in der Luft enthaltenen Wasser und den Wolken mittheilt. Auch wird dabei auf die bekannte Thatsache verwiesen, dass negative Ladungen sich von blanken Metalloberflächen bei Belichtung rasch entfernen. Von diesen drei Annahmen erscheint mir immer noch die erste als die annehmbarste; was speciell die letzte betrifft, so muss noch bemerkt werden, dass es Arrhenius nicht gelungen ist, eine elektrolytische Leitung der Luft bei Drucken über 20 *mm* zu constatiren und dass ein Fortgehen der Ladung durch Belichten eben nur bei ganz blanken Metallen, bei Substanzen aber, wie sie die Erdoberfläche darbietet, absolut

---

[1] Vergl. Münchener Akademie, Februar 1888.

[2] Meteorologische Zeitschrift, August 1888.

nicht erfolgt. Dies geht unter Anderem aus den Beobachtungen von Lampa[1] an trockenen und nassen Gesteinen, Pflanzen etc. hervor.

Arrhenius stützt seine Theorie hauptsächlich durch die Reciprocität im jährlichen Gange von Potentialgefälle und Aktinometer; diese Reciprocität besteht, wie schon die Tabellen von Quetelet beweisen, unzweifelhaft, dagegen ist es fraglich, ob beide Erscheinungen, Luftelektricität und Sonnenstrahlung, desshalb auch in ursächlichem Zusammenhange mit einander stehen müssen. Ist, wie ich angenommen habe, für das Potentialgefälle der Dunstdruck das Massgebende, die Sonnenstrahlung direct aber ohne Belang, so ergibt sich gleichwohl obige Reciprocität von selbst. Dagegen scheinen mir einige der Tropenbeobachtungen gegen die Annahme zu sprechen, dass mit einer stärkeren Insolation auch ein niedrigeres Potentialgefälle verbunden ist. So wurden z. B. die Beobachtungen in Bombay und die in Ceylon bei einer gleichen Mitteltemperatur von 26° C. angestellt, die Insolation dürfte also an beiden Orten sehr nahe die gleiche gewesen sein; nichtsdestoweniger sind die Werthe in Bombay bedeutend höher als die von Ceylon — 73 gegen 56 — was seinen Grund eben darin hat, dass der Dunstdruck an letzterem Orte viel höher war als an ersterem.

Auch auf dem Hochplateau von Newara Eliya, in 2000 *m* Seehöhe, ist die Insolation unzweifelhaft viel grösser als in Mount Lavinia an der Küste; dennoch wurde an ersterem Orte ein Potentialgefälle von 83 im Mittel, gegen 56 an der Küste gefunden.

3. Einen Einfluss der relativen Feuchtigkeit auf die Grösse des Potentialgefälles lassen die Beobachtungen in den Tropen ebensowenig erkennen, wie die aus unseren Breiten; ein solcher Einfluss lässt sich auch vom Standpunkte der hier vertretenen Theorie aus nicht erwarten. Die Theorien von Sohncke und Arrhenius dagegen sind beide an das Vorhandensein von flüssigem Wasser in der Atmosphäre gebunden, und da das Auftreten des letzteren vom Sättigungsgrade der Luft abhängt, so würde daraus allerdings ein Einfluss der relativen Feuchtigkeit

[1] Anzeiger der Wiener Akademie, 1890, 17. April.

folgen. Da wir aber letztere nur an der Erdoberfläche beobachten, so hält es schwer, sich über die Grösse dieses Einflusses ein Urtheil zu bilden, zumal da die beiden Theorien in ihren Voraussetzungen eine Reihe ganz unbestimmter Grössen enthalten, über die man aller Voraussicht nach niemals wird Aufschluss erhalten können.

4. Bezüglich der täglichen Periode hat sich das Resultat ergeben, dass eine solche in den Tropen nicht deutlich ausgeprägt ist, jedenfalls nicht angenähert so scharf, wie in unseren Gegenden. Am Meere waren zuweilen zwei Maxima und Minima, zuweilen gar keine zu bemerken, in Ceylon zeigte sich ein sehr flaches Maximum in den Vormittagsstunden vieler Tage, dagegen waren die übrigen Zeiten von allen regelmässigen Schwankungen frei.

Keine der bisherigen Theorien vermag für die tägliche Periode eine auch nur einigermassen genügende Erklärung zu geben; wenn Sohncke und Arrhenius glauben, eine solche in dem Auf- und Absteigen der Temperaturfläche von 0° und der Wolken im Laufe eines Tages gefunden zu haben, so beruht dies wieder auf dem trügerischen Scheine einer qualitativen Übereinstimmung. Ich hätte dieselbe natürlich auch für meine Theorie in Anspruch nehmen können — in Bezug auf das Vorhandensein negativ elektrischer Massen in der Luft stimmen ja alle drei Theorien überein — habe sie aber von Anfang an verworfen, da ich, vorläufig wenigstens, keine Möglichkeit sehe, von dieser Vorstellung aus auch zu einer befriedigenden quantitativen Übereinstimmung mit der Erfahrung zu kommen.[1] Das Herabsinken der Luftmassen kann nur dann einen merklichen Einfluss auf das Potentialgefälle gewinnen, wenn es sich nicht in einer ausgedehnten Fläche gleichzeitig, sondern ganz local über dem Beobachtungsorte vollzieht. Eine Rechnung zeigt, dass z. B. zur Hervorbringung der Maxima, wie sie in St. Gilgen beobachtet wurden, ein Stück der Temperaturfläche 0° C. von nur 2—3 *km* Ausdehnung im Laufe einer halben Stunde sich hätte von 4000 *m*

[1] Es ist mir ganz unverständlich, warum Arrhenius (l. c.) mir die Absicht zuschreibt, die tägliche Periode durch die absolute Feuchtigkeit erklären zu wollen; ich habe im Gegentheil stets ausdrücklich betont, dass diese beiden Erscheinungen nichts mit einander zu thun haben.

Höhe bis in die Nähe des Erdbodens senken müssen, ohne dass die benachbarten Theile dieser Fläche dabei ihre Lage ändern. Auch wechselt zu den Zeiten der Maxima die absolute Grösse des Potentialgefälles oft im Laufe einer Minute derart beträchtlich, dass die obige Erklärungsweise ganz unanwendbar erscheint.

Es handelt sich hier offenbar um ganz locale Vorgänge in nächster Nähe des Beobachtungsortes, Vorgänge, die vielleicht durch Temperaturänderungen in der Luft bedingt sind, deren Natur aber vorläufig gänzlich unaufgeklärt ist. Nur ein eingehendes Studium dieser Erscheinung, namentlich durch gleichzeitige Messungen an benachbarten Orten, wird darüber Aufschluss geben können.

5. Schliesslich sei noch erwähnt, dass die Beobachtungen auf offenem Meere in einer Entfernung von circa 500 Seemeilen vom Lande ganz dieselben Resultate ergaben, wie die Landbeobachtungen; hier kann von einer Verunreinigung der Luft wohl kaum mehr die Rede sein, und es beweist dies, dass auch die Landbeobachtungen durch solche nicht merklich gestört waren. Da am Meere auch das Auftreten der Maxima beobachtet wurde, so können auch diese am Lande nicht störenden Einflüssen in der Nähe des Beobachtungsortes zugeschrieben werden.

Über den scheinbaren Zusammenhang der heliocentrischen Perihellänge mit der Perihelzeit der Kometen

von

Dr. J. Holetschek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1890.)

Die Kometen werden, abgesehen von ihrer wahren Grösse, umso leichter sichtbar, je bedeutender die Helligkeit ist, welche sie für uns erreichen können. Für einen bestimmten Kometen wird diese Helligkeit am grössten, wenn seine Erdnähe, soweit es möglich ist, mit seiner Sonnennähe zusammentrifft. Je mehr die Kometen diese Bedingung erfüllen, je kleiner also die Differenz zwischen der heliocentrischen Länge des Perihels l und der während des Periheldurchganges T stattfindenden heliocentrischen Länge der Erde $L \pm 180°$ ist, desto leichter sind sie wahrzunehmen und desto mehr werden sie unter den bekannten Kometen das Übergewicht haben.

Dass diese Folgerung durch die Erfahrung im Allgemeinen bestätigt wird, habe ich in der Abhandlung „Über die Richtungen der grossen Axen der Kometenbahnen" gezeigt. Mehrere Umstände, insbesondere aber der Wunsch, von jedem Kometen zu wissen, wie er sich zur Regel verhält, haben mich veranlasst, die scheinbare Beziehung zwischen der Perihellänge und der Perihelzeit einer neuen, zwar nicht im Wesen, wohl aber in der Form geänderten Betrachtung zu unterwerfen, deren Resultat den Inhalt der vorliegenden Abhandlung bildet.

Da der Nachweis dieser Beziehung in der genannten Abhandlung mehr Mittel als Zweck war, indem er hauptsächlich geführt wurde, um zu zeigen, dass die etwas dichtere Ansammlung der Perihellängen bei 90° und 270° eine specielle Folge dieser Beziehung ist, sind die beiden Beziehungen nicht überall mit der

erforderlichen Strenge auseinandergehalten worden. In dieser Hinsicht muss namentlich zu Seite 23 und 24 (Unterscheidung, ob ein Komet der nördlichen oder südlichen Erdhemisphäre zuzuzählen ist) behufs Klarstellung der Sache hier die Berichtigung beigefügt werden, dass die erste, allgemeine Beziehung, nämlich die relative Kleinheit der Differenzen $l—L \pm 180°$, für kleine Periheldistanzen $l—L$, an keine Hemisphäre gebunden ist, sondern für die Erde überhaupt gilt und nur die zweite, weit weniger hervortretende Beziehung, nämlich die geringe Anhäufung der Perihellängen bei 90° und 270° eine Folge des Standes der meisten Beobachter unter höheren, namentlich nördlichen, geographischen Breiten ist.

Der besondere Zweck der früheren Untersuchung ist durch ein Verfahren erreicht worden, welches zwar für den Nachweis, dass die zur Anhäufung der Perihellängen bei 90° und 270° beitragenden Kometen grösstentheils in den Sommer- und Wintermonaten durch das Perihel gehen, sehr geeignet ist, aber insofern ein indirecte genannt werden muss, als nicht heliocentrische Längen unter einander verglichen wurden, sondern die Erd- oder Sonnenlängen durch die zugehörigen Jahrestage ersetzt waren. Da nämlich theoretisch jedem Zeitpunkt T eine aus der Relation $l = L \pm 180°$ folgende heliocentrische Länge des Perihels l entspricht, so wurden die Perihellängen der Kometen in Gruppen von je 30° abgetheilt und die Periheldurchgänge der zu einer solchen Gruppe gehörenden Kometen nach Monaten, ohne Rücksicht auf das Jahr, zusammengefasst.

Dieses Verfahren lässt wohl das Übergewicht der für die obige Relation stimmenden Kometen deutlich hervortreten, hat aber Unsicherheiten an den Grenzen zur Folge, weil die Dauer unserer Monate mit dem Verweilen der Erde oder Sonne in den einzelnen, je 30° Länge umfassenden Strecken der Ekliptik nicht gleichen Schritt hält. Ähnliche Grenzüberschreitungen sind auch durch die Reduction sämmtlicher Perihelpunkte auf das gemeinschaftliche Äquinoctium 1850·0 entstanden. In Folge dieser Reduction lassen sich zwar alle Perihelpunkte bezüglich ihrer Lage an der Himmelssphäre leicht mit einander vergleichen, anderseits stimmen aber die Perihellängen bezüglich ihres Äquinoctiums mit den durch die Monats- oder Jahrestage definirten

Sonnenlängen umsoweniger überein, je weiter die Jahre zurückliegen. Dieser Umstand hat übrigens nur in wenigen Fällen eine merkliche Folge gehabt, weil nicht bestimmte Tage, sondern nur Monate überhaupt in Rechnung gezogen worden sind.

Alle diese Unsicherheiten werden aber vollständig beseitigt, wenn man, wie ich es in dem nachfolgenden Verzeichniss gethan habe, für jeden Kometen die Differenz $l—L \pm 180°$, bei kleinen Periheldistanzen die Differenz $l—L$ bildet, worin die Längen l und L für denselben Kometen auf dasselbe Äquinoctium bezogen sind, wofür sich natürlich das jedesmalige Äquinoctium des Jahres der betreffenden Kometenerscheinung empfiehlt. Dieses Verfahren hat den Vorzug, dass die Untersuchung durch Rücksichtnahme auf die zweite, specielle Beziehung nicht mehr unterbrochen zu werden braucht, und dass die Differenzen $l—L \pm 180°$ und $l—L$ direct erkennen lassen, bis zu welchem Grade jeder Komet für sich die Regel bestätigt oder anderen Falles nicht bestätigt.

Nur eine Unsicherheit bleibt noch übrig, nämlich die Wahl der Grenze für kleine Periheldistanzen, also für solche Kometen, die nicht während des Perihels, sondern nur auf dem Hin- oder Rückweg in die Erdnähe gelangen können. Früher war diese Unterscheidung gar nicht nöthig, weil das Perihelschema ganz allgemein nach der Relation $l = L \pm 180°$ angelegt werden konnte, ohne Rücksicht darauf, ob die betreffenden Kometen grosse oder kleine Periheldistanzen haben; bei dem jetzigen Verfahren aber ist dieser Trennung nicht auszuweichen.

Als Grenze $q = 0·5$ anzunehmen, ist zwar naheliegend, hat aber zur Folge, dass sich noch eine erhebliche Anzahl von Kometen vorfindet, die in der Nähe des Perihels beobachtet worden sind und doch ziemlich kleine Periheldistanzen, nämlich zwischen 0·3 und 0·5 besitzen, die also eher für die Relation $l = L \pm 180°$ als für $l—L$ sprechen, so dass bei dieser Unterscheidung in der Übersicht ausser dem Maximum bei 0° noch ein secundäres Maximum bei 180° entsteht.

Um dieses zu vermeiden, habe ich als obere Grenze für kleine Periheldistanzen $q = 0·30$ angenommen, also für $q > 0·30$ die Differenz $l—L \pm 180°$, für $q < 0·30$ die Differenz $l—L$ gebildet, selbst auf die Gefahr hin, dass in Folge dieser Trennung

manche Kometen mit Periheldistanzen zwischen 0·3 und 0·5, welche sonst zu Gunsten der Relation $l = L$, also überhaupt für die Regel gesprochen hätten, jetzt gegen die Relation $l = L \pm 180°$, also nicht für die Regel sprechen. Würde dieser Fall öfter eintreten, so müsste auch er ein kleines Maximum bei 180° hervorrufen; da aber ein solches, wie man aus den späteren Zahlen sehen wird, in der Gesammtzahl der Kometen fast gar nicht, bei Untersuchung kleiner Zeiträume, also bei specieller Betrachtung einzelner Kometen nur hie und da zu bemerken ist, scheint die Grenze $q = 0·30$ doch ziemlich zweckentsprechend gewählt zu sein. Sie kommt übrigens, nebenbei bemerkt, der Periheldistanz des Mercur, $q = 0·3075$, sehr nahe. Selbstverständlich macht diese für die vorliegende Untersuchung am passendsten erscheinende Abgrenzung keinen Anspruch auf allgemeine Giltigkeit, indem es für andere Zwecke geeigneter sein kann, die Grenze für Kometen mit kleiner Periheldistanz enger, oder nach Umständen noch weiter zu ziehen.

Was die Auswahl der Kometen betrifft, so habe ich das Verzeichniss auch für die älteren Jahrhunderte möglichst vollständig zu machen gesucht. Ausgeschlossen wurden nebst dem Kometen —371, für welchen nicht einmal der Monat des Periheldurchganges zu ermitteln ist, nur jene Kometen, welche mit grösserer oder geringerer Berechtigung für Erscheinungen des Kometen von Halley gehalten werden. Dieser selbst ist beim Jahr 1378 aufgeführt, wie denn überhaupt alle periodischen Kometen nur mit der ersten gesicherten Erscheinung in Rechnung gezogen sind. Liegen für einen Kometen zwei sehr verschiedene Elementensysteme vor, so sind, falls kein Grund besteht, das eine dem andern unbedingt vorzuziehen, beide in das Verzeichniss aufgenommen worden.

Durch die Aufnahme sehr unsicherer Bahnen können allerdings manche Kometen in das Verzeichniss kommen, bei denen die Differenz $l—L \pm 180°$ oder $l—L$ kaum eine erste Annäherung sein dürfte; da aber die aus solchen Bahnen abgeleiteten Differenzen über die Strecke 0° bis $\pm$ 180° im Allgemeinen vermuthlich ebenso vertheilt sind wie die anderen, also wahrscheinlich in nahe demselben Verhältnisse für oder gegen die Regel sprechen, darf man wohl voraussetzen, dass durch unsichere Bahnen das

Sonne ... liegt ... me M ... Verhältniss zwischen kleineren und grösseren Werthen von $l—L \pm 180°$ oder $l—L$, welches ja den Kern der Sache bildet, nicht wesentlich geändert wird.

Bei dieser Gelegenheit muss ich erwähnen, dass meine Bemerkung auf S. 25 der vorigen Abhandlung, Herr A. Svedstrup habe in seinem Verzeichniss der Perihelpositionen (Astr. Nachr., Bd. 107) den Kometen 1880 V doppelt gezählt, nicht gerechtfertigt war; Svedstrup hat nämlich, wie ich erst später gesehen habe, auch einen von Cooper entdeckten, aber sehr unvollkommen beobachteten Kometen berücksichtigt, dessen Perihelzeit nach dem Elementensystem in Astr. Nachr., Bd. 100, S. 73, zufällig fast denselben Tag, November 9, trifft. Dieser Komet ist jetzt auch von mir in das nun folgende Verzeichniss aufgenommen worden.

In diesem Kometenverzeichniss ist T der Zeitpunkt des Periheldurchganges in mittlerer Pariser Zeit bis auf zwei Decimalen des Tages, L die diesem Moment entsprechende Länge der Sonne, genommen aus der Connaissance des temps, für die früheren Jahrhunderte aus den Sonnentafeln von Hansen. Die Columnen l und b enthalten die Länge und Breite des Perihelpunktes, bezogen auf das Äquinoctium des Jahres, dem der betreffende Komet angehört; da die von Peirce berechneten Bahnen der Kometen —136, − 68 und 1491 auf 1850·0 bezogen sind, wurden die Längen l durch Subtraction der Präcession auf das Jahr der Kometenerscheinung übertragen. Die nächste Columne enthält die Periheldistanz q, und die beiden letzten zeigen die entscheidenden Differenzen, nämlich für $q > 0·30$ die Differenz $l—L \pm 180°$, für $q < 0·30$ die Differenz $l—L$.

T	L	l	b	q	$l—L \pm 180°$	$l—L$
—136 April 29·	35°3	201°8	— 3°4	1·01	— 13°5	
— 68 Juli	96·0	307·2	+28·0	0·79	+ 31·2	
	124·6				+ 2·6	
240 Nov. 10	228·5	268·0	+43·5	0·37	—140·5	
539 Oct. 20·62	209·3	313·3	± 9·7	0·34	— 76·0	
565 Juli 9	108·3	105·8	+56·1	0·72	+177·5	
565 Juli 14·5	113·5	89·3	+57·5	0·83	+155·8	
568 Aug. 29·33	158·2	318·5	+ 1·7	0·91	— 19·7	
574 April 7·29	19·5	139·0	+11·1	0·96	— 60·5	

T	*L*	*l*	*b*	*q*	*l*—*L* ± 180°	*l*—*L*
770 Juni 6·65	78°8	5°2	+59°4	0·60	+106°4	
961 Dec. 30·17	284·6	296·4	+77·2	0·55	—168·2	
1092 Febr. 15·0	332·4	153·1	+14·3	0·93	+ 0·7	
1097 Sept. 21·9	185·2	5·4	+51·8	0·74	+ 0·2	
1231 Jan. 30·31	317·9	135·0	+ 5·2	0·95	— 2·9	
1264 Juli 19·80	124·4	301·2	+ 5·7	0·82	— 3·2	
1299 März 31·32	18·1	342·8	+65·0	0·32	+144·7	
1337 Juni 15·08	91·6	2·1	+40·5	0·83	+ 90·5	
1351 Nov. 26·5	252·7	69?	—	1·0	(— 4)	
1362 März { 2·3	350·2	228·5	+ 5·3	0·47	+ 58·8 }	
1362 März 11·2	359·0	220·7	+10·8	0·46	+ 41·7 }	
1366 Oct. 21·46	216·5	46·9	+ 4·9	0·98	+ 10·4	
1378 Nov. 8·77	235·1	298·7	+17·0	0·58	—116·4 *E*	
1385 Oct. 16·27	211·7	96·7	+10·4	0·77	+ 65·0	
1402 März 21	9·0	208·8	+55·0	0·38	(+ 19·8)	
1433 Nov. 7·77	234·7	274·0	— 9·0	0·49	—140·7	
1449 Dec. 9·37	267·0	264·1	— 1·3	0·33	+177·1	
1457 Jan. 17·99	307·6	84·2	— 3·4	0·70	— 43·4	
Aug. 8·01	144·1	9·4	— 0·9	0·76	+ 45·3	
1468 Oct. 7·41	203.7	4·1	+39·4	0·85	— 19·6	
1472 Febr. 29·89	350·1	39·6	—13·8	0·48	—130·5	
{1490 Dec. 24·48	282·5	72·2	+37·0	0·74	— 30·8 }	
{1491 Jan. 4·91	294·1	89·9	+24·1	0·76	— 24·2 }	
1499 Sept. 6·19	172·4	358·2	+11·4	0·95	+ 5·8	
1500 Mai 17	65·4	304·6	+19·3	1·40	+ 59·2	
1506 Sept. 3·67	170·2	259·5	—38·7	0·39	— 90·7	
1532 Oct. 18·84	215·1	108·3	+12·9	0·52	+ 78·2	
1533 Juni {14·89	93·0	218·8	—27·9	0·33	(— 54·2)	
1533 Juni 16·82	94·8	108·0	+12·4	0·20		(+ 13°2)
1556 April 22·19	42·0	278·1	+31·8	0·49	+ 56·1	
1558 {Aug. 10·52	147·1	331·8	+ 2·7	0·58	(+ 4·7)	
1558 Sept. 13·55	180·3	187·1	+54·3	0·28		(+ 6·8)
1577 Oct. 26·95	223·9	160·3	—69·5	0·18		— 63·6
1580 Nov. 28·50	257·1	107·6	+64·6	0·60	+ 30·5	
1582 Mai { 6·42	55·4	248·2	—23·3	0·17		—172·2 }
1582 Mai 7·35	56·3	264·5	—52·3	0·04		—151·8 }
Neuer Styl.						
1585 Oct. 8·03	195·1	9·3	— 2·9	1·09	— 5·8	
1590 Febr. 8·03	319·5	214·0	—23·0	0·57	+ 74·5	
1593 Juli 18·57	116·1	164·7	+12·1	0·09		+ 48·6
1596 Juli 25·22	122·7	284·1	+42·7	0·57	— 18·6	

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1618	Aug.	17·13	144°4	316°8	+ 8°9	0·51	— 7°6	
	Nov.	8·36	226·4	7·2	—35·2	0·39	— 39·2	
1652	Nov.	12·66	231·5	70·7	—58·2	0·85	+ 19·2	
1661	Jan.	26·89	308·0	110·8	+17·4	0·44	— 17·2	
1664	Dec.	4·49	253·7	128·7	—16·0	1·03	+ 55·0	
1665	April	24·23	34·9	54·1	+23·1	0·11		+ 19°2
1668	Febr.	{24·79	336·5	37·6	—11·8	0·25		+ 61·1 }
		{28·81	340·5	279·3	+35·4	0·01		— 61·2 }
1672	März	1·45	342·2	99·0	+69·2	0·70	— 63·2	
1677	Mai	6·03	46·4	106·3	+75·7	0·28		+ 59·9
1678	Aug.	18·32	146·0	322·8	+ 1·0	1·15	— 3·2	
1680	Dec.	18·00	267·5	267·5	— 8·1	0·01		0·0
1683	Juli	13·10	111·1	101·3	+82·9	0·56	+170·2	
1684	Juni	8·27	78·6	254·8	—26·7	0·96	— 3·8	
1686	Sept.	15·83	173·7	74·2	+34·5	0·34	+ 80·5	
1689	{Nov.	29·21	248·2	270·0	— 0·6	0·02		+ 21·8 }
	{Dec.	2·0	251·1	278·6	+35·3	0·01		+ 27·5 }
1695	{Oct.	24·0	211·3	278·5	+35·7	0·01		(+ 67·2)
	{Nov.	9·71	228·0	58·4	— 8·8	0·84	(+ 10·4)	
1698	Oct.	17·02	201·6	274·3	+ 5·2	0·73	—110·3	
1699	Jan.	13·36	294·0	187·0	+62·0	0·74	+ 73·0	
1701	Oct.	17·42	204·3	130·0	+ 9·9	0·59	+105·7	
1702	März	13·61	353·1	138·9	— 3·4	0·65	— 34·2	
1706	Jan.	30·21	310·5	57·2	+45·0	0·43	— 73·3	
1707	Dec.	11·99	259·8	53·5	+27·1	0·86	— 26·3	
1718	Jan.	14·91	295·0	122·5	+ 3·2	1·03	+ 7·5	
1723	Sept.	27·63	184·4	33·6	—21·5	1·00	+ 29·2	
1729	Juni	16·16	85·3	313·0	+10·2	4·05	+ 47·7	
1737	Jan.	30·35	311·1	326·4	+18·1	0·22		+ 15·3
	Juni	2·25	72·1	282·7	+42·6	0·83	+ 30·6	
1739	Juni	17·42	86·1	92·3	+53·0	0·67	—173·8	
1742	Febr.	8·68	320·2	198·3	—28·9	0·77	+ 58·1	
1743	Jan.	10·85	290·8	93·0	+ 1·0	0·84	— 17·8	
	Sept.	20·65	177·7	237·6	+38·7	0·52	—120·1	
1744	März	1·35	341·6	205·4	+20·5	0·22		—136·2
1746	Febr.	15	326·7	140·1	+ 1·6	0·95	— 6·6	
1747	März	3·31	342·9	314·5	—49·0	2·20	+151·6	
1748	April	28·79	39·2	231·4	+17·4	0·84	+ 12·2	
	Juni	18·89	88·3	253·9	—57·0	0·63	— 14·4	
1757	Oct.	21·34	208·6	122·9	—12·8	0·34	+ 94·3	
1758	Juni	11·14	80·5	246·3	+33·8	0·22		+165·8

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1759	Nov.	27·01	245°0	69°6	−78°4	0·80	+ 4°6	
	Dec.	16·85	265·2	138·4	− 4·2	0·97	+ 53·2	
1762	Mai	28·34	67·3	159·5	+64·2	1·01	− 87·8	
1763	Nov.	1·87	219·7	81·7	+72·5	0·50	+ 42·0	
1764	Febr.	12·58	323·9	6·4	+50·4	0·56	−137·5	
1766	Febr.	17·37	329·3	139·9	+40·0	0·51	− 9·4	
	April	26·99	37·1	251·2	+ 0·4	0·40	+ 34·1 *E*	
1769	Oct.	7·63	195·1	150·7	−19·6	0·12		− 44·4
1770	Aug.	13·55	141·1	356·2	− 1·1	0·67	+ 35·1 *E*	
	Nov.	22·24	240·5	210·0	−30·9	0·53	+149·5	
1771	April	19·14	29·3	103·7	+10·9	0·90	−105·6	
1772	Febr.	16·66	328·1	109·1	− 9·2	0·99	− 39·0 *E*	
1773	Sept.	5·61	163·7	94·7	−39·0	1·13	+111·0	
1774	Aug.	14·75	142·4	353·9	+43·6	1·43	+ 31·5	
1779	Jan.	4·09	284·2	83·0	+28·4	0·71	− 21·2	
1780	Sept.	30·76	188·6	261·0	−43·1	0·10		+ 72·4
	Nov.	28·85	247·8	273·7	−66·2	0·52	−154·1	
1781	Juli	7·20	105·8	259·4	+23·6	0·76	− 26·4	
	Nov.	29·53	248·3	19·0	+23·6	0·96	− 49·3	
1783	Nov.	19·94	238·0	51·9	− 3·8	1·46	− 6·1 *E*	
1784	Jan.	21·21	301·4	72·4	−18·4	0·71	− 49·0	
1785	Jan.	27·33	308·4	93·4	−24·0	1·14	− 35·0	
	April	8·42	19·4	248·1	+52·7	0·43	+ 48·7	
1786	Jan.	30·88	311·8	156·6	− 0·6	0·33	+ 24·8 *E*	
	Juli	8·57	106·9	170·2	−27·7	0·39	−116·7	
1787	Mai	10·83	50·5	3·3	+47·5	0·35	+132·8	
1788	Nov.	10·32	229·1	99·7	+10·5	1·06	+ 50·6	
	Nov.	20·31	239·2	6·6	+27·2	0·76	− 52·6	
1790	Jan.	16·80	297·5	55·2	+26·8	0·75	− 62·3	
	Jan.	30·88	311·8	105·3	−21·6	1·04	− 26·5 *E*	
	Mai	21·25	60·7	251·1	+51·4	0·84	+ 10·4	
1792	Jan.	13·57	293·7	31·1	+16·1	1·29	− 82·6	
	Dec.	27·33	276·9	126·0	+24·1	0·97	+ 29·1	
1793	Nov.	4·85	223·4	248·1	−48·7	0·40	−155·3	
	Nov.	20·22	238·9	61·5	+47·3	1·50	+ 2·6	
1796	April	2·83	14·2	195·2	− 3·9	1·58	+ 1·0	
1797	Juli	9·11	107·7	44·0	−49·7	0·53	+116·3	
1798	April	4·51	15·4	109·6	−11·7	0·49	− 85·8	
	Dec.	31·56	280·7	42·1	−22·8	0·78	− 58·6	
1799	Sept.	7·20	165·0	0·3	+50·6	0·84	+ 15·3	
	Dec.	25·90	274·7	158·8	+42·1	0·63	+ 64·1	

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1801	Aug.	8·56	135°9	184°6	—13°1	0·26		+ 48°7
1802	Sept.	9·90	166·9	322·6	+18·2	1·09	— 24°3	
1804	Febr.	13·59	324·2	160·4	—23·1	1·07	+ 16·2	
1806	Dec.	28·93	277·1	102·7	—24·1	1·08	+ 5·6	
1807	Sept.	18·75	175·3	268·6	+ 3·7	0·65	— 86·7	
1808	Mai	12·96	52·4	75·6	—43·4	0·39	—156·8	
	Juli	12·17	110·0	245·3	+28·3	0·61	— 44·7	
1810	Oct.	6·24	192·8	84·5	+53·8	0·97	+ 71·7	
1811	Sept.	12·26	169·0	107·9	+60·4	1·04	+118·9	
	Nov.	10·99	228·2	51·9	—21·8	1·58	+ 3·7	
1812	Sept.	15·33	172·8	78·6	—18·5	0·78	+ 85·8 *E*	
1813	März	4·53	344·1	69·3	— 3·3	0·70	— 94·8	
	Mai	19·52	58·5	218·5	—24·7	1·22	— 20·0	
1815	April	26·03	35·4	141·0	+39·6	1·21	— 74·4 *E*	
1816	März	1·35	341·2	276·4	—34·3	0·05		— 64·8
1818	Febr.	3·22	314·4	76·3	— 0·2	0·70	— 58·1	
	Febr.	25·97	337·3	249·8	+67·7	1·20	+ 92·5	
	Dec.	4·94	252·7	95·4	—10·6	0·86	+ 22.7	
1819	Juni	27·72	95·6	275·9	+13·3	0·34	+ 0·3	
	Juli	18·91	115·8	275·0	+ 3·4	0·77	— 20·8 *E*	
	Nov.	20·25	237·6	67·4	— 1·5	0·89	+ 9·8 *E*	
1821	März	21·54	1·1	231·8	+10·3	0·09		—129·3
1822	Mai	5·61	45·0	186·7	—12·2	0·50	— 38·3	
	Juli	15·85	113·1	225·8	—30·0	0·85	— 67·3	
	Oct.	23·78	210·3	272·1	— 0·8	1·15	—118·2	
1823	Dec.	9·45	257·1	295·7	+27·6	0·27		+ 38·6
1824	Juli	11·51	109·5	250·1	—20·9	0·59	— 39·4	
	Sept.	29·06	186·3	1·1	+54·3	1·05	— 5·2	
1825	Mai	30·55	69·2	262·2	+53·4	0·89	+ 13·0	
	Aug.	18·72	145·8	12·9	+ 2·7	0·88	+ 47·1	
	Dec.	10·69	258·9	321·2	—32·6	1·24	—117·7	
1826	April	21·92	31·7	119·8	—39·4	2·01	— 91·9	
	April {	26·95	36·6	222·5	+ 4·7	0·65	(+ 5·9)	
		29·05	38·6	35·8	+ 0·4	0·19		(— 2·8)
	Oct.	8·96	195·6	56·5	+ 6·0	0·85	+ 40·9	
	Nov.	18·41	236·1	238·8	—80·4	0·03		+ 2·7
1827	Febr.	4·93	315·9	11·3	+28·3	0·51	—124·6	
	Juni	7·85	76·7	302·9	+14·1	0·81	+ 46·2	
	Sept.	11·70	168·6	258·5	—52·6	0·14		+ 89·9
1830	April	9·30	19·4	211·8	+ 2·1	0·92	+ 12·4	
	Dec.	27·67	276·0	318·1	+18·6	0·13		+ 42·1

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1832	Sept.	25·58	182°9	234°0	—16°6	1·18	—128°9	
1833	Sept.	10·21	167·7	222·8	— 7·2	0·46	—124·9	
1834	April	2·83	13·1	276·3	+ 4·6	0·51	+ 83·2	
1835	März	27·58	6·7	208·0	— 4·6	2·04	+ 21·3	
1840	Jan.	4·42	283·7	181·9	+49·6	0·62	+ 78·2	
	März	13·08	353·1	69·3	+19·9	1·22	—103·8	
	April	2·42	13·2	357·0	+41·2	0·75	+163·8	
	Nov.	13·65	231·9	39·8	+37·9	1·48	— 12·1	
1842	Dec.	15·96	264·1	1·2	—56·6	0·50	— 82·9	
1843	Febr.	27·42	338·7	280·4	+35·3	0·01		— 58°3
	Mai	6·06	45·3	295·6	+41·1	1·62	+ 70·3	
	Oct.	17·14	203·6	49·2	— 3·9	1·69	+ 25·6 *E*	
1844	Sept.	2·48	160·5	342·5	— 2·9	1·19	+ 2·0 *E*	
	Oct.	17·35	204·6	189·8	—22·9	0·86	+165·2	
	Dec.	13·68	262·3	296·7	+ 1·6	0·25		+ 34·4
1845	Jan.	8·16	288·3	100·5	+41·5	0·91	— 7·8	
	April	21·04	31·2	181·8	—21·0	1·25	— 29·4	
	Juni	5·68	75·2	268·8	+46·7	0·40	+ 13·6	
1846	Jan.	22·10	302·2	95·8	—16·0	1·48	— 26·4	
	Febr.	25·37	336·9	114·6	+ 7·0	0·65	— 42·3 *E*	
	März	5·55	345·1	78·7	+12·8	0·66	— 86·4 *E*	
	Mai	27·90	66·6	91·7	+55·9	1·38	—154·9	
	Juni	1·22	70·7	242·7	—10·1	1·53	— 8·0 *E*	
	Juni	5·49	74·8	160·7	+28·9	0·63	— 94·1	
	Oct.	29·92	216·6	101·0	+49·5	0·83	+ 64·4	
1847	März	30·29	9·4	268·7	—46·3	0·04		—100·7
	Juni	4·70	73·8	167·4	+31·7	2·12	— 86·4	
	Aug.	9·34	136·5	235·1	+83·3	1·77	— 81·4	
	Aug.	9·35	136·5	26·0	+26·4	1·48	+ 69·5	
	Sept.	9·55	166·7	80·8	+14·7	0·49	+ 94·1 *E*	
	Nov.	14·41	231·9	260·4	—70·7	0·33	—151·5	
1848	Sept.	8·05	166·0	0·1	—79·1	0·32	+ 14·1	
1849	Jan.	19·35	299·7	37·8	—27·9	0·96	— 81·9	
	Mai	26·50	65·5	216·8	+30·3	1·16	— 28·7	
	Juni	8·21	77·7	241·2	—50·1	0·89	— 16·5	
1850	Juli	23·53	120·7	273·1	— 0·5	1·08	— 27·6	
	Oct.	19·85	206·1	82·6	—35·1	0·57	+ 56·5	
1851	Juli	8·68	106·3	323·1	+ 1·3	1·17	+ 36·8 *E*	
	Aug.	26·24	152·8	310·2	+38·1	0·98	— 22·6	
	Sept.	30·80	187·5	13·1	—61·1	0·14		—174·4

T			L	l	b	q	l−L ± 180°	l−L
1852	April	19·59	30°1	290°7	+27°1	0·91	+ 80°6	
	Oct.	12·76	200·1	35·6	+33·3	1·25	+ 15·5 E	
1853	Febr.	24·01	335·8	153·3	−20·1	1·09	− 2·5	
	Mai	9·83	49·5	210·1	−16·7	0·91	− 19·4	
	Sept.	1·71	159·6	315·9	+ 8·4	0·31	− 23·7	
	Oct.	16·61	203·6	294·2	−60·0	0·17		+ 90°6
1854	Jan.	3·94	283·8	50·7	+ 8·3	2·04	− 53·1	
	März	24·02	3·5	167·7	+76·2	0·28		+164·2
	Juni	22·00	90·7	298·4	+66·0	0·65	+ 27·7	
	Oct.	27·52	214·3	102·4	+30·1	0·80	+ 68·1	
	Dec.	15·72	264·0	165·6	−13·5	1·36	+ 81·6	
1855	Febr.	5·05	316·2	214·8	−28·0	2·19	+ 78·6	
	Mai	30·15	68·6	239·3	+ 8·7	0·57	− 9·3	
	Nov.	25·40	243·1	85·6	− 5·8	1·23	+ 22·5	
1857	März	21·38	1·2	129·8	+58·3	0·77	− 51·4	
	Juli	17·99	115·7	231·7	+38·0	0·37	− 64·0	
	Aug.	24·00	151·2	21·6	− 0·5	0·75	+ 50·4	
	Sept.	30·89	188·1	233·7	+42·9	0·56	−134·4	
	Nov.	19·08	237·2	42·9	+37·6	1·01	− 14·3	
1858	Mai	2·97	42·7	199·5	+ 8·3	1·15	− 23·2	
	Juni	5·30	74·7	192·9	+76·7	0·54	− 61·8	
	Sept.	29·97	187·0	14·5	+43·8	0·58	+ 7·5	
	Oct.	12·84	199·7	2·7	+ 8·6	1·43	− 17·0	
1859	Mai	29·23	67·7	21·5	−76·8	0·20		− 46·2
1860	Febr.	16·65	327·7	149·9	−29·2	1·20	+ 2·2	
	März	5·57	345·7	39·1	+29·4	1·31	−126·6	
	Juni	16·03	85·5	123·1	+73·1	0·29		+ 87·6
	Sept.	22·32	180·0	1·6	−23·3	0·68	+ 1·6	
1861	Juni	3·40	73·2	226·6	−32·8	0·92	− 26·6	
	Juni	11·51	81·0	276·4	−29·8	0·82	+ 15·4	
	Dec.	7·18	255·6	167·0	−18·6	0·84	+ 91·4	
1862	Juni	22·04	90·8	299·6	+ 3·6	0·98	+ 28·8	
	Aug.	22·92	150·0	329·1	+24·8	0·96	− 0·9	
	Dec.	28·18	276·8	133·9	−31·5	0·80	+ 37·1	
1863	Febr.	3·50	314·7	133·1	+73·8	0·79	− 1·6	
	April	4·91	15·1	249·7	+ 3·7	1·07	+ 54·6	
	April	20·87	30·7	256·7	+55·3	0·63	+ 46·0	
	Nov.	9·49	227·1	96·9	− 2·7	0·71	+ 49·8	
	Dec.	27·77	276·1	82·9	+54·4	0·77	− 13·2	
	Dec.	29·17	277·5	133·9	+76·4	1·31	+ 36·4	
1864	Juli	27·82	125·4	184·9	− 9·8	0·63	−120·5	

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1864	Aug.	15·58	143°4	304°2	+ 0°9	0·91	— 19°2	
	Oct.	11·41	198·8	188·0	—48·3	0·93	+169·2	
	Dec.	22·46	271·4	332·7	+41·5	0·77	—118·7	
	Dec.	27·73	276·8	162·3	+ 0·4	1·11	+ 65·5	
1865	Jan.	14·33	294·7	79·2	+68·1	0·03		+144°5
1866	Jan.	11·14	291·3	60·1	+ 2·7	0·98	— 51·2 *E*	
1867	Jan.	19·87	299·9	76·0	— 0·8	1·57	— 43·9 *E*	
	Mai	23·93	62·7	236·3	+ 4·5	1·56	— 6·4 *E*	
	Nov.	6·97	224·6	249·0	+31·1	0·33	—155·6	
1868	Juni	26·48	95·5	274·0	+36·9	0·58	— 1·5	
1869	Oct.	9·86	197·1	128·5	— 7·6	1·23	+111·4	
	Nov.	18·81	237·0	43·0	+ 5·2	1·06	— 14·0 *E*	
1870	Juli	14·09	111·8	311·9	—15·4	1·01	+ 20·1	
	Sept.	2·20	160·0	13·8	— 5·0	1·82	+ 33·8	
	Dec.	19·88	268·3	4·0	+32·7	0·39	— 84·3	
1871	Juni	10·61	79·7	101·5	—42·5	0·65	—158·2	
	Juli	27·04	124·0	93·8	+76·5	1·08	+149·8	
	Dec.	20·39	268·6	311·3	—61·7	0·69	—137·3	
1873	Juni	25·21	94·1	306·0	— 1·1	1·34	+ 31·9 *E*	
	Sept.	10·79	168·6	49·1	—13·7	0·79	+ 60·5	
	Oct.	1·77	189·1	321·2	—48·5	0·38	— 47·9	
	Dec.	1·23	249·6	83·7	— 7·6	0·73	+ 14·1	
1874	März	9·94	349·7	299·3	—58·9	0·04		— 50·4
	März	13·94	353·7	298·7	—14·4	0·89	+125·0	
	Juli	8·86	106·9	286·8	+25·1	0·68	— 0·1	
	Juli	17·71	115·3	9·9	+16·5	1·69	+ 74·6	
	Aug.	26·85	153·8	345·0	+41·8	0·98	+ 11·2	
	Oct.	18·95	205·9	279·3	+16·1	0·51	—106·6	
1877	Jan.	19·19	299·8	198·7	— 5·8	0·81	+ 78·9	
	April	17·65	28·2	271·0	+49·8	0·95	+ 62·8	
	April	26·83	37·1	142·3	+60·5	1·01	— 74·8	
	Juni	27·08	95·9	65·8	+61·2	1·07	+149·9	
	Sept.	11·41	169·2	80·0	+35·7	1·58	+ 90·8	
1878	Juli	20·70	118·2	281·8	+ 2·4	1·39	— 16·4	
1879	April	27·43	37·3	44·7	+ 3·6	0·90	—172·6	
	Aug.	29·25	156·0	320·9	+71·3	0·99	— 15·1	
	Oct.	4·64	191·5	242·1	+61·7	0·99	—129·4	
1880	Jan.	27·45	307·4	281·3	+35·9	0·01		— 26·1
	Juli	1·75	100·6	98·0	+28·6	1·82	+177·4	
	Sept.	6·94	165·1	75·9	—21·7	0·35	+ 90·8	
	Nov.	8·81	227·3	192·6	+48·0	0·39	+145·3	

T			L	l	b	q	l—L ± 180°	l—L
1880	Nov.	9·42	227°9	255°2	+10°2	0·66	—152°7	
1881	Mai	20·44	60·0	305·1	+ 6·1	0·59	+ 65·1	
	Juni	16·45	85·8	268·4	— 5·2	0·73	+ 2·6	
	Aug.	22·31	149·8	327·8	+32·8	0·63	— 2·0	
	Sept.	13·44	171·2	18·8	— 5·0	0·73	+ 27·6 *E*	
	Sept.	14·37	172·1	271·7	+ 5·8	0·45	— 80·4	
	Nov.	19·75	238·1	58·5	+30·6	1·92	+ 0·4	
1882	Juni	10·54	79·9	33·7	—27·7	0·06		— 46°2
	Sept.	17·23	174·7	281·3	+35·2	0·01		+106·6
	Nov.	12·99	231·0	48·2	—73·2	0·96	— 2·8	
1883	Febr.	18·96	330·5	69·7	+66·0	0·76	— 80·8	
	Dec.	25·31	273·7	104·8	+36·8	0·31	+ 11·1	
1884	Aug.	16·49	144·4	306·3	— 4·7	1·28	— 18·1 *E*	
	Nov.	17·80	236·4	19·8	+ 3·1	1·57	— 36·6 *E*	
1885	Aug.	5·69	133·8	272·0	+ 1·5	2·51	— 41·8	
	Aug.	9·86	137·8	229·2	+35·0	0·75	— 88·6	
	Nov.	25·46	243·9	290·0	+23·1	1·08	—133·9	
1886	April	5·97	16·6	206·6	+52·8	0·64	+ 10·0	
	Mai	3·28	43·2	238·6	+59·9	0·48	+ 15·4	
	Mai	4·45	44·3	279·7	+37·8	0·84	+ 55·4	
	Juni	6·79	76·4	229·0	+ 0·7	1·36	— 27·4 *E*	
	Juni	7·40	77·0	13·7	—21·1	0·27		— 63·3
	Nov.	22·39	240·5	7·6	— 2·1	1·00	— 52·9 *E*	
	Nov.	28·38	246·6	261·0	+31·8	1·48	—165·6	
	Dec.	16·50	265·0	65·0	+77·8	0·66	— 20·0	
1887	Jan.	11·24	291·2	281·9	+37·7	0·01		— 9·3
	März	17·04	356·6	105·2	+20·1	1·63	— 71·4	
	März	28·45	7·9	106·0	+22·6	1·01	— 81·9	
	Juni	16·67	85·6	259·6	+ 4·5	1·39	— 6·0	
1888	März	17·01	357·3	245·3	— 0·1	0·70	+ 68·0	
	Juli	31·14	128·8	126·1	+55·7	0·90	+177·3	
	Sept.	13·00	171·1	82·4	—51·0	1·53	+ 91·3	
1889	Jan.	31·18	312·0	16·4	— 4·5	1·81	—115·6	
	Juni	10·61	80·3	75·8	—13·3	2·26	+175·5	
	Juni	20·75	90·0	327·1	+26·7	1·10	+ 57·1	
	Juli	19·29	117·2	280·3	—12·9	1·04	— 16·9	
	Sept.	29·71	187·2	1·4	— 1·7	1·95	— 5·8 *E*	
	Nov.	29·63	248·1	40·6	+ 9·4	1·34	— 27·5 *E*	
1890	Jan.	26·49	307·0	199·6	—16·5	0·27		—107·4
	Juni	1·51	71·4	267·5	+53·5	1·91	+ 16·1	

Betrachtet man die Zahlen der Columne $l—L \pm 180°$, so merkt man sehr bald, dass die kleineren Differenzen, etwa unter $\pm 60°$ am häufigsten, die mittleren, zwischen $\pm 60°$ und $\pm 120°$ liegenden, schon auffallend seltener, und die grössten Differenzen, zwischen $\pm 120°$ und $\pm 180°$, am seltensten vorkommen; es sind also thatsächlich mehr Kometen unter günstigen, als unter ungünstigen Verhältnissen gesehen worden. Die numerischen Werthe der einzelnen Differenzen sagen zugleich, bis zu welchem Grade jeder Komet die Regel bestätigt.

Einen klaren Überblick über die verschiedenen Grade der Bestätigung oder Nichtbestätigung der Regel gewinnt man, wenn man die Kometen mit nahezu gleich grossen Werthen von $l—L \pm 180°$ zusammenzählt und die auf diese Weise entstandenen Summen unter einander vergleicht. Ich habe zu diesem Zwecke als Intervall 30° gewählt. Sind für einen Kometen zwei verschiedene Werthe von $l—L \pm 180°$ gegeben, was jedesmal durch Klammern { } angedeutet ist, so ist stets der grössere, also weniger für die Regel stimmende in Rechnung gezogen. Die Kometen 1490 und 1491, deren Identität fast gewiss ist, sind nur als ein einziger Komet gezählt. Die in Klammern ( ) gesetzten Zahlen sind nicht berücksichtigt, auch wenn sie zu Gunsten der Regel sprechen. Das Resultat dieser Abzählung ist in der Columne *K* der auf der nächsten Seite vorgeführten Übersicht enthalten. Man sieht sofort, dass die ersten, nämlich die zu 0° bis $\pm 30°$ gehörenden Zahlen entschieden das Übergewicht haben; die zu $\pm 60°$ bis $\pm 90°$ gehörenden Zahlen kommen noch nahezu dem Mittel gleich, alle nachfolgenden sind aber weit kleiner.

Unter den Kometen, welche die Regel am meisten bestätigen, sind fast alle periodischen Kometen mit kurzer Umlaufszeit enthalten. Diese der Mehrzahl nach lichtschwachen Gestirne standen also bei ihrer ersten Auffindung unter sehr günstigen Sichtbarkeitsverhältnissen, was mit der Erwägung übereinstimmt, dass die periodischen Kometen, wenn sie auch in mehreren ungünstigen Erscheinungen nicht gesehen werden können, schliesslich doch einmal in einer Jahreszeit durch das Perihel gehen, in welcher die Differenz $l—L \pm 180°$ klein, somit die Helligkeit gross ist. Da also diese Kometen innerhalb eines relativ kurzen Zeitraumes, beispielsweise eines Jahrhunderts, öfter Gelegenheit

haben, nach mehreren ungünstigen Erscheinungen auch wieder einmal eine sehr günstige darzubieten, befinden sie sich gegenüber den nicht periodischen und den periodischen mit sehr grosser Umlaufszeit in einem Vortheil und verschaffen den zu Gunsten der Regel sprechenden Zahlen eine unverdiente Höhe. Um das Schema von diesem Einflusse zu befreien, habe ich die Abzählung auch nach Ausschluss jener Kometen vorgenommen, die entweder durch ihre Wiederkehr ganz bestimmt oder durch die Rechnung mit grosser Wahrscheinlichkeit als elliptisch von kurzer Periode erkannt sind; die letzteren, solange die Umlaufszeit die des Halley'schen Kometen, 76 Jahre, nicht übersteigt. Werden diese 31 Kometen, die im Verzeichniss mit E bezeichnet sind und sich auf die verschiedenen Werthe der Differenz $l—L \pm 180°$ in der aus der Columne E ersichtlichen Weise vertheilen, von der Gesammtzahl K in Abzug gebracht, so bleiben die Zahlen der Columne $K—E$ übrig, welche zeigen, dass trotz der Verkleinerung der ersten Zahlen in der Columne K das bedeutende Übergewicht der unter 30° oder allgemeiner unter 90° liegenden Zahlen, wenn auch etwas abgeschwächt, immer noch geblieben ist.

$l—L \pm 180°$	K	E	$K—E$
0° bis 30°	106	16	90
30 — 60	55	10	45
60 — 90	49	3	46
90 — 120	28	2	26
120 — 150	21	—	21
150 — 180	22	—	22
	281	31	250

Die Kometen mit kleiner Periheldistanz, also mit $q < 0\cdot30$ verhalten sich zu der Forderung, dass die kleinen Werthe der Differenz $l—L$ die grossen überwiegen sollen, in folgender Weise:

$l—L$		K
0° bis	30°	7
30	60	12
60	90	
90	120	4
120	150	3
150	180	4
		36

Kleinere Werthe der Differenz sind also auch hier häufiger als grössere, doch erscheint es auf den ersten Blick auffallend, dass die zahlreichsten Werthe nicht mehr wie früher zwischen 0° und 30°, sondern zwischen 30° und 60° liegen. Diese Verschiebung lässt sich aber in ziemlich ungezwungener Weise auf die in Folge der mit der Sonnennähe rasch zunehmenden Auflockerung der Kometenmaterie bedeutend gesteigerte Helligkeitsentwicklung zurückführen, die es ermöglicht, dass Kometen mit kleiner Periheldistanz, auch wenn sie die Bedingung der Kleinheit von $l—L$ nicht strenge erfüllen, immer noch ansehnliche Objecte für uns werden können. Übrigens geht die Forderung, dass $l—L$ sehr klein sein soll, von der theoretisch günstigsten Erscheinung eines Kometen mit $q < 0·30$ aus, nämlich davon, dass der Komet sowohl vor als nach dem Perihel eine ansehnliche Erdnähe erlangt. Dieser Fall, wie ihn z. B. der Komet 1680 dargeboten hat, ereignet sich aber äusserst selten, denn die meisten Kometen mit kleiner Periheldistanz kommen nur auf einem Ast der Parabel in die Nähe der Erde und sind auf dem andern weit von ihr entfernt.

Auch Kometen mit $q > 0·30$ können, besonders wenn q noch nicht weit von 0·5 entfernt ist, auf einem Parabelast in eine so bedeutende Erdnähe gelangen, dass sie ausserordentliche Erscheinungen darbieten, obwohl die Differenz $l—L \pm 180°$ durchaus nicht klein, sondern beispielsweise schon in der Nähe von 90° ist; dafür können aber solche Kometen im Perihel und noch mehr auf dem anderen Parabelast meist gar nicht gesehen

werden. Solche Annäherungen, wofür die Kometen 1472 und 1556 glänzende Beispiele darbieten, sind aber doch nur Ausnahmen.

Es sei noch bemerkt, dass die Summe aller in dieser Abhandlung in Betracht gezogenen Kometen $281 + 36 = 317$ ist.

Nachdem das Übergewicht der für die Regel stimmenden Kometen sowohl für $q > 0 \cdot 3$ als für $q < 0 \cdot 3$ durch die Vergleichung der auf je 30° Längendifferenz entfallenden Kometenmengen nachgewiesen worden ist, soll es auch auf andere Weise ausgedrückt werden.

Ordnet man sämmtliche 281 Werthe von $l—L \pm 180°$ nach ihrer numerischen Grösse, also ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, so fällt der mittlere, nämlich der 141., auf 49°; da sonach unter 49° ebenso viele Werthe liegen wie über 49°, das heisst zwischen 49° und 180°, so ist die zweite Hälfte auf einen $2^2/_3$ Mal grösseren Raum verstreut, als die erste.

Wird dieselbe Anordnung nach Ausschluss der 31 elliptischen Kometenbahnen gemacht, so fällt die Mitte allerdings etwas höher, aber immerhin noch auf einen ziemlich niedrigen Betrag, nämlich auf 55°; da in diesem Falle zwischen 0° und 55° soviele Werthe liegen wie zwischen 55° und 180°, so breiten sich die höheren Werthe auf einen $2^1/_3$ Mal grösseren Bogen aus als die kleineren.

Ordnet man auch für die Kometen mit $q < 0 \cdot 3$ die 36 Differenzen $l—L$ nach ihrem Zahlenwerthe, so trifft die Mitte auf etwa 59°, so dass also die kleineren Werthe auf 59°, die grösseren aber auf 121°, demnach die doppelte Strecke, vertheilt sind.

Das Vorzeichen der heliocentrischen Differenz $l—L \pm 180°$ zu berücksichtigen, erschien bisher nicht nöthig, weil positive und negative Werthe in ziemlich gleicher Menge vorkommen, wie die folgende Übersicht zeigt, in welcher die Kometen nicht nur in ihrer Gesammtzahl K vorgeführt, sondern mit Benützung der späteren Gruppenbildung noch ausserdem nach vier Zeitaltern unterschieden sind.

$l—L \pm 180°$	—1759	1759—1835	1835—1864	1865—1890	K
+	32	36	34	31	133
—	32	39	39	38	148

Ein geringes Übergewicht der negativen Differenzen ist zwar angedeutet, darf aber, auch wenn es reell wäre, nicht als Nothwendigkeit angesehen werden, und zwar schon darum nicht, weil die Bedeutung der Vorzeichen umso geringer wird, je kleiner die Differenz $l—L \pm 180°$ ist; und gerade kleine Differenzen sind ja die häufigsten. Was übrigens die Bedeutung dieser Vorzeichen anbelangt, so sagt das positive [negative] nur, dass die heliocentrische Länge eines Kometen zur Zeit des Perihels grösser [kleiner] als die gleichzeitige heliocentrische Länge der Erde gewesen ist; auf andere für die Erscheinung eines Kometen wichtige Umstände, z. B. ob er mehr dem Morgen- oder dem Abendhimmel angehört hat, lässt sich aus dem Vorzeichen kein Schluss ziehen, weil die Differenz $l—L \pm 180°$ nur die Stellung des Kometen im Perihel in Betracht zieht, während die Kometen in der Wirklichkeit nicht nur im Perihel, sondern ebensogut vor wie nach dem Perihel in die günstigste Stellung zum Beobachter gelangen können.

Für die Erde überhaupt kann aber die fast gleich grosse Häufigkeit von positiven und negativen Differenzen als eine weitere, wichtige Eigenschaft des Gegenstandes angesehen werden, welchem die vorliegende Abhandlung gewidmet ist; sie sagt nämlich, dass die Perihelpunkte, auf die Ekliptik reducirt, ebenso oft vor wie nach der Erde liegen. Die Erde sammelt demnach durch ihre Beobachter die Perihelpunkte, also überhaupt die Kometen fast symmetrisch vor und hinter ihrem Weg und verbreitet auf ihrer Wanderung die Ansammlungsstellen über die ganze Ekliptik.

Nur im Vorbeigehen sei noch bemerkt, dass diese durch die Bewegung der Erde bewirkte Vertheilung der Perihellängen im Allgemeinen wohl eine gleichmässige wird, dass aber, weil die höheren geographischen Breiten während einiger Monate des Jahres für die Beobachtung von Kometen in geeigneten Elongationen von der Sonne günstiger liegen, als die Tropenländer, auf den Strecken 60° bis 120° und 240° bis 300° bis jetzt eine geringe Häufung der Perihellängen entstanden ist.

Nachstehendes Schema zeigt die Vertheilung der Vorzeichen für Gruppen von je 30° Länge.

$l-L\pm180°$		K	K—E	$l-L\pm180°$		K	K—E
0° bis + 15°		28	26	0° bis — 15°		29	24
+ 15	45	31	23	— 15	45	44	35
45	75	35	35	45	75	20	17
75	105	16	14	75	105	20	19
105	135	8	8	105	135	19	18
135	165	7	7	135	165	12	12
165	180	8	8	165	180	4	4
		133	121			148	129

Die Theilungspunkte habe ich hier um 15° verschoben, um nebenbei auch zu sehen, ob die naheliegende Vermuthung, dass die Differenzen $l-L\pm180°$ zwischen —15° und +15° noch häufiger als zwischen 0° und +30° oder zwischen 0° und —30° vorkommen, sich wirklich bestätigt. Der früheren Zusammenstellung gemäss liegen in den Intervallen 0° bis +30° und 0° bis —30° zusammen 106, nach Ausschluss der elliptischen Kometenbahnen 90 Differenzen, während man jetzt in den 30 Graden zwischen —15° und +15° 57, beziehungsweise 50 findet, Zahlen, die in der That noch etwas grösser sind, als die Hälften der früheren; es vermag also selbst der Umstand, dass Kometen mit $q<1$ in dem Falle, dass $l-L\pm180°$ sehr klein ist, während der Erd- und Sonnennähe für uns einige Zeit in den Sonnenstrahlen verborgen sein können, die grosse Menge dieser Kometen nicht merklich zu vermindern.

Bei den Kometen mit kleiner Periheldistanz, also in der letzten Columne des Verzeichnisses, finden wir 19 positive und 17 negative Werthe von $l-L$. Die positiven deuten auf die Sichtbarkeit am Morgen-, die negativen auf die Sichtbarkeit am Abendhimmel, wobei vorausgesetzt ist, dass diese Kometen nicht im Perihel, sondern nur dann beobachtet werden können, wenn die wahre Anomalie weit grösser als 90° ist. Der Schluss vom Vorzeichen der Differenz $l-L$ auf die Erscheinung eines Kometen

am Morgen- oder Abendhimmel ist bei den Kometen mit kleiner Periheldistanz ziemlich sicher, weil sie zur Zeit ihrer besten Sichtbarkeit fast immer eine ansehnliche Elongation von der Sonne haben und daher bei Entscheidung der Frage, ob ein Komet in der täglichen scheinbaren Bewegung des Himmels der Sonne vor- oder nachgeht, gewöhnlich nur dann ein Zweifel entstehen kann, wenn $l—L$ klein, oder b gross ist. Der Schluss wäre natürlich noch sicherer, wenn die Coordinaten nicht auf die Ekliptik, sondern auf den Äquator bezogen wären.

Nachdem sich nun die scheinbare Beziehung zwischen T und l durch die Gesammtmenge der Kometen bestätigt gezeigt hat, soll jetzt nachgesehen werden, ob diese Gesetzmässigkeit auch dann noch bleibt, wenn kleinere, ziemlich willkürlich gewählte Gruppen von Kometen betrachtet werden.

Ich habe zu diesem Zweck die Kometen in vier Gruppen von nahe gleicher Grösse getheilt, unter denen die drei ersten durch die Erscheinungen des Halley'schen Kometen in den Jahren 1759 und 1835 von einander geschieden sind. Die erste Gruppe enthält also nur Kometen, welche für das freie Auge sichtbar gewesen sind. Die zweite erstreckt sich über den Zeitraum, der grösstentheils durch die Kometenentdeckungen von Messier, Méchain, C. Herschel und Pons ausgefüllt ist. In dem Zeitraum nach 1835, oder, da die zwischenliegenden Jahre keinen neuen Kometen gebracht haben, seit 1840 wird das Kometensuchen allgemeiner, zum Theil mit besseren Instrumenten und im letzten Decennium planmässig betrieben; da sich aber die erste und die zweite Hälfte dieses 50jährigen Zeitraumes bezüglich der durchschnittlichen Anzahl der auf jedes Jahr entfallenden neuen Kometen nicht bedeutend von einander unterscheiden, habe ich den Abschnitt nahe in der Mitte, und zwar bei Ende 1864 gemacht.

Fragt man nun, ob sich das Übergewicht kleiner Werthe von $l—L \pm 180°$ auch in jedem von diesen, hinsichtlich ihrer Dauer sehr ungleichen Zeiträumen zeigt, so findet man die Antwort in der folgenden Übersicht, welche für jeden Zeitraum in der ersten Columne sämmtliche, in der zweiten nur jene Kometen berücksichtigt, deren Umlaufszeit grösser als 76 Jahre ist.

$l-L\pm180°$	I.		II.		III.		IV.	
	—1759		1759—1835		1835—1864		1865—1890	
	K	*K−E*	*K*	*K−E*	*K*	*K−E*	*K*	*K−E*
0° bis 30°	23	23	25	20	33	29	25	18
30 60	14	14	20	17	11	9	10	5
60 90	9	9	11	9	16	15	13	13
90 120	7	6	10	10	5	4	6	6
120 150	5	5	6	6	3	3	7	7
150 180	6	6	3	3	5	5	8	8
	64	63	75	65	73	65	69	57

Die Zahlen behufs directer Vergleichung auf Procente oder überhaupt auf eine gemeinschaftliche Einheit umzurechnen, erscheint nicht nöthig, weil die Mengen der in jeder Gruppe enthaltenen Kometen ohnehin nicht bedeutend von einander verschieden sind.

Die Sprünge zwischen den aufeinander folgenden Zahlen verschwinden vollständig, wenn das Intervall von 30° auf 60° vergrössert wird. Lässt man dabei die elliptischen Kometenbahnen ausser Acht, so ist das Hauptresultat der Vertheilung kurz und deutlich in dem nachstehenden Schema ausgesprochen, wobei man sich vielleicht erlauben darf, die Zahlen der Reihe 0° bis 60° als der Theorie günstige, 60° bis 120° als indifferente und die Zahlen der Reihe 120° bis 180° als ungünstige zu bezeichnen.

$l-L\pm180°$	I.	II.	III.	IV.	Zusammen
0° bis 60°	37	37	38	23	135
60 120	15	19	19	19	72
120 180	11	9	8	15	43
	63	65	65	57	250

Von den drei ersten Zeiträumen lässt also jeder den scheinbaren Zusammenhang zwischen l und $L\pm180°$ in ziemlich gleichem Masse hervortreten; in jedem kann das Verhältniss

zwischen den günstigen, indifferenten und ungünstigen Fällen angenähert durch 4 : 2 : 1 ausgedrückt werden. Im vierten Zeitraum ist aber das Verhältniss ein anderes und das Übergewicht der günstigen über die ungünstigen Fälle nur ein geringes. Da die Vermuthung nahe liegt, diese Ausnahme könnte durch die verschärften Nachsuchungen während der 1880er Jahre entstanden sein, habe ich die Gruppe IV noch in zwei Gruppen von ziemlich gleicher Grösse getheilt, so dass die erste von 1865 bis 1880, die zweite von 1881 bis 1890 reicht; viel weiter darf man mit der Verkleinerung der Gruppe wohl nicht gehen, weil sonst Zufälligkeiten das Übergewicht erlangen und zu Fehlschlüssen verleiten können.

$l—L \pm 180°$	1865—1880		1881—1890	
0° bis 30°	7	9	11	14
30 60	2		3	
60 90	6	10	7	9
90 120	4		2	
120 150	6	11	1	4
150 180	5		3	

Das Resultat ist ein unerwartetes. Während gerade in dem Zeitraum, in welchem der Himmel mit grösserer Aufmerksamkeit und zum Theil mit Benützung stärkerer Instrumente nach Kometen durchsucht worden ist, nämlich während der Jahre 1881 bis 1890, die Regel beinahe in demselben Masse wie in den Zeiträumen I, II und III ihre Bestätigung findet, ist sie sonderbarer Weise in der vorhergehenden Gruppe, die sich übrigens, wenn man das Kometenverzeichniss genauer betrachtet, auf die Jahre 1871 bis 1880 reducirt, gar nicht mehr zu erkennen. Da also an dieser Stelle relativ viele Kometen, die gegen die Regel stimmen oder sich indifferent verhalten, zusammengedrängt sind, soll nachgesehen werden, durch welche Umstände eine Abweichung von der Regel am leichtesten hervorgerufen werden kann.

Vor allem ist klar, dass die Längendifferenz $l—L \pm 180°$ für die Sichtbarkeit eines Kometen umso gleichgiltiger wird, je

grösser seine Perihelbreite b ist; steht die Bahnaxe auf der Ekliptik senkrecht, so zeigt ein solcher Komet in der Nähe des Perihels nach jedem Punkt der Ekliptik dieselbe Helligkeit. In der That finden sich in der fraglichen Gruppe unter den Kometen, welche nicht für die Regel sprechen, die folgenden mit $b > 60°$: 1871 Juli 27, 1871 Dec. 20, 1877 April 26, 1877 Juni 27, 1879 Oct. 4. Auch bei kleinen Periheldistanzen kann die Differenz $l—L$ umso weiter von der Regel abweichen, je mehr b gegen 90° rückt. Solche Fälle sprechen also, wenn auch nicht für, so doch im Grund genommen auch nicht gegen die Regel.

Im Allgemeinen haben die meisten der nicht für die Regel sprechenden Kometen das gemeinsam, dass sie in Folge ihrer Stellung gegen die Erde nicht im Perihel, also nicht in der grössten überhaupt möglichen Helligkeit, sondern nur auf einer vom Perihel weit entfernten Bahnstrecke beobachtet werden konnten. Solche Verhältnisse entstehen sehr häufig durch steile Neigungen (beispielsweise $60° < i < 120°$), denn diese machen es möglich, dass ein Komet, wenn auch nicht im Perihel, so doch mehrere Wochen vor oder nach dem Perihel gesehen werden kann, und zwar entweder in hohen Declinationen, wo er also circumpolar ist, oder vor dem Perihel auf der einen, nach dem Perihel auf der anderen Erdhemisphäre, wobei er sich also unter ähnlichen Umständen zeigt, wie ein Komet mit kleiner Periheldistanz. Zu jenen Kometen können z. B. 1874 Oct. 18, 1879 April 27, zu diesen 1864 Oct. 11, 1871 Juni 10 gerechnet werden. Überhaupt sind in den Jahren 1860 bis 1879 steile Neigungen etwas häufiger als sonst.

Dass Kometen zwar nicht im Perihel, wohl aber vor und nach dem Perihel, also auf beiden Ästen der Parabel beobachtet werden können, ist auch schon bei Kometen mit grosser Periheldistanz vorgekommen, z. B. bei 1880 Juli 1 und 1889 Juni 10; der Mangel einer grösseren, wenn auch kürzer dauernden Helligkeit während des Perihels wird also bei diesen Kometen theilweise durch die auf eine längere Strecke vertheilte, wenn auch kleinere Helligkeit vor und nach dem Perihel ersetzt.

Die Kometen 1880 Nov. 8 und Nov. 9, deren q in der Nähe von 0·5 liegen, konnten ähnlich wie Kometen mit kleiner Periheldistanz nur einige Zeit nach dem Perihel gesehen werden.

Die meisten der hier genannten Bahneigenheiten zeigen sich zwar in jedem Zeitraum, nirgends aber so häufig wie in den Jahren 1871 bis 1880, und aus diesem Grunde wird es leicht erklärlich, dass bei diesen Kometen grosse Werthe der Differenz l—$L \pm 180°$ nicht seltener als kleine vorkommen.

Die Abweichungen von der Regel können also fast bei jedem Kometen auf nahe liegende Gründe zurückgeführt werden. Trotzdem muss man sie aber als Ausnahmen gelten lassen und könnte allenfalls nur noch die Frage aufwerfen, ob etwa während der Jahre 1871 bis 1880 weniger Kometen als sonst unter besonders günstigen Verhältnissen zu uns hereingekommen sind, oder ob vielleicht gar während dieser Zeit relativ viele unter günstigen Verhältnissen erschienene Kometen übersehen worden sind. Thatsache ist, dass die Regel nach so vieljähriger Bestätigung endlich während eines Decenniums durch eine Ausnahme unterbrochen wird, aber ebenso muss auch hervorgehoben werden, dass sie in den gleich darauffolgenden Jahren planmässigen Suchens doch wieder ihre Bestätigung findet, dass also gerade bei gleichmässiger Durchmusterung des Himmels kleine Werthe von l—$L \pm 180°$ häufiger als grosse vorkommen.

Wollte man nun nach Erledigung der Kometen mit $q > 0 \cdot 3$ in derselben Weise auch die Kometen mit $q < 0 \cdot 3$ in mehrere Gruppen theilen, so würde sich sogleich zeigen, dass auf jede dieser kleinen Gruppen nur mehr so wenig Kometen entfallen, dass die Zufälligkeiten beinahe in demselben Masse hervortreten wie die Regel. Bei diesen Kometen trägt also eine solche Trennung zur weiteren Klärung der Sache nichts bei und soll daher unterbleiben. Übrigens ist sogar die Gesammtmenge der Kometen mit $q < 0 \cdot 3$ immer noch so gering, dass sie das Übergewicht der kleinen über die grossen Werthe von l—L aus der Erfahrung allein wohl kaum mit Sicherheit erkennen liesse, wenn nicht das bei den Kometen mit $q > 0 \cdot 3$ offenkundige Vorherrschen kleiner Werthe von l—$L \pm 180°$ durch Analogie zu diesem Schluss geführt hätte.

Bei den Kometen mit $q > 0 \cdot 3$ erscheint die Häufigkeit kleiner Werthe der Differenz l—$L \pm 180°$ durch die Beobachtungen ungeachtet der einen Discontinuität in einem solchen Grade erwiesen, dass auch die Zurückführung dieser Regel auf

die zu Anfang dieser Abhandlung angegebene, aus einer einfachen Überlegung folgende Ursache berechtigt erscheint. Die Kometenentdeckungen sind wohl insofern zufälliger Natur, als sie durch grössere oder geringere Aufmerksamkeit bedingt werden; da aber dem menschlichen Willen durch die Grenzen der Empfindlichkeit unserer Augen für Lichteindrücke Schranken gezogen sind, welche zwar bei Benützung grosser, kleiner oder gar keiner Instrumente sehr verschieden, aber in jedem gegebenen Falle doch nahezu dieselben sind, taucht aus jenen Zufälligkeiten allmälig eine Gesetzmässigkeit auf, nämlich die, dass unsere Kometenverzeichnisse grösstentheils nur solche Kometen enthalten, für welche die Differenz zwischen der heliocentrischen Länge des Perihels und der während des Periheldurchganges stattfindenden heliocentrischen Länge der Erde eine mässige Grösse ist.

Anderseits lässt sich aus dem Minus, um welches die zwischen 120° und 180° liegenden Zahlen gegen die zwischen 60° und 120° liegenden und beide gegen die zwischen 0° und 60° liegenden Werthe von $l—L \pm 180°$ zurückstehen, auch ungefähr ermessen, wie viel Kometen, abgesehen von anderen Ursachen, nur in Folge grösserer Differenzen zwischen l und $L \pm 180°$ für uns verloren gehen, ein Verlust, dessen relativer Umfang auch jetzt noch ziemlich derselbe ist, wie in der vorteleskopischen Zeit.

Zur Theorie der Dampfspannung

von

Dr. Gustav Jäger.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1890.)

Schon zu wiederholten Malen wurde von verschiedener Seite auf Beziehungen zwischen den Capillaritätsconstanten und der Verdampfungswärme bezüglich der Verdampfung von Flüssigkeiten aufmerksam gemacht. In Folgendem beabsichtige ich die Kenntniss dieses Gebietes durch einen neuen Beitrag zu bereichern, indem ich zeigen werde, dass wir auf Grund feststehender Ansichten über den flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand ein Gesetz für die Änderung der Dampfspannung mit der Temperatur ableiten können, welches die beobachteten Werthe mit einer Genauigkeit wiedergibt, die nichts zu wünschen übrig lässt.

Nach der mechanischen Wärmetheorie müssen wir uns eine Flüssigkeit, welche eine gewisse Temperatur besitzt, so vorstellen, dass alle ihre Molekeln in Bewegung sind. Eine jede Molekel in der Oberfläche, welche die nöthige kinetische Energie besitzt die Capillarkräfte zu überwinden, wird sich von der Flüssigkeit trennen, d. h. vom flüssigen in den gasförmigen Zustand übergehen. Gleichzeitig wird aber auch ein Theil dieser Molekeln in Folge der Zusammenstösse mit anderen wieder in die Flüssigkeit zurückkehren. Ist das Volumen, welches Flüssigkeit und Dampf einnehmen, ein constant bestimmtes, so wird sich bei einer gegebenen Temperatur schliesslich ein Gleichgewichtszustand herstellen, welcher erreicht ist, wenn für eine gegebene Zeit gleichviel Molekeln aus der Flüssigkeit in das Gas und umgekehrt übertreten. Durch diesen Zustand ist die Dampfspannung der Flüssigkeit bei der bewussten Temperatur bestimmt.

Ist die Arbeit, welche eine Molekel beim Verlassen der Flüssigkeit in Folge der Capillarität leisten muss, a, so werden nur jene Molekeln die Flüssigkeitsoberfläche verlassen können, deren lebendige Kraft in der Richtung senkrecht gegen die Oberfläche grösser als a ist. Es muss also für diese Molekeln $\frac{mu^2}{2} > a$ sein, wenn m die Masse und u die entsprechende Geschwindigkeitscomponente der Molekel ist. Es werden demnach alle Molekeln in der Oberfläche, deren $u > \sqrt{\frac{2a}{m}}$ ist, in Dampfform übergehen.[1]

Nach Maxwell ist die Zahl der Molekeln, welche abgesehen von ihren unbestimmt bleibenden Geschwindigkeitscomponenten v und w eine Componente u besitzen,

$$Z = N\sqrt{\frac{km}{\pi}}\, e^{-kmu^2} du\,, \text{ [2]}$$

wobei N die Zahl sämmtlicher in Betracht kommenden Molekeln, m die Masse einer Molekel ist. Die Constante k steht zur mittleren kinetischen Energie der Molecularbewegung E in der Beziehung $\frac{3}{4k} = E$. Ist $E = \frac{mc^2}{2}$, wobei c die entsprechende mittlere Geschwindigkeit sein soll, so ist $k = \frac{3}{2mc^2}$. Mit Benützung dieses Werthes wird

$$Z = N\sqrt{\frac{3}{2\pi c^2}} \cdot e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2} du = \frac{N}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx,$$

wenn wir $\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{u}{c} = x$ setzen. Dieses Vertheilungsgesetz gilt natürlich für jeden Zustand des Gases, und wir wollen es auch dann noch annehmen, wenn sich das Gas bereits verflüssigt hat. Sicherlich muss es an der Oberfläche der Flüssigkeit gelten, da sonst eine unerklärbare Unstetigkeit beim Übergange vom gasförmigen in den flüssigen Zustand vorhanden wäre.

---

[1] J. Stefan, Sitzungsberichte, XCIV, Wiedemann's Annalen, XXIX, S. 657.

[2] O. E. Meyer, Theorie d. Gase, S. 269.

N sei von nun ab die Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit, dann ist die Zahl jener, deren $u > \sqrt{\frac{2a}{m}}$, oder was dasselbe bedeutet, deren $x > \sqrt{\frac{3a}{mc^2}}$ ist,

$$n = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} e^{-x^2} dx .$$

Die Geschwindigkeit c eines Gases ändert sich mit der Temperatur in der Weise, dass $c^2 = c_0^2(1+\alpha t)$ ist, wobei die Constanten die bekannte Bedeutung haben. Die Arbeit a ändert sich mit der Temperatur ebenfalls. Da sie erfahrungsgemäss mit wachsender Temperatur abnimmt, so wollen wir $a = a_0(1-\varepsilon t)$ setzen. Wir erhalten dann für die untere Grenze unseres Integrals

$$\sqrt{\frac{3a}{mc^2}} = \sqrt{\frac{3a_0}{mc_0^2} \cdot \frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}} .$$

Die Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit der Flüssigkeit N wird sich mit der Temperatur ebenfalls ändern. Es werde daher $N = N_0(1+\gamma t)$ gesetzt. Dies Alles in Betracht gezogen, erhalten wir schliesslich für die Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit, welche sich in Dampf verwandeln können,

$$n = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} (1+\gamma t) \int_{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1-\alpha t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx ,$$

wenn $\sqrt{\frac{3a_0}{mc_0^2}} = k$, einer neuen Constanten, gesetzt wird. Wie bereits erläutert wurde, ist n proportional der Dampfspannung d, mithin ist

$$d = C(1+\gamma t) \int_{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty} e^{-x^2} dx ,$$

wobei C der entsprechende constante Coëfficient ist.

Um die vorstehende Formel an einem praktischen Beispiele zu verificiren, führte ich die Rechnung für die Dampfspannungen des Wassers von 0° bis 100° durch. Zur Integration benützte ich die Formel

$$\int_x^\infty e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} - \ldots\right],$$ [1]

von der ich jedoch nur die zwei ersten Glieder in Rechnung zog. α, den Ausdehnungscoëfficienten der Gase, setzte ich gleich 0·00366 und ε, den Temperaturcoëfficienten der Capillaritätsconstanten des Wassers zwischen 0° und 100°, gleich 0·00230.[2] Aus den Dampfspannungen bei 0°, 50° und 100° folgen sodann für die vorkommenden Constanten die Werthe

$$C = 3437000, \quad \gamma = -0\cdot00385, \quad k = 3\cdot499.$$

Mit Hilfe dieser Zahlenwerthe berechnete ich, von 10 zu 10° fortschreitend, die Dampfspannungen des Wassers zwischen 0° und 100°, wie sie in folgender Tabelle angeführt sind. Zum Vergleiche sind die gemessenen Werthe beigesetzt, wie sie Broch aus den Bestimmungen von Magnus und Regnault berechnete.[3]

t	*d* berechnet	*d* gemessen
0°	4·569	4 569
10	9·130	9·140
20	17·35	17·363
30	31·49	31·51
40	54·84	54·87
50	91·99	91·98
60	149·1	148·88
70	233·9	233·31
80	356·0	354·87
90	527·1	525·47
100	759·9	760

Wir haben hier eine Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung, wie sie besser nicht erwartet werden kann. Die vorkommenden Abweichungen überschreiten nirgends die bei der Rechnung gemachten Vernachlässigungen. Wir haben somit wohl den deutlichsten Beweis dafür geliefert, wie sehr unsere Betrachtungsweise der Dampfspannung gerechtfertigt ist.

[1] Schlömilch, H. Analysis, II, S. 266.

[2] s. Ostwald, Allg. Chemie, I, S. 486.

[3] Ebenda, I, S. 280.

Über eine neue Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung

von

Dr. Gustav Kohn,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 3. Juli 1890.)

Der Ort der Punkte, in welchen die einem beliebigen ebenen Viereck umschriebenen Kegelschnitte von den Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels ihrer Ebene berührt werden, ist eine allgemeine Curve dritter Ordnung.

Dieser wohlbekannten Erzeugungsart der Curven dritter Ordnung steht die folgende, wie ich glaube, noch nicht bemerkte Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung gegenüber:

Der Ort der Punkte, in welchen die einem beliebigen räumlichen Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurven von Strahlen eines beliebigen linearen Complexes berührt werden, ist eine allgemeine Fläche dritter Ordnung.

Geradeso wie die angegebene Erzeugung der Curven dritter Ordnung in einfacher Weise und durch geometrische Überlegungen zu den Sätzen über vier Curvenpunkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt führt, so führt die angegebene Erzeugung der Flächen dritter Ordnung zu einer einfachen geometrischen Herleitung der analogen Sätze, welche Caporali für gewisse Gruppen von fünf Flächenpunkten durch Rechnung gefunden hat. Allein nicht nur die Caporali'schen Sätze erscheinen bei Zugrundelegung unserer Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung in einem neuen Licht, sondern es treten zu diesen Sätzen noch weitere hinzu.

1. Es sei ein beliebiges räumliches Fünfeck vorgelegt mit den Ecken 1, 2, 3, 4, 5 und ein beliebiger linearer Complex L. Es soll nun der Ort F der Punkte untersucht werden, in denen die dem Fünfeck 12345 umschriebenen cubischen Raumcurven von Strahlen des Complexes L berührt werden.

Zunächst fragen wir nach der Ordnung der Fläche F, d. i. nach der Anzahl der Punkte auf einer beliebigen Geraden G, die so beschaffen sind, dass die durch einen solchen Punkt hindurchgehende, dem Fünfeck 12345 umschriebene cubische Raumcurve in diesem Punkte eine Tangente besitzt, die dem linearen Complex L angehört.

Construirt man für jede dem Fünfeck 12345 umschriebene cubische Raumcurve, welche die Gerade G trifft, die Tangente im Treffpunkte, so werden diese Tangenten eine Regelfläche R bilden und die fragliche Ordnung wird übereinstimmen mit der Anzahl der Strahlen, welche der lineare Complex L mit dieser Regelfläche gemein hat, d. i. mit der Ordnung dieser Regelfläche. Es ist nun bekannt,[1] dass diese Regelfläche R vom dritten Grade ist, und damit ist gefunden, dass die Ordnung der erzeugten Fläche F, nach welcher wir fragen, gleich drei ist.

2. Dass jede Fläche dritter Ordnung durch unsere Erzeugung erhalten werden kann, beweisen wir, indem wir zeigen, dass jede Fläche dritter Ordnung auch noch vermöge unserer Erzeugungsart erhalten wird, falls man diese specialisirt, und zwar in der Weise, dass man als Complex L einen speciellen (axialen) Complex wählt. Unsere Construction lautet dann folgendermassen:

Der Ort der Punkte, in denen die einem räumlichen Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurven[2] von den Ebenen eines Büschels berührt werden, ist eine Fläche dritter Ordnung.

---

[1] Siehe Sturm, Journal für Mathematik, Bd. 79.

[2] Das System der durch fünf Punkte gehenden cubischen Raumcurven bezeichnet Reye als Raumcurvenbündel dritter Ordnung in einer schönen Abhandlung (Zeitschrift für Math. und Phys., Bd. 13), welche die Analogie dieses Bündels dritter Ordnung mit einem Büschel zweiter Ordnung zum Gegenstande hat. Auch die vorliegende Arbeit liefert einen Beitrag für diese Analogie.

Einen Beweis, dass durch diese Construction eine beliebig vorgelegte Fläche dritter Ordnung erzeugt werden kann, brauchen wir nicht zu erbringen, denn diese Erzeugung ist von der Picquet'schen[1] nicht wesentlich verschieden, für welche jener Nachweis in strenger Weise von Sturm[2] erbracht worden ist.

Der Ort der Punkte, in denen die einem räumlichen Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurven eine beliebige Ebene berühren, ist nämlich, wie bekannt,[3] derjenige Kegelschnitt K der Ebene, in Bezug auf welchen die Spur jeder Seitenfläche des Fünfeckes die Polare der Spur der Gegenkante ist. Die Fläche F kann also auch erhalten werden dadurch, dass man in jeder Ebene des Büschels den in der angegebenen Weise durch das räumliche Fünfeck 12345 bestimmten Kegelschnitt K construirt, und dies ist die Picquet'sche Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung.

Durch die Betrachtung dieses Specialfalles ist dargethan, dass unsere Erzeugung auch im allgemeinen Falle eine allgemeine Fläche dritter Ordnung liefert, und wir können jetzt den Schluss ziehen, dass eine solche Fläche noch auf einfach unendlich viele Arten vermöge unserer Erzeugung erhalten werden kann. Denn eine Fläche dritter Ordnung hängt von 19 Constanten ab, unsere Erzeugung aber von 20, da das Fünfeck 12345 fünfzehn, der Complex L fünf Constante mit sich bringt.

3. Für die erzeugte Fläche dritter Ordnung F können wir 15 Punkte sofort angeben, nämlich:

Die Fläche F geht durch die fünf Ecken des Fünfeckes 12345 und durch seine 10 Diagonalpunkte.

Der erste Theil dieses Satzes folgt daraus, dass ein beliebiger Strahl des linearen Complexes L, welcher durch einen der Punkte 1, 2, 3, 4, 5 hindurchgeht, in diesem Punkte von einer dem Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurve berührt wird. Der zweite Theil dieses Satzes ergibt sich daraus, dass auch ein beliebiger, durch einen Diagonalpunkt des Fünfecks (Schnittpunkt einer Seitenfläche mit ihrer Gegenkante) gehender Complexstrahl als

---

[1] Siehe Picquet, Bulletin de la société math. de France, Bd. IV.

[2] Journal für Mathematik, Bd. 88.

[3] Siehe Reye a. a. O.

Tangente einer (freilich ausgearteten), dem Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurve in diesem Punkte anzusehen ist.

Da wir gesehen haben, dass eine Fläche dritter Ordnung F auf ∞^1 Arten durch unsere Erzeugung erhalten werden kann, und jeder solchen Erzeugung, wie sofort einzusehen, ein anderes Fünfeck zu Grunde liegen muss, das der Fläche so eingeschrieben ist, dass auch seine Diagonalpunkte der Fläche angehören, so folgt, dass es einfach unendlich viele der Fläche F eingeschriebene Fünfecke dieser Beschaffenheit gibt. Es bleibt zu zeigen, dass es nicht mehr als einfach unendlich viele solche Fünfecke gibt, und dies geschieht durch den Nachweis, dass, wenn umgekehrt eine Fläche dritter Ordnung durch Ecken und Diagonalpunkte eines Fünfecks hindurchgeht, dieses unserer Erzeugung zu Grunde gelegt werden kann.

4. Ist das Fünfeck 12345 vorgelegt, so können für die zu erzeugende Fläche F noch genau fünf Punkte beliebig angenommen werden. Denn durch jeden dieser Punkte geht eine dem Fünfeck umschriebene cubische Raumcurve und ihre Tangente in diesem Punkte ist ein Strahl für den linearen Complex L, welcher durch fünf Strahlen (die nicht dieselben zwei Transversalen haben) eindeutig bestimmt ist. Jede der ∞^5 Flächen dritter Ordnung, welche wir so erhalten, geht durch die Ecken und Diagonalpunkte des Fünfecks 12345. Es ist aber nicht schwer, zu zeigen, dass man für eine durch diese 15 Punkte gehende Fläche dritter Ordnung überhaupt nicht mehr als fünf Punkte beliebig annehmen kann, so dass alle durch Ecken und Diagonalpunkte des Fünfecks 12345 gehenden Flächen dritter Ordnung durch unsere Erzeugung erhalten werden.

Wählen wir nämlich für eine Fläche dritter Ordnung, welche durch die Ecken und Diagonalpunkte des Fünfecks 12345 gehen soll, drei Punkte beliebig in der Ebene 123, so muss die Fläche diese Ebene als Bestandtheil enthalten. Denn für die eventuelle Schnittcurve der Fläche mit dieser Ebene sind zunächst gegeben die drei Punkte 1, 2, 3, der Schnittpunkt der Ebene mit der Kante 45 und die Schnittpunkte der Kanten 12, 23, 31 mit den ihnen respective gegenüberliegenden Ebenen des Fünfecks 12345, dann aber noch die drei beliebigen Punkte, welche mit den ersten sieben Punkten nicht auf derselben Curve dritter

Ordnung liegen werden. Die durch die 15 Ecken und Diagonalpunkte des Fünfecks 12345 gehenden Flächen dritter Ordnung, welche drei beliebige Punkte der Ebene 123 enthalten, bestehen also aus dieser Ebene und den Flächen zweiter Ordnung, welche durch diejenigen acht unter den 15 Punkten hindurchgehen, die nicht in der Ebene 123 liegen. Für eine solche Fläche zweiter Ordnung können aber gewiss nicht mehr als zwei Punkte beliebig angenommen werden, und damit ist gezeigt, dass für eine Fläche dritter Ordnung, welche die Ecken und Diagonalpunkte des Fünfecks enthalten soll, nicht mehr als fünf Punkte beliebig gewählt werden können. Es kann also in der That jedes Fünfeck, dessen Ecken und Diagonalpunkte auf der Fläche liegen, unserer Erzeugung der Fläche zu Grunde gelegt werden, und wir können den Satz aussprechen:

Es gibt einfach unendlich viele einer Fläche dritter Ordnung eingeschriebene Fünfecke, die so beschaffen sind, dass ihre Diagonalpunkte auch auf der Fläche liegen. Die einem solchen Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurven treffen die Fläche noch in je vier Punkten derart, dass die Tangenten der Curven in den Treffpunkten sämmtlich demselben linearen Complex angehören.

Da eine Fläche dritter Ordnung durch 19 Punkte bestimmt ist, wir aber gefunden haben, dass für eine Fläche dritter Ordnung, welche die 15 Eck- und Diagonalpunkte eines räumlichen Fünfeckes enthält, noch fünf Punkte beliebig angenommen werden können, so schliessen wir, dass alle Flächen dritter Ordnung, welche durch 14 unter diesen 15 Punkten gehen, auch den fünfzehnten enthalten, eine Bemerkung, welche schon Caporali gemacht hat. (Teoremi sulle superficie del 3° ordine, in den Berichten der Akademie zu Neapel, 1881.)

5. Am angegebenen Orte hat Caporali durch Rechnung einige interessante Eigenschaften der Fünfecke entwickelt, deren Ecken und Diagonalpunkte auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, welche den bekannten Eigenschaften der Vierecke völlig analog sind, deren Ecken und Diagonalpunkte auf einer Curve dritter Ordnung liegen. Die Caporali'schen Sätze lassen sich unmittelbar aus der Construction folgern, welche unsere Erzeugung

der Fläche F für die Schnittcurve dieser Fläche mit einer beliebigen Seitenfläche des Fünfecks 12345 darbietet:

Die Schnittcurve der Fläche F mit der Ebene 123 wird erhalten als Ort der Berührungspunkte der Tangenten, welche man an die Kegelschnitte des durch die Punkte 1, 2, 3 und den Diagonalpunkt der Kante 45 bestimmten Büschels aus dem Nullpunkt der Ebene 123 bezüglich des Complexes L legen kann.

Diese Construction folgt sofort aus der Bemerkung, dass jeder Kegelschnitt des bei der Construction verwendeten Büschels mit der Geraden 45 zusammen eine dem Fünfeck 12345 umschriebene cubische Raumcurve bildet.

Wenn eine ebene Curve dritter Ordnung als Ort der Berührungspunkte der Kegelschnitte eines Büschels mit den Strahlen eines Büschels erhalten wird, so haben auf dieser Curve die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels den Scheitel des Strahlenbüschels zum gemeinsamen Tangentialpunkt und die drei Diagonalpunkte des Vierecks der Basispunkte haben denselben Tangentialpunkt wie der Scheitel des Strahlenbüschels, nämlich den Punkt, der diesem Scheitel in Bezug auf das Viereck der Basispunkte conjugirt ist. Die Tangenten der Curve, in welcher die Fläche F die Ebene 123 schneidet, in den Punkten 1, 2, 3 und in dem Diagonalpunkt der Kante 45 laufen also im Nullpunkte dieser Ebene zusammen, während die Tangente in diesem Nullpunkte mit den Tangenten der drei beziehungsweise auf den Kanten 12, 23, 31 gelegenen Diagonalpunkte des Fünfecks in demselben Curvenpunkt zusammentreffen.

Hierin liegen die Sätze von Caporali:

„Wenn die Ecken und Diagonalpunkte des Fünfeckes 12345 auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, so entsprechen die Tangentialebenen in den Eckpunkten des Fünfecks diesen Eckpunkten in einem Nullsystem.“ (Denn die Tangente eines Eckpunktes, welche in einer beliebigen der sechs hindurchgehenden Seitenflächen des Fünfecks liegt, erwies sich als Strahl des linearen Complexes L.)

„Die Tangentialebenen der Fläche in den Ecken 1, 2, 3 des Fünfecks und die Tangentialebene in dem Diagonalpunkte der Kante 45 treffen sich in demselben Punkte (dem Nullpunkte der

Ebene 123 im genannten Nullsystem), der auf der Fläche liegt. Ebenso schneiden sich auf der Fläche die Tangentialebenen in drei Diagonalpunkten auf drei Kanten, welche ein Dreieck bilden.“

Endlich ergibt sich auch, dass das Fünfeck 12345 in Bezug auf die Fläche F conjugirt ist, worunter nach Caporali verstanden wird, dass je drei Ecken des Fünfecks conjugirt sind in Bezug auf die Fläche. Denn je drei Eckpunkte haben für die Schnittcurve ihrer Ebene mit der Fläche F denselben Tangentialpunkt, sie sind desshalb in Bezug auf diese conjugirt,[1] daher auch in Bezug auf die Fläche F selbst.

Es ist vielleicht der Erwähnung werth, dass ein Theil der (eben neuerdings begründeten) Caporali'schen Resultate sich in der folgenden Form aussprechen lässt:

Die Tangentialebenen in den Ecken eines einer Fläche dritter Ordnung eingeschriebenen Fünfecks, dessen Diagonalpunkte auch auf der Fläche liegen, bilden ein dieser Fläche eingeschriebenes Fünfflach, welches dem Fünfeck in einem Nullsystem entspricht.

6. Wir erhalten, wie gezeigt war, alle Flächen dritter Ordnung, welche durch die fünf Ecken und zehn Diagonalpunkte des Fünfecks hindurchgehen, wenn wir unserer Erzeugung dieses Fünfeck in Verbindung mit jedem linearen Complexe zu Grunde legen. Für das System dieser ∞^5 Flächen dritter Ordnung ergeben sich aus dieser Bemerkung unmittelbar mehrere Sätze; so hat man insbesondere:

Zwölf Punkte, welche mit den fünf Ecken und zehn Diagonalpunkten eines räumlichen Fünfecks zusammen die 27 Schnittpunkte von drei Flächen dritter Ordnung F_1, F_2, F_3 bilden, liegen immer auf einer und derselben Fläche zweiter Ordnung, und die dem Fünfeck umschriebene Raumcurve dritter Ordnung, welche durch einen beliebigen von jenen zwölf Punkten geht, hat in dem Punkte eine Erzeugende der Fläche zweiter Ordnung zur Tangente.

---

[1] Siehe Caporali, Teoremi sulle curve del terzo ordine, §. 1, 3. (Accademia dei Lincei, vol. 1, ser. 3.)

Legt man nämlich durch einen der zwölf Punkte die dem Fünfeck 12345 umschriebene cubische Raumcurve, so muss deren Tangente in diesem Punkte gleichzeitig den drei linearen Complexen L_1, L_2, L_3 angehören, welche beziehungsweise zur Erzeugung der drei Flächen dritter Ordnung F_1, F_2, F_3 verwendet worden sind. Die gemeinsamen Strahlen von drei linearen Complexen bilden aber eine Regelschaar zweiter Ordnung.

Hält man die beiden Flächen F_1 und F_2 dieser Betrachtung fest und lässt die Fläche F_3 variiren, so folgt:

Auf einer beliebigen vollständigen Schnittcurve zweier Flächen dritter Ordnung, welche durch die Ecken und Diagonalpunkte eines räumlichen Fünfecks hindurchgehen, gibt es ∞^3 Gruppen von je zwölf Punkten, welche mit jenen Eck- und Diagonalpunkten zusammen die 27 Schnittpunkte von drei Flächen dritter Ordnung constituiren. Die ∞^3 Flächen zweiter Ordnung, welche diese zwölfpunktigen Gruppen einzeln enthalten, gehen sämmtlich durch dieselben zwei Geraden hindurch.

Die beiden linearen Complexe L_1 und L_2, welche bei der Erzeugung der Flächen F_1 und F_2 verwendet wurden, haben nämlich eine Strahlencongruenz erster Ordnung und Classe gemein und die beiden Axen dieser Congruenz schneiden alle Strahlen der Regelschaar zweiter Ordnung, welche der variable Complex L_3 mit der Congruenz gemein hat.

Endlich haben wir noch den Satz:

Alle ∞^3 Flächen dritter Ordnung, welche durch die Ecken und Diagonalpunkte eines vollständigen räumlichen Fünfeckes hindurchgehen und ausserdem noch zwei Punkte P_1 und P_2 von der Beschaffenheit enthalten, dass die dem Fünfeck umschriebenen, durch diese Punkte gelegten cubischen Raumcurven in ihnen Tangenten besitzen, die sich schneiden, haben noch sämmtlich dieselben vier Punkte gemein, welche mit den Punkten P_1 und P_2 zusammen auf demselben Kegelschnitte liegen.

Jede der Flächen dritter Ordnung des Satzes erscheint nämlich als Ort der Punkte, in welchen die dem Fünfeck

umschriebenen cubischen Raumcurven von den Strahlen eines linearen Complexes L berührt werden, für den ein ganzes Strahlenbüschel bekannt ist. Denn da die beiden unter diesen cubischen Raumcurven, welche durch die Punkte P_1 und P_2 gehen, in diesen Tangenten besitzen, welche sich treffen, so gehört das durch diese Tangenten bestimmte Strahlenbüschel dem Complexe L an. Erwägt man nun noch, dass die Punkte, in denen die dem Fünfeck umschriebenen cubischen Raumcurven die Ebene dieses Strahlenbüschels berühren, einen Kegelschnitt K erfüllen, so folgt, dass durch die sechs Punkte, welche dieser mit irgend einer unserer Flächen dritter Ordnung gemein hat, auch alle übrigen hindurchgehen.

XVIII. SITZUNG VOM 17. JULI 1890.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. G. Tschermak übergibt eine Arbeit aus dem mineralogisch-geologischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Graz, unter dem Titel: „Rumpfit, ein neues Mineral“, von Herrn Georg Firtsch.

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann übersendet folgende im physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz ausgeführte Arbeiten:

1. „Über die Untersuchung elektrischer Schwingungen mit Thermoelementen“, von Dr. Ignaz Klemenčič.
2. „Über das Leitungsvermögen von Salzdämpfen in der Bunsenflamme“, von Svante Arrhenius.

Das w. M. Herr Prof. L. v. Barth übersendet folgende drei Arbeiten aus seinem Laboratorium:

1. „Über das Orthodibrombenzol und Derivate desselben“, von Felix Schiff.
2. „Zur Kenntniss des Papaverolins“, von Karl Krauss.
3. „Über das Verhalten der Phenole und Oxysäuren gegen die Hydrosulfite der Alkalien“, von Dr. Fritz Fuchs.

Ferner übersendet Herr Hofrath v. Barth eine Arbeit aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Staatsgewerbeschule in Reichenberg: „Über die Verbindungen des Phtalimids und Phenolen“, von Dr. Oscar Ostersetzer.

Das c. M. Herr Prof. F. Lippich in Prag übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der Halbschatten-Polarimeter."

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Einige Sätze über Determinanten höheren Ranges."

Das c. M. Herr Hofrath Prof. E. Ludwig übersendet eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Darstellung von Glycocoll und über einige seiner Derivate," von Prof. Dr. J. Mauthner und Dr. W. Suida.

Herr Johannes Unterweger in Judenburg übersendet eine Abhandlung: „Über die kleinen Perioden der Sonnenflecken und ihre Beziehung zu einigen periodischen Erscheinungen der Erde."

Herr Dr. Bohuslav Brauner, Privatdocent an der k. k. böhmischen Universität in Prag, übersendet eine vorläufige Mittheilung: „Volumetrische Bestimmung des Tellurs."

Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup in Graz übersendet folgende drei Arbeiten aus dem chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Graz.

1. „Zur Substitution aromatischer Kohlenwasserstoffe", von Dr. O. Srpek.
2. „Beitrag zur Kenntniss der Zinnverbindungen", von Dr. G. Neumann.
3. „Über das Glykosamin", von Dr. G. Pum.

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von Herrn Wladyslaw Ritter v. Dutczyński, k. k. Baurath a. D. in Wien, vor, mit der Inhaltsangabe: „Wesentliche Neuerungen, welche bei dem vom Einsender erfundenen, mit mechanischer Kraft zu betreibenden, lenkbaren Luftschiff projectirt sind und bisher bei anderen bekannt gewordenen Luftschiffconstructionen noch nicht in Anwendung gebracht wurden."

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Zur Kenntniss einiger vom Isobutyraldehyd derivirender zweiwerthiger Alkohole", von E. Swoboda und W. Fossek.
2. „Über Einwirkung von Blausäure auf Methyläthylacroleïn", von G. Johanny.

Ferner überreicht Herr Prof. Lieben eine Mittheilung des Prof. Dr. Zd. H. Skraup in Graz: „Über den Übergang der Maleïnsäure in Fumarsäure."

Das w. M. Herr Prof. J. Loschmidt überreicht eine im physikalisch-chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien ausgeführte Arbeit, betitelt: „Zur Chemie des Accumulators," von Mathias Cantor in Wien.

Herr Dr. I. Herzig überreicht eine in Gemeinschaft mit Dr. S. Zeisel ausgeführte Arbeit unter dem Titel:

„Neue Beobachtungen über Bindungswechsel bei Phenolen. (VII. Mittheilung.) Die Äthylirung des Diresorcins."

Ferner überreicht Herr Dr. I. Herzig eine von ihm in Gemeinschaft mit Dr. S. Zeisel verfasste Notiz unter dem Titel: „Erkennung des Diresorcins namentlich im synthetischen Phloroglucin."

Zur Theorie der Halbschattenpolarimeter

von

F. Lippich,

c. M. k. Akad.

(Mit 3 Textfiguren.)

I.

Die Laurent'sche Platte und das von mir angegebene sogenannte Halbprisma dürften gegenwärtig am häufigsten zur Construction von Halbschattenapparaten, die eine grössere Genauigkeit bezwecken, im Gebrauche sein. Bei Anwendung vollkommen homogenen Lichtes und genau richtiger Dicke würde auch die Laurent'sche Platte, falls im Übrigen bezüglich der Polarisatoren und der Anordnung des Apparates die in einer früheren Mittheilung[1] aufgestellten Anforderungen eingehalten werden, in ihrem Effecte identisch sein mit dem eines Halbprismas.

Ist hingegen die Dicke der Laurent-Platte nicht genau der Wellenlänge angepasst, für welche die Drehung der Polarisationsebene geschehen soll und ist insbesondere das angewandte Licht nicht hinreichend homogen, so treten bei den genannten Halbschattenpolarisatoren nicht unwesentliche Verschiedenheiten auf, die bei genauen Messungen zu beachten sind. Namentlich der Umstand, dass bei etwas grösseren Drehungen selbst durch Benützung eines Spectroskopes das Licht bei Erzielung der nöthigen Intensität nicht als homogen angesehen werden kann, macht gewisse Correctionen nöthig, die für die beiden Polarimeterarten verschieden sind.

---

[1] Über polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate. Diese Berichte, XCI. Bd., S. 1059.

Es ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, die Theorie der beiden Polarimeter unter der Voraussetzung nicht vollkommen homogenen Lichtes zu geben, wobei sich die Gelegenheit ergeben wird, noch einige weitere, die Messungen mit Halbschattenpolarimeter betreffende Bemerkungen beizufügen.

Die allgemeinen Entwicklungen sollen zunächst für eine Laurent-Platte durchgeführt werden, da aus denselben durch Specialisirung leicht die einem Halbprisma entsprechenden erhalten werden.

Bekanntlich ist die Dicke der Laurent-Platte so gewählt, dass die Gangdifferenz der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge desjenigen homogenen Lichtes gleich wird, für welches die Drehungen der Polarisationsebene bestimmt werden sollen, gewöhnlich des Natriumlichtes. Für diese Wellenlänge ist dann das aus der Platte tretende Licht geradlinig polarisirt und dessen Schwingungsrichtung bezüglich des Hauptschnittes der Platte symmetrisch gelegen zur Schwingungsrichtung des aus dem Polarisator kommenden Lichtes. Schreitet man aber von dieser Wellenlänge zu grösseren oder kleineren Werthen derselben fort, so nimmt das aus der Platte tretende Licht alle Formen des elliptisch polarisirten an, bis es für eine Gangdifferenz von einem geraden Vielfachen einer halben Wellenlänge wieder geradlinig polarisirt ist, die Schwingungen aber parallel liegen dem des auffallenden Lichtes. Für diese Wellenlänge würden die Helligkeiten der beiden Hälften des Gesichtsfeldes bei beliebiger Stellung des Analyseurs immer einander gleich sein. Ändert sich die Wellenlänge noch weiter, so durchläuft dann die Polarisationsart des austretenden Lichtes die früheren Formen in umgekehrter Reihenfolge u. s. f. Natürlich ist das Intervall der Wellenlänge, innerhalb welches eine ganze Periode der Polarisationsformen enthalten ist, umso kleiner, je grösser die Dicke der Platte gewählt wird.

Bei der Anwendung eines Halbprismas bleibt das Licht für alle Wellenlängen geradlinig und nach derselben Richtung polarisirt, und dieses verschiedene Verhalten der Laurent-Platte und des Halbprismas gegenüber den homogenen Componenten des verwendeten Lichtes bedingt auch die Verschiedenheiten, die beide Arten von Polarimeter bezüglich der Empfindlichkeit,

Farbendifferenz und der Grösse des Winkels zeigen, um welchen durch eine gegebene Substanz die Polarisationsebene gedreht wird.

II.

Das aus dem Polarisator kommende Licht, von dem wir zunächst eine homogene Componente in Betracht ziehen wollen, deren Wellenlänge λ und deren Intensität i sei, habe eine Schwingungsrichtung, welche in Fig. 1 durch die Gerade OS repräsentirt ist. Ebenso mögen OH und OH' die Schwingungsrichtungen der ordentlichen und ausserordentlichen Strahlen in der Laurent-Platte und OH_1 die Schwingungsrichtung vorstellen, welche den aus dem Analysator tretenden Strahlen zukommt; es sollen die Winkel, welche OS, beziehungsweise OH_1 mit OH entsprechend einer Rechtsdrehung einschliessen, mit ε und φ bezeichnet sein.

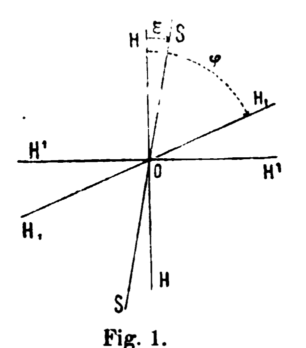


Fig. 1.

Die Intensität der Strahlen, welche die freie Hälfte des Diaphragmas, dessen andere Hälfte durch die Laurent-Platte gedeckt ist, passirt haben, wird nach dem Austritte aus dem Analyseur

$$i \cos^2(\varphi - \varepsilon).$$

Ist ferner $(1-k)i$ die Intensität der an der Platte reflectirten Strahlen und

$$\delta = 2\pi \frac{D(n_e - n_0)}{\lambda}$$

die Phasendifferenz, welche der Platte von der Dicke D entspricht, so ist die Intensität des Lichtes, das die Platte passirt hat, nach dem Austritte aus dem Analyseur durch den Ausdruck

$$ki\left[\cos^2(\varphi - \varepsilon) - \frac{1 - \cos\delta}{2} \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi\right]$$

dargestellt, wobei von dem Lichtverluste durch Reflexion am Analyseur abgesehen wurde, insoferne derselbe für beide Strahlenbündel als gleich angenommen werden darf.

Für heterogenes Licht werde die Gesammtintensität des durch die freie Diaphragmaöffnung und den Analyseur gegangenen Bündels mit J_0, und mit J_1 die des Bündels bezeichnet, welches die Laurent-Platte und den Analyseur passirt hat; alsdann ist, wenn gesetzt wird $\frac{1-\cos\delta}{2} = p$,

$$J_0 = \Sigma i \cos^2(\varphi-\varepsilon), \qquad \ldots 1)$$
$$J_1 = \Sigma k i[\cos^2(\varphi-\varepsilon)-p \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi].$$

Aus diesen Ausdrücken lassen sich sofort jene ableiten, die gelten, wenn zwischen Polarisator und Analysator eine die Polarisationsebene drehende Substanz eingeschaltet ist. Es mag angenommen werden, dass dieselbe die Polarisationsebene nach rechts drehe und dass der Drehungswinkel, welcher der Wellenlänge λ entspricht, α sei. Es tritt dann in den früheren Ausdrücken nur $\varphi-\alpha$ an die Stelle von φ und die bezüglichen Intensitäten der beiden Lichtbündel werden

$$J'_0 = \Sigma i \cos^2(\varphi-\alpha-\varepsilon) \qquad \ldots 2)$$
$$J'_0 = \Sigma k i[\cos^2(\varphi-\alpha-\varepsilon)-p \sin 2\varepsilon \sin 2(\varphi-\alpha)].$$

Die Grössen i, δ und α sind Functionen von λ, während k innerhalb ziemlich weiter Grenzen als constant angesehen werden kann.[1]

Nebst der Intensität der betreffenden Gesichtsfeldhälften wollen wir noch die Mischfarbe derselben in Betracht ziehen und einen Ausdruck aufstellen, mittelst welchem diese angenähert beurtheilt werden kann. Zu diesem Zwecke hätten wir uns einer Farbentafel zu bedienen und die Punkte der Curve, welche den homogenen Spectralfarben entspricht, mit Gewichten belastet zu denken, die den Intensitäten proportional sind. Der Schwerpunkt dieser Gewichte bestimmt dann die Mischfarbe. Beziehen wir die Punkte der Farbentafel auf ein rechtwinkeliges Axensystem x, y,

---

[1] Eigentlich hat k für den ordinären und extraordinären Strahl verschiedene Werthe; da indessen für Quarz die Differenz nicht grösser als 0·001 ist, so kann die den Formeln zu Grunde gelegte Ausnahme gleicher Werthe von k für die beiden Strahlenarten keinen wesentlichen Fehler verursachen.

bezeichnen wir ferner irgend eines der in den Gleichungen 1) und 2) vorkommenden Summenglieder mit i' und mit J die Gesammtintensität, so würde es sich also um die Ermittelung der Schwerpunktscoordinaten

$$\frac{1}{J}\Sigma x i' \text{ und } \frac{1}{J}\Sigma y i'$$

handeln; x und y sind bestimmte Functionen von λ, der Wellenlänge, zu welcher die Intensität i' gehört. Da es sich indessen in unserem Falle zumeist um Licht handeln wird, dessen äusserste homogene Componenten einander entweder sehr nahe liegen oder doch, falls ihnen grössere Unterschiede der Wellenlängen entsprechen, ihre Intensitäten gegen die einer mittleren Wellenlänge entsprechenden sehr klein sind, was dem Falle entspricht, in welchem durch absorbirende Mittel ein nahezu homogenes Licht hergestellt wird, so wird der Schwerpunkt nahe an die Curve der homogenen Spectralfarben heranrücken. Wenn wir dann die x-Axe unseres Coordinatensystemes zusammenfallen lassen mit der Tangente an einen mittleren Punkt des kleinen Curvenstückes, das dem Intervalle der Wellenlängen, die in Betracht kommen, entspricht, so werden die Mischfarben, indem wir von ihren wenig verschiedenen Sättigungsgrade absehen, hinreichend durch die eine der obigen Coordinaten, nämlich durch

$$\frac{1}{J}\Sigma x i'$$

charakterisirt sein, und wir werden die Färbung der Gesichtsfeldhälften als gleich bezeichnen können, wenn ihnen gleiche Werthe dieses Ausdruckes entsprechen.

Den in 1) und 2) betrachteten vier Intensitäten kommen daher vier durch die folgenden Ausdrücke bestimmten Mischfarben zu:

$$F_0 = \frac{1}{J_0}\Sigma x i \cos^2(\varphi - \varepsilon), \qquad \ldots 3)$$

$$F_1 = \frac{1}{J_1}\Sigma k x i[\cos^2(\varphi - \varepsilon) - p \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi],$$

$$F'_0 = \frac{1}{J'_0} \Sigma xi \cos^2(\varphi-\alpha-\varepsilon), \qquad \ldots 4)$$

$$F'_1 = \frac{1}{J'_1} \Sigma kxi[\cos^2(\varphi-\alpha-\varepsilon)-p \sin 2\varepsilon \sin 2(\varphi-\alpha)].$$

Der mit der Wellenlänge veränderliche Factor

$$p = \frac{1-\cos\delta}{2} = \sin^2\frac{\delta}{2}$$

schwankt in seinem Werthe zwischen 0 und 1; letzteren Werth nimmt er an, wenn

$$D(n_\varepsilon - n_0) = u\frac{\lambda}{2},$$

wo u eine ungerade ganze Zahl ist. Da die Laurent-Platte dem in Verwendung kommenden Lichte angepasst sein muss, so wird diese Bedingung als erfüllt anzunehmen sein für einen gewissen mittleren Werth der Wellenlängen, die den homogenen Componenten der Lichtquelle zukommen, für die übrigen Glieder in den obigen Summen wird also p je nach der Dicke der Platte und der Heterogenität des Lichtes Werthe annehmen können, die sich weit von 1 entfernen, ja den Werth Null selbst erreichen oder, diesen überschreitend, wieder gegen 1 anwachsen.

Um die für ein Polarimeter mit Halbprisma geltenden Ausdrücke für die J und F zu erhalten, hat man zunächst

$$p = 1$$

zu setzen; ε bedeutet dann den halben Winkel zwischen den Hauptschnitten des Polarisators und des Halbprismas. Ist ferner $(1-k_1)i$ die Intensität des an den Enden des Halbprismas reflectirten Lichtes, so ist die Intensität des aus dem Halbprisma tretenden Lichtes

$$k_1 i \cos^2 2\varepsilon$$

und man hat daher noch zu setzen

$$k = k_1 \cos^2 2\varepsilon.$$

III.

Die Ermittlung des Rotationswinkels der Polarisationsebene erfordert zwei Einstellungen am Polarimeter, bei welchen die

Helligkeiten der Gesichtshälften gleich gemacht werden, die Nullpunktsbestimmung und die Einstellung bei abgelenkter Polarisationsrichtung. Die Differenz β der abgelesenen Winkel entspricht der Gleichung

$$\beta = \varphi - \varphi_0,$$

wenn φ_0 und φ jene Winkel sind, welche aus den Gleichungen

$$\Delta J = 0 \text{ und } \Delta J' = 0$$

bestimmt werden, wobei gesetzt würde

$$\Delta J = J_1 - J_0, \quad \Delta J' = J_1' - J_0'. \qquad \ldots 5)$$

Wir betrachten zuerst die Nullpunktstellung und setzen zur Abkürzung

$$\Sigma i = P, \ \Sigma pi = Q, \ \Sigma xi = P', \ \Sigma xpi = Q'. \qquad \ldots 6)$$

Die Gleichung, welcher φ_0 genügt, lautet dann

$$kQ \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi_0 + (1-k) P \cos^2(\varphi_0 - \varepsilon) = 0. \qquad \ldots 7)$$

Da $1-k$ sehr klein ist, so werden ersichtlich 0 und $\frac{\pi}{2}$ erste Näherungswerthe von φ_0 sein, von welchen jedoch nur der zweite in Betracht kommt. Setzen wir daher

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \eta,$$

so ergibt sich unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von η

$$-2kQ \sin 2\varepsilon . \eta - (1-k) P \sin 2\varepsilon . \eta + (1-k) P \sin^2 \varepsilon = 0$$

und hieraus, wenn man $1-k$ gegen k vernachlässigt,

$$\eta = \frac{1}{4} \frac{P}{Q} \left(\frac{1-k}{k}\right) \operatorname{tng} \varepsilon. \qquad \ldots 7a)$$

Der zu i gehörige Factor

$$p = \sin^2 \frac{\pi D (n_e - n_0)}{\lambda}$$

ändert sich mit der Dicke der Platte, und zwar in verschiedener Weise für die einzelnen Intensitäten der homogenen Componenten

der Lichtquelle, und dieser Umstand bewirkt daher auch eine Änderung von η, wenn man bei derselben Lichtquelle Laurent-Platten von ungleicher Dicke verwendet. Aber auch bei derselben Platte ändert sich η, wenn die Helligkeitsvertheilung auf die homogenen Componenten der Lichtquelle eine Änderung erfährt. Da jedoch für die Messungen nicht die Änderungen von φ_0 allein, sondern die von $\beta = \varphi - \varphi_0$ massgebend sind, so soll hier auf diese Variationen von φ_0 nicht näher eingegangen werden.

Beim Halbprisma wird $Q = P$, also

$$\eta = \frac{1}{4}\left(\frac{1-k}{k}\right) \operatorname{tng} \varepsilon\,, \qquad \ldots 7\,b)$$

ganz unabhängig von der Intensitätsvertheilung.

Dreht man den Analysator aus der Stellung, für welche Gleichheit der Gesichtsfeldhälften vorhanden ist, um einen kleinen Winkel $\Delta\varphi$ heraus, der eine eben noch bemerkbare Helligkeitsdifferenz ΔJ bewirkt, so wird der reciproke Werth von $\Delta\varphi$ ein Maass für die Empfindlichkeit oder Genauigkeit der Einstellung abgeben. Da nun innerhalb weiter Grenzen diese eben bemerkbare Helligkeitsdifferenz sehr nahe proportional ist der Helligkeit J, bei welcher sie eingeleitet wurde, also gesetzt werden kann

$$\Delta J = 4aJ,$$

wo a eine Constante, so wird die oben definirte Empfindlichkeit

$$E = \frac{1}{4aJ}\frac{\Delta J}{\Delta\varphi}. \qquad \ldots 8)$$

Um die Empfindlichkeit der Nullpunktstellung zu erhalten, haben wir E mittelst der Gleichungen 1) zu berechnen und $\varphi = \varphi_0$ zu setzen; es ist nun

$$\frac{\Delta J}{\Delta\varphi} = (1-k)P \sin 2(\varphi_0 - \varepsilon) - 2kQ \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi_0,$$

$$J = P\cos^2(\varphi_0 - \varepsilon);$$

und indem wir hierin

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} + \eta$$

setzen, werden wir einen in allen Fällen hinreichend genauen Werth von E erhalten, wenn wir in der Entwicklung die Glieder mit η und mit $(1-k)$ als Factor vernachlässigen und k schliesslich gleich der Einheit nehmen. Es ergibt sich dann

$$E = \frac{1}{a} \frac{Q}{P} \operatorname{cotng} \varepsilon. \qquad \ldots 8a)$$

Die Abhängigkeit der Function p von der Wellenlänge ist in Fig. 2 dargestellt, und zwar für das Intervall von $\lambda = 0 \cdot 0005$ bis $\lambda = 0 \cdot 0007$ und für eine Laurent-Platte von der Dicke $D = 0 \cdot 4862$ *mm*, welche einer Phasendifferenz von genau $15 \frac{\lambda}{2}$ für die Strahlen der Natriumlinie D_1 entspricht. Man übersieht nun leicht, welche Änderungen die p-Curve erfährt, wenn man die Dicke der Platte ändert. Wählt man dieselbe jedesmal so, dass die Phasendifferenz für D_1 ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge beträgt, so rücken die Minima $a, b, c, d \ldots$ immer näher an einander und an D_1 je grösser die Plattendicke wird. Ist aber die Platte bezüglich der Wellenlänge von D_1 nur etwas unrichtig, d. h. beträgt die Phasendifferenz für D_1 nicht genau ein ungerades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$, so verschiebt sich die p-Curve mit wachsender Unrichtigkeit nach der Seite der wachsenden oder abnehmenden Wellenlängen, je nachdem die Dicke zu gross oder zu klein ist.

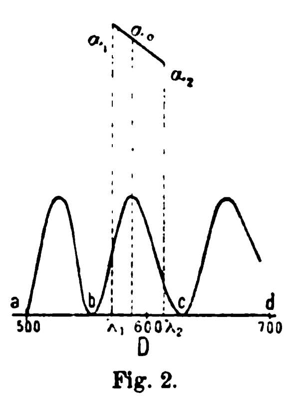


Fig. 2.

Die Grösse Q kann mit Hilfe der p-Curve wie folgt construirt werden. Man denke sich die Punkte dieser Curve mit Gewichten i belastet, natürlich so, dass der Punkt der Curve und sein Gewicht demselben λ entsprechen; bezeichnet dann q den Abstand des Schwerpunktes dieses Curvenstückes von ad, so wird

$$Q = (\Sigma i) q = Pq$$

und damit lautet der obige Ausdruck von E noch einfacher

$$E = \frac{1}{a} q \operatorname{cotng} \varepsilon. \qquad \ldots 8'a)$$

Bei gegebener Lichtquelle wäre die Platte der Helligkeitscurve der ersteren so anzupassen, dass q ein Maximum werde. Im Allgemeinen ist soviel zu übersehen, dass zu diesem Zwecke, wenn die Helligkeitscurve ein sehr ausgesprochenes Maximum besitzt, die Plattendicke für die demselben nahen Wellenlängen eine Phasendifferenz von einem ungeraden Vielfachen von $\frac{\lambda}{2}$ geben müsse, bei nahezu gleicher Helligkeit der Constanten aber dieses eintreten solle für die Strahlen mittlerer Wellenlänge.

Eine Plattendicke, die dem Maximum von q für eine gegebene Lichtquelle entspricht, soll kurz als normale Dicke bezeichnet werden.

Je grösser die normale Dicke der Platte gewählt wird, desto kleiner wird die Empfindlichkeit, denn bei grösserer Dicke nähern sich die Äste der p-Curve, welche vor und nach dem Maximum von p liegen, und es werden demnach immer tiefer liegende Theile dieser Äste belastet. Ebenso verringert sich natürlich die Empfindlichkeit durch eine kleine Abweichung von der normalen Dicke und man kann diese Verringerung abschätzen, indem man den Zuwachs des belasteten Theiles an dem einen und die Abnahme an dem anderen Curvenast beiläufig bestimmt.

Dem Halbprisma entspricht eine Empfindlichkeit

$$E_1 = \frac{1}{a} \operatorname{cotng} \varepsilon, \qquad \ldots 8b)$$

die ganz unabhängig ist von der Helligkeitsvertheilung und die stets grösser ist als die Empfindlichkeit der Laurent-Platte unter sonst gleichen Umständen. Das Verhältniss beider Empfindlichkeiten ist

$$\frac{E}{E_1} = q.$$

Die erwähnten Verschiedenheiten der Empfindlichkeit sind keineswegs unerheblich. Hätte beispielsweise das Spectrum der

Lichtquelle gleiche Helligkeit der homogenen Componenten und würde dasselbe reichen von $\lambda = 0\cdot00057$ bis $\lambda = 0\cdot0061$, so wäre für eine normale Plattendicke $D = 0\cdot4862\,mm$ q nahe gleich $^3/_4$; für die doppelte Plattendicke, die also einer Phasendifferenz von 29 oder 30 halben Wellenlängen entspräche, sinkt q auf $^1/_2$ herunter. In diesem Falle gibt also das Halbprisma der Laurent-Platte gegenüber die doppelte Genauigkeit.

Es möge noch die Farbendifferenz der Nullpunkt stellung, die durch den Ausdruck

$$\Delta F = F_0 - F_1 = \frac{1}{J}\left[(1-k)P' \cos^2(\varphi_0-\varepsilon) + kQ' \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi_0\right]$$

bestimmt ist, betrachtet werden. Da für diese Stellung

$$0 = (1-k)P \cos^2(\varphi_0-\varepsilon) + kQ \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi_0$$

ist, so wäre $\Delta F = 0$, wenn

$$\frac{P'}{Q'} = \frac{P}{Q}.$$

Dieses trifft wohl zu für das Halbprisma, da beide Quotienten gleich der Einheit werden, aber im Allgemeinen nicht für die Laurent-Platte; diese gibt also bei der Nullpunktstellung eine Farbendifferenz. Da jedoch ΔF verschwindet, wenn $(1-k)$ und η gleich Null genommen werden, so kann die Farbendifferenz nur äusserst gering sein. In der That konnte ich auch bei sehr kleiner Plattendicke und unter Anwendung von sehr intensiven und also wenig homogenen Natriumlichtes eine solche Farbendifferenz nicht wahrnehmen.

IV.

In ähnlicher Weise wie die Nullpunktseinstellung soll nun auch die Einstellung nach erfolgter Ablenkung der Polarisationsrichtung und die ihr zukommmende Genauigkeit und Farbendifferenz untersucht werden.

Der Winkel φ, welcher dieser Einstellung entspricht, genügt der Gleichung

$$\Delta J' = 0;$$

ist φ durch die Beobachtung bekannt, so dient diese Gleichung zur Ermittlung jener Wellenlänge oder jener homogenen Componente der Lichtquelle, zu welcher φ und die beobachtete Drehung $\beta = \varphi - \varphi_0$ gehört, worüber man von vornherein nichts Bestimmtes aussagen kann. So pflegt man z. B. gewöhnlich die mit Natriumlicht, das durch Kaliumdichromat von den brechbaren Strahlen befreit ist, gemachten Messungen für die Mitte zwischen den Natriumlinien gelten zu lassen, während die Stelle des Spectrums, der die Drehung entspricht, weiter gegen Roth hin liegt.

Es wird also β der Drehungswinkel für irgend eine mittlere Componente der Lichtquelle sein, der die Wellenlänge λ_m zukommt; für den Drehungswinkel α für irgend eine andere Wellenlänge λ wollen wir setzen

$$\alpha = \beta + \Delta\beta = \varphi - \varphi_0 + \Delta\beta, \qquad \ldots 9)$$

so dass die Gleichung $\Delta J' = 0$ jetzt lautet:

$$(1-k)\Sigma i \cos^2(\varphi_0 - \Delta\beta - \varepsilon) + k \sin 2\varepsilon \Sigma pi \sin 2(\varphi_0 - \Delta\beta) = 0, \ldots 10)$$

deren Glieder wir nach $\Delta\beta$ entwickeln, indem wir hiebei nur die Glieder erster Ordnung beibehalten. Dieses wird für die Fälle, wie sie bei wirklichen Messungen vorkommen, immer gestattet sein. Ist i nahezu constant, so erfordert die Bedingung einer nicht zu grossen Farbendifferenz ein Spectrum von geringer Ausdehnung, für welches die $\Delta\beta$ an den Grenzen 1° nicht übersteigen werden. Hat das Spectrum ein sehr hervortretendes Maximum der Helligkeit, in dessen Nähe dann auch die Wellenlänge λ_m liegt, zu welcher der Drehungswinkel β gehört, so wird die Ausdehnung des Spectrums bedeutend grösser sein dürfen; dann kommen aber die grösseren Werthe von $\Delta\beta^2$ mit sehr kleinen Factoren i behaftet vor.

Zur Abkürzung werde noch gesetzt

$$\Sigma i\Delta\beta = R, \quad \Sigma i\Delta\beta = S, \qquad \ldots 6a)$$

dann wird aus Gleichung 10)

$$(1-k) P \cos_2(\varphi_0 - \varepsilon) + kQ \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi_0 +$$
$$+ (1-k) R \sin 2(\varphi_0 - \varepsilon) - kS \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi_0 = 0, \qquad \ldots 10a)$$

in welcher die Summe der beiden ersten Glieder wegen der für die Nullstellung geltenden Bedingung 7), die natürlich auch aus der obigen Gleichung für $\Delta\beta = 0$ hervorgeht, für sich verschwinden. Es ist daher

$$(1-k)R \sin 2(\varphi_0-\varepsilon) - kS \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi_0 = 0,$$
$$(1-k)P \cos^2 (\varphi_0-\varepsilon) + kQ \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi_0 = 0.$$

Um φ_0 zu eliminiren schreiben wir diese Gleichungen wie folgt

$$(1-k)R \cos 2\varepsilon \sin 2\varphi_0 - [(1-k)R + kS] \sin 2\varepsilon \cos 2\varphi_0 = 0,$$
$$\left[\frac{1}{2}(1-k)P + kQ\right] \sin 2\varepsilon \sin 2\varphi^0 +$$
$$+ \frac{1}{2}(1-k)P \cos 2\varepsilon \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{2}(1-k)P$$

und erhalten mittelst

$$\operatorname{tng} 2\varphi_0 = \frac{(1-k)R + kS}{(1-k)R} \operatorname{tng} 2\varepsilon,$$
$$\cos 2\varphi_0 = \frac{(1-k)R \cos 2\varepsilon}{\sqrt{(1-k)^2R^2 + [2k(1-k)RS + k^2S^2]\sin^2 2\varepsilon}},$$

wobei wegen $2\varphi_0 = \pi + 2\eta$, der Wurzel das negative Vorzeichen ertheilt wurde, die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{2}(1-k)^2PR + k[(1-k)(QR + \frac{1}{2}PS) + kQS] \sin^2 2\varepsilon =$$
$$= \frac{1}{2}(1-k)P\sqrt{(1-k)^2R^2 + [2k(1-k)RS + k^2S^2] \sin^2 2\varepsilon}, \quad \ldots 10b)$$

welche zur Bestimmung von λ_m dient. Zu diesem Zwecke müssen die relativen Drehungswinkel $\alpha - \alpha_1$ bezüglich einer willkürlich zu wählenden Wellenlänge λ_1 für die Ausdehnung des Spectrums der Lichtquelle angenähert bekannt sein, also α gegeben sein durch einen Ausdruck von der Form

$$\alpha = \alpha_1 + f(\lambda - \lambda_0), \quad \ldots 9a)$$

so dass in R und S zu setzen kommt

$$\Delta\beta = f(\lambda - \lambda_1) - f(\lambda_m - \lambda_1).$$

Man kann aber auch mittelst $9a$) i und p als Functionen von α und α_1 ausdrücken und $\Delta\beta = \alpha - \beta$ in die Gleichung $10b$) einsetzen, die dann α_1 als Function von β_1 liefert, das durch die Messung gegeben ist.

Die Gleichung $10b$) wird sehr einfach für das Halbprisma, für welches

$$P = Q \text{ und } R = S$$

zu setzen ist. Es tritt dann PR als gemeinsamer Factor heraus, und da der andere Factor nicht Null wird, so erhält man

$$R = \Sigma i \Delta\beta = 0. \qquad \ldots 10c)$$

Auch für die Laurent-Platte lässt die Gleichung $10b$) eine Vereinfachung zu, insoferne die Glieder mit dem Factor $(1-k)^2$ vernachlässigt werden dürfen; sie lautet dann

$$[(1-k)(2QR+PS)+2kQS]\sin 2\varepsilon - (1-k)PS = 0 \quad \ldots 10'b)$$

und nur wenn man von den Lichtverlusten durch Reflexion absieht, wird die Bedingungsgleichung ganz unabhängig von ε und lautet

$$S = \Sigma p i \Delta\beta = 0. \qquad \ldots 10''b)$$

Die Summen P und Q sind unabhängig von $\Delta\beta$ und als bekannt anzusehen, wenn die Lichtquelle und die Laurent-Platte gegeben sind. Setzen wir nun

$$Q = Pq, \quad [(1-k)(2q+p)+2kqp]\sin 2\varepsilon - (1-k)p = p', \quad \ldots 11)$$

so nimmt die Gleichung $10b$) dieselbe Form an wie $10c$) und $10''b$), nämlich

$$\Sigma p' i \Delta\beta = 0,$$

oder, wenn wir für $\Delta\beta = \alpha - \beta$ setzen,

$$\beta \Sigma p' i = \Sigma p' i \alpha. \qquad \ldots 12)$$

Hierdurch kann β durch eine Schwerpunktsconconstruction erhalten werden aus der Curve der α, die innerhalb des in Betracht kommenden Theiles des Spectrums als eine Gerade angenommen werden darf, deren Punkte mit den Gewichten $p'i$ belastet zu denken sind. Gleiches gilt, wenn wir setzen

$$\Sigma i \alpha = \alpha_0 P, \quad \Sigma p i \alpha = \alpha'_0 Q = \alpha'_0 q P, \qquad \ldots 13)$$

bezüglich der Grössen α_0 und α'_0.

Der Unterschied der beiden Winkel α_0 und α_0' wird gegen diese Winkel selbst sehr klein sein; wenn wir daher

$$\alpha_0 = \alpha_0' + \eta'$$

setzen und den Ausdruck für β nach η entwickeln, so erhalten wir unter Beibehaltung der Glieder niedrigster Ordnung

$$\beta = \alpha_0 + \left(\frac{1}{r} - 1\right)\eta', \quad r = \frac{kq}{1-k} - \frac{1}{2\sin 2\varepsilon} + \frac{3}{2}. \quad \ldots 14)$$

Für das **Halbprisma** liefert die Gleichung 10*c*) oder auch die vorstehende, indem wegen $p = 1$

$$\alpha_0 = \alpha_0', \quad \eta' = 0$$

wird,

$$\beta = \alpha_0. \quad \ldots 15)$$

Die Anwendung und Bedeutung dieser Gleichungen soll nun etwas näher erläutert werden. Über der Abscissenaxe der Wellenlängen in Fig. 2 denken wir uns die Curve der α construirt, die sich, wie bemerkt, für den kleinen Theil des Spectrums von λ_1 bis λ_2 als Stück einer Geraden $\alpha_1\alpha_2$ darstellt.

Nehmen wir i constant an, so liegt der Schwerpunkt des mit den Gewichten i belasteten Linienstückes in dessen Mittelpunkt; es wird

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

und für das **Halbprisma** würde der gemessene Winkel β der Wellenlänge $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ entsprechen.

Für die **Laurent**-Platte hingegen wird dieser Winkel wegen des Zusatzgliedes in Gleichung 14) einer anderen Wellenlänge entsprechen können, die zudem, wenn $1-k$ nicht verschwindend klein ist, mit dem Winkel ε variirt. Nach dem im vorigen Artikel angeführten Beispiele kann q bis auf $^1/_2$ herabsinken; nehmen wir $1-k = 0 \cdot 04$ und einmal $2\varepsilon = 6°$, das anderemal $2\varepsilon = 2° 20'$, so wird der Factor von η' im ersten Falle $-^8/_9$, im zweiten $-^1/_3$.

Um η' zu bestimmen, hätten wir nur die α-Curve durch die Gewichte pi oder, weil i constant, durch Gewichte p belastet zu denken und die Schwerpunktcoordinate α_0' zu suchen. Hat nun

die Laurent-Platte eine normale Dicke, fällt also der grösste Werth von p in Fig. 2 auf die mittlere Wellenlänge $\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2)$, so wird auch der gesuchte Schwerpunkt sehr nahe an α_0 liegen, daher $\eta'=0$ anzunehmen sein.

Eine Abweichung von der normalen Dicke hat die Wirkung, dass die Belastung auf der α-Curve verschoben erscheint und der Punkt maximaler Belastung nicht mehr in die Mitte α_0 fällt. Ist die Plattendicke derart, dass die Minima von p auf die Grenzen λ_1 und λ_2 des Spectrums fallen, so wird bei geringer Verschiebung der Belastung der Schwerpunkt nahezu dieselbe Verschiebung erfahren wie der Punkt maximaler Belastung. Von zwei Platten mit normalen Dicken für λ_{D_1} und λ_{D_2} würde also, wenn für die eine $\eta'=0$, für die andere η' von Null schon merklich verschieden ausfallen, beispielsweise wäre bei Einschaltung einer Quarzplatte von 1 *mm* Dicke $\eta'=\pm 3'$, demnach wäre für die eine Platte

$$\beta=\alpha_0=\frac{1}{2}(\alpha_1+\alpha_0),$$

für die andere in den beiden oben bezüglich der Werthe von ε gemachten Annahmen einmal

$$\beta=\alpha_0\mp\frac{1}{3}\,.3'=\alpha_0\mp 60'';$$

das anderemal

$$\beta=\alpha_0\mp\frac{8}{9}\,.3'=\alpha_0\mp 160''.$$

Die Angaben verschiedener Laurent'scher Polarimeter und selbst eines und desselben Instrumentes bei verschiedenem Grade der Beschattung können daher unter einander und gegenüber einem Polarimeter mit Halbprisma um Grössen differiren, welche die möglichen und zulässigen Beobachtungsfehler sehr bedeutend übersteigen.

Für nicht zu kleine Werthe von ε wird der Factor von η nicht sehr von -1 verschieden sein, und man hat dann

$$\beta=\alpha_0-\eta=\alpha'_0. \qquad \ldots 14a)$$

Ist die Helligkeitsvertheilung eine andere als die oben angenommene, so können sich die Verhältnisse für die Laurent-Platte günstiger gestalten, insbesondere wenn die Helligkeitscurve ein hervortretendes Maximum aufweist.

Überdies kann schon eine nicht sehr hervortretende Änderung in der Helligkeitsvertheilung die Werthe von α_0 und α'_0 sehr merklich beeinflussen, so dass keineswegs eine ganz beiläufige Abschätzung derselben genügen wird. Wäre z. B. die Helligkeitscurve eine Gerade, deren Ordinate bei λ_1 sich zu der bei λ_2 wie 3 : 2 verhält, so wäre

$$\alpha_0 = \alpha_1 + \frac{7}{15}(\alpha_2 - \alpha_1)$$

und daher für eine Quarzplatte von 1 *mm* Dicke und einer Breite des Spectrums gleich dem Vierfachen des Abstandes der beiden Natriumlinien das jetzige α_0 gegen das frühere bei constanter Helligkeit um 36″ kleiner.

Die Anwendung eines Spectroskopes gestattet, bei entsprechender Lichtquelle eine beliebige Helligkeitscurve herzustellen und dadurch die Wellenlänge, die der gemessenen Drehung entspricht, wenigstens für das Halbprisma mit jeder gewünschten Genauigkeit zu ermitteln. Für eine Laurent-Platte tritt die Schwierigkeit einer Bestimmung der Grösse p hinzu, die nach dem obigen Beispiele sehr präcise zu geschehen hätte.

Eine Natriumflamme, deren Licht durch absorbirende Mittel homogener gemacht wird, kann für Halbprismenpolarimeter unter einander oder für ein bestimmtes Laurent-Polarimeter nur dann übereinstimmende Resultate geben, wenn die absorbirende Schichte dieselbe bleibt. Man soll daher die den Polarimetern gewöhnlich beigegebenen Kaliumdichromatplatten von durchaus gleicher Dicke wählen. Auch die Helligkeit der Flamme hat Einfluss auf die Grösse des beobachteten Drehungswinkels, da bei grösseren Helligkeitsvariationen auch die Helligkeitsvertheilung im Spectrum eine merkliche Änderung erfährt.

Die zu einer derartigen Lichtquelle gehörige Helligkeitscurve wird sich wohl kaum mit der nöthigen Genauigkeit bestimmen lassen, sie ist als unbekannt anzusehen und daher bleibt auch die Wellenlänge unbestimmt, zu der ein gemessener Drehungs-

winkel gehört. Diese kann nun für eine bestimmte, genau definirte Lichtquelle, z. B. für eine Natriumflamme von mittlerer Helligkeit, deren Licht durch eine Kaliumdichromatplatte von gegebener Dicke gereinigt wird, ein- für allemal ermittelt werden, wenn es sich um Halbprismen-Polarimeter handelt, indem man mittelst einer Quarzplatte die Drehung einmal mit der fraglichen Lichtquelle misst, sodann unter Anwendung eines Spectroskopes. Handelt es sich aber um Laurent-Polarimeter, dann müsste eigentlich diese Bestimmung für jedes einzelne Instrument geschehen und würde zudem, wegen der nothwendigen Kenntniss der Plattendicke allein schon, mit einigen Schwierigkeiten verbunden sein.

Es ist somit der Schluss berechtigt, dass Polarimeter mit Laurent-Platte nicht geeignet sind den hohen Grad von Genauigkeit, mit welchem die Bestimmung des Drehungswinkels geschehen kann, vollständig auszunützen, da sie in Bezug auf die Drehung und bezüglich der ihr entsprechenden Wellenlänge eine Unsicherheit zurücklassen können, welche diese Genauigkeit illusorisch macht. Damit soll jedoch diesen Instrumenten ihre Brauchbarkeit für gewisse praktische Zwecke nicht abgesprochen werden.

Es sollen noch die Ausdrücke für die Genauigkeit und Farbendifferenz abgeleitet werden. Aus den Gleichungen 2) erhalten wir durch Entwicklung nach $\Delta\varphi$ und indem wir dann in dem erhaltenen Ausdrucke, sowie in $J' = J'_0 = J'_1$ entsprechend der Bedingung für gleiche Helligkeit nach Gleichung 9) setzen $\varphi - \alpha = \varphi_0 - \Delta\beta$

$$\frac{\Delta J'}{\Delta\varphi} = (1-k)\Sigma i \sin 2(\varphi_0 - \varepsilon - \Delta\beta) - 2k \sin 2\varepsilon \Sigma pi \cos 2(\varphi_0 - \Delta\beta),$$

$$J' = \Sigma i \cos^2 (\varphi_0 - \varepsilon - \Delta\beta).$$

Hierin dürfen wir wieder unter Vernachlässigung kleiner Grössen $k = 1$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ nehmen und nach $\Delta\beta$ entwickeln, es wird dann

$$E' = \frac{1}{4aJ'} \frac{\Delta J'}{\Delta\varphi} = \frac{1}{2a} \frac{Q \sin 2\varepsilon}{P \sin^2 \varepsilon - R \sin 2\varepsilon}.$$

Nun genügt aber der Einstellungswinkel, für welchen

$$\Sigma p' i \Delta\beta = 0$$

sein muss, auch sehr nahe, wie wir oben gesehen haben, den Gleichungen

$$S = 0 \text{ und } R = 0,$$

so dass jedenfalls R einen sehr kleinen Werth hat, der in obigem Ausdrucke unbedenklich vernachlässigt werden darf; dann ergibt sich

$$E' = \frac{1}{a}\,\frac{Q}{P}\,\text{cotng}\,\varepsilon = E,$$

die Genauigkeit ist also sehr nahe dieselbe wie die bei der Nullpunkteinstellung.

In ganz ähnlicher Weise suchen wir zu einem Ausdruck für die Farbendifferenz $\Delta F'$ mit Hilfe der Gleichungen 4) zu gelangen. Abgesehen vom Factor $\frac{1}{J'}$ wird sich dieser Ausdruck vom linken Theile der Gleichung 10a) nur dadurch unterscheiden, dass, wenn wir noch zur Abkürzung setzen

$$\Sigma x i \Delta\beta = R', \quad \Sigma x p i \Delta\beta = S', \qquad \ldots 6b)$$

an Stelle von P, Q, R, S nunmehr P', Q', R', S' treten. In diesem Ausdrucke wird ferner die Summe der beiden ersten Glieder

$$\frac{1}{J}\left[(1-k)P'\cos^2(\varphi_0-\varepsilon)+kQ'\sin 2\varepsilon\sin 2\varphi_0\right]$$

als Ausdruck für die Farbendifferenz in der Nullpunktstellung zu vernachlässigen sein und daher

$$\Delta F' = \frac{1}{J}\left[(1-k)R'\sin 2(\varphi_0-\varepsilon)-kS'\sin 2\varepsilon\cos 2\varphi_0\right]$$

werden, worin schliesslich, da es sich nur um einen Ausdruck zur beiläufigen Abschätzung der Farbendifferenz handelt, $k = 1$ und $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ gesetzt werden darf, so dass wir schliesslich erhalten:

$$\Delta F' = 2\,\frac{S'}{P}\,\text{cotng}\,\varepsilon. \qquad \ldots 16)$$

Die Summe S' kann durch einen anderen Ausdruck ersetzt werden, der eine anschauliche Bedeutung hat. Wir haben das kleine in Betracht kommende Stück der Curve, die den homogenen Spectralfarben der Farbentafel entspricht, als geradlinig angenommen und das x in der Summe S' gezählt von einem Punkte der Tangente an den betreffenden mittleren Punkt des Curvenstückes. Wir dürfen weiter innerhalb dieses Curvenstückes die x den Wellenlängen der bezüglichen Farbe proportional setzen; dann wird auch in

$$S' = \Sigma xpi\alpha - \beta\Sigma xpi$$

α durch einen linearen Ausdruck nach x,

$$\alpha = A + Dx$$

darstellbar sein, in welchem D proportional ist der Rotationsdispersion innerhalb des benützten Theiles des Spectrums. Da ferner der Ursprung der x beliebig angenommen werden kann, so wollen wir ihn in den Schwerpunkt des mit den Gewichten pi belasteten Abschnittes auf x verlegen, so dass also

$$\Sigma xpi = 0.$$

Setzen wir dann noch

$$\Sigma x^2 pi = \xi^2 \Sigma pi = \xi^2 Q, \qquad \ldots 17)$$

so ist ξ der Trägheitsradius der mit pi belasteten Strecke bezüglich ihres Schwerpunktes oder, wenn wir uns die Curve über x construirt denken, deren Ordinaten pi sind, so ist ξ der Trägheitsradius des von dieser Curve und der x-Axe begrenzten Flächenstückes, bezüglich der zu x senkrechten Schwerpunktsaxe. Mit Benützung dieser Grösse ξ wird

$$\Delta F' = 2D\xi^2 \frac{Q}{P} \operatorname{cotng} \varepsilon = 2D\xi^2 E. \qquad \ldots 16a)$$

Es ist also die Farbendifferenz proportional der Rotationsdispersion, was von vornherein klar ist. Nicht so ohneweiteres ersichtlich ist die Beziehung der Farbendifferenz zur Empfindlichkeit, welche zeigt, dass erstere mit letzterer wächst, so dass es nicht möglich ist, hohe Empfindlichkeit mit geringer

Farbendifferenz zu verbinden; was man nach der einen Richtung gewinnt, verliert man nach der anderen.

Die Abhängigkeit des Trägheitsradius ξ von der Plattendicke lässt sich nach der angegebenen Construction leicht übersehen; es wird ξ mit der Plattendicke ziemlich rasch abnehmen. Für ein Halbprisma ist $\xi = \xi_1$ immer grösser als für eine Laurent-Platte und hierin wäre ein Vorzug gegenüber den Halbprismen gelegen, wenn nicht die Empfindlichkeit, auf die es doch zumeist ankommt, herabgesetzt würde. Auch hier handelt es sich keineswegs um geringfügige Unterschiede; legen wir die Annahmen zu Grunde, unter denen im Artikel III das Verhältniss der Empfindlichkeiten $E : E = q_1$ zu $^1/_2$ angegeben wurde, so ergeben dieselben für $\xi : \xi_1$ beiläufig den Werth $^1/_2$. Überhaupt wird, wenigstens für normale Plattendicken, ξ nahe proportional der Empfindlichkeit anzunehmen sein und daher die Farbendifferenz proportional der dritten Potenz der Empfindlichkeit.

Der bemerkte Vorzug der Laurent-Platten ist bekannt. Unter Anwendung von Natriumlicht, das durch Kaliumdichromat gereinigt war, zeigte sich die Farbendifferenz an einer dünnen Platte von beiläufig 0·22 *mm* Dicke nicht erheblich geringer als beim Halbprisma, aber eine dickere Platte von 0·60 *mm*[1] liess bei entsprechender Beschattung nur eine minimale Farbendifferenz erkennen. Dennoch konnte ich für das Halbprisma eine bedeutend grössere Empfindlichkeit constatiren. Diese wird überhaupt durch eine nicht zu grosse Farbendifferenz, die sich zudem beim Halbprisma durch eine grössere Beschattung des Gesichtsfeldes verringern lässt, keineswegs sehr nachtheilig beeinflusst. Obgleich mein Auge für Farbenunterschiede recht empfindlich ist, habe ich doch wiederholt mittelst einer Quarzplatte vom 1 *mm* Dicke genauere Einschaltungen gemacht als bei der Nullpunktstellung.

In Fig. 3 sind für das Intervall von $\lambda = 0 \cdot 0005232$ bis $\lambda = 0 \cdot 0006552$ die Curven eingezeichnet, welche die Intensitäten darstellen des durch eine Laurent-Platte von 0·48613 *mm* Dicke (die also für die Mitte zwischen den beiden Natriumlinien normale Dicke hat) und des durch die freie Öffnung des Dia-

[1] Die beiden Platten verdanke ich der Güte des Herrn H. Haensch in Berlin.

phragmas gegangenen Lichtes. Vorausgesetzt ist hiebei, dass i constant sei, ferner $k = 1$ und $\varepsilon = \pm 5°$. Ferner wurde angenommen, dass das Licht durch eine Rechtsquarzplatte von 1 *mm* gehe und dass der Analyseur jene Stellung habe, bei welcher die Strahlen der Natriumlinien gleiche Helligkeit zeigen. Es bedeuten die ausgezogenen Linien *FF* und *PP* die Intensitätscurven für die freie Öffnung und für die Platte, wenn $\varepsilon = +5°$, die gestrichelten Linien *FF* und *PP* dieselben Curven, wenn $\varepsilon = -5°$. Die beiden *F*-Curven wären zugleich die Intensitätscurven für ein Halbprisma, der freien und bedeckten Hälfte des

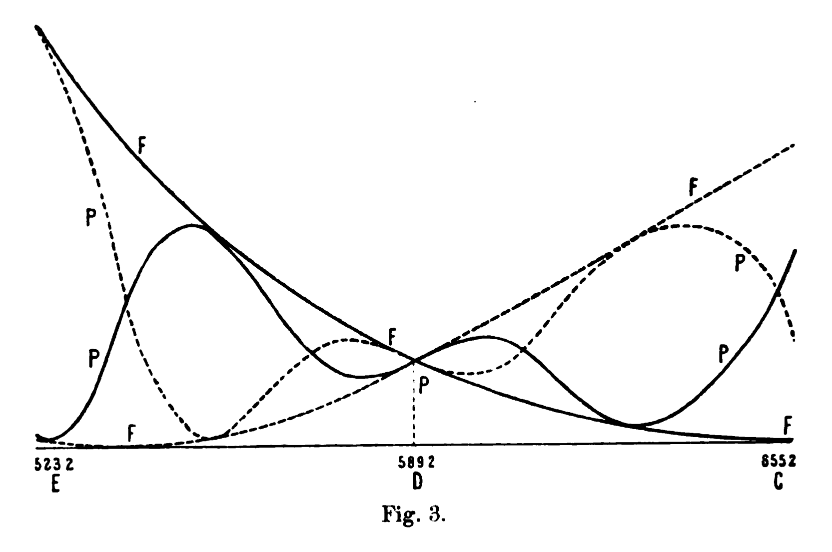


Fig. 3.

Diaphragmas entsprechend, unter denselben Annahmen wie oben, wobei der Winkel zwischen den Hauptschnitten der den Polarisator bildenden Prismen gleich 10° wäre. Man bemerkt, wie sehr die Intensitäten der einzelnen Farben im letzteren Falle von einander abweichen.

V.

Im Anschlusse an das Vorhergehende und zur Erläuterung der theoretischen Ergebnisse sollen noch die Resultate einiger Messungen mitgetheilt werden; bei denselben wurde ich durch Herrn A. Krug freundlichst unterstützt, wofür ich ihm hier meinen Dank abstatte.

Die Messungen beziehen sich sämmtlich auf dieselbe Rechtsquarzplatte, von Herrn B. Halle in Potsdam bezogen, deren Dicke zu 1·0933 *mm* bestimmt wurde. Nach den Werthen der Drehung im Quarz für die Mitte zwischen den beiden *D*-Linien, die v. Lang zu 21?64 für 1 *mm* bei 13?3 C. gefunden hat, müsste diese Platte für dieselbe Stelle des Spectrums eine Drehung von

$$23^\circ\!.6598 = 23^\circ\ 39'\ 32''$$

ergeben, und bei der Temperatur von 20° C., auf welche alle unten angeführten Drehungen nach der von v. Lang erhaltenen Formel

$$\beta_t = \beta_0(1 + 0\cdot000149\ t)$$

reducirt wurden, wäre die Drehung durch die Platte

$$\beta = 23^\circ\ 40'\ 58''.$$

Die unten angegebenen Drehungswinkel sind Mittelwerthe, die immer aus einem Satze von je 12 Einstellungen erhalten wurden, 6 Einstellungen auf den Nullpunkt und 6 bei vorgesetzter Platte, die mittelst eines Gauss'schen Oculars senkrecht zur Drehungsaxe des Analyseurs gestellt war. Der Nullpunkt wurde dreimal vor und dreimal nach dem Einlegen der Platte genommen. Die beigesetzten Buchstaben *L* und *K* bedeuten die Beobachter: Lippich, Krug.

Die Verhältnisse des Beobachtungsraumes gestatteten keine sehr feste Aufstellung der Lampe; dadurch ist die Übereinstimmung der Einzelbestimmungen weniger günstig ausgefallen, als sie sonst hätte sein müssen.

Zunächst wurde ein Polarimeter mit Halbprisma benützt, um den Einfluss verschiedener Helligkeit des Natriumlichtes und der Art seiner Reinigung zu constatiren.

Ein Natriumlicht von sehr bedeutender Helligkeit erhält man, worauf v. Fleischl[1] aufmerksam gemacht hat, durch Verdampfen von Bromnatrium in der Bunsenflamme; die Helligkeit steigt bis auf das Neunfache des gewöhnlichen Chlornatriumlichtes. Dieses Bromnatriumlicht wurde durch eine 10 *cm* dicke Schichte einer bei 15° C. concentrirten Lösung von Kalium-

[1] Wiedemann's Annalen. Bd. 38, S. 675.

dichromat von den brechbaren Strahlen gereinigt, die rothen Strahlen werden durch diese Lösung nur schwach absorbirt. Drei Sätze von Einstellungen ergaben:

	23°	37′	53″	*L*
	23	38	2	*K*
	23	37	45	*K*
Mittel...	**23°**	**37′**	**53″**	

Mittelst einer Chlornatrium-Flamme, deren Licht durch dieselbe Schichte von Kaliumdichromatlösung wie oben ging, wurden in 7 Beobachtungssätzen die folgenden Drehungen erhalten:

23°	40′	2″	*L*	23°	39′	24″	*K*
23	40	27		23	40	39	
23	40	27		23	40	35	
				23	40	5	
23°	40′	19″		23°	40′	16″	

Mittel: **23° 40′ 17″**

Es zeigt sich also, ganz übereinstimmend mit der schon durch eine oberflächliche Betrachtung erkennbaren grösseren relativen Menge rother Strahlen im Bromnatriumlichte, dass für dieses die Wellenlänge, die der Drehung entspricht, grösser ist als bei Chlornatriumlicht, dass die Differenz von 2′ 24″ der beiden Drehungswinkel mehr als das zwölffache der möglichen Beobachtungsfehler beträgt und dass auch für Chlornatrium die Drehung kleiner ist, als sie für die Mitte der Natriumlinien sein sollte.

Es wurde nun versucht, die sehr hervortretende Farbendifferenz durch ein geeignetes Absorptionsmittel für die rothen Strahlen zu verringern, wozu sich eine schwache Lösung von Kupferchlorid in Wasser ziemlich geeignet erwies, nur absorbirte dieselbe auch etwas die gelben Strahlen. Es gelang schliesslich durch Combination dieser Lösung mit der Kaliumdichromatschichte ein befriedigendes Resultat zu erhalten. Eine Farbendifferenz war kaum bemerkbar und selbst bei einer 2 *mm* dicken Quarzplatte nicht störend. Mittelst dieser absorbirenden Schichte und Chlornatriumlicht wurden folgende Drehungen gefunden:

23° 43′ 41″ *L*	
23 43 54	
23 43 53	23° 43′ 37″ *K*
23 43 30	23 43 39
23 43 50	
23° 43′ 46″	23° 43′ 38″

Mittel: **23° 43′ 44″.**

Nach diesen Vorversuchen wurde nun eine in ihrer Zusammensetzung genau bekannte Kupferchloridlösung hergestellt, die mit der Kaliumdichromatlösung combinirt eine Absorption ergab, welche mit der der obigen Combination entsprechenden, durch Vergleichung der Spectra möglichst gleich gemacht wurde. Die Cuvette mit den beiden Lösungen, die kurz die Normalcuvette genannt werden mag, bestand nun: erstens aus einer 9 *cm* dicken Schichte concentrirter Kaliumdichromatlösung; zweitens aus einer 1 *cm* dicken Schichte von Kupferchloridlösung, die auf 1 *g* Salz 6·35 cm^3 Wasser enthielt.

Unter Anwendung dieser Normalcuvette und Chlornatriumlichtes ergaben sich für den Drehungswinkel die folgenden sehr gut übereinstimmenden Werthe:

23° 43′ 14″ *L*	
23 43 38	
23 43 18	23° 42′ 56″ *K*
23 43 19	23 43 2
23 43 15	23 43 1
23 43 34	
23 43 11	
23° 43′ 21″	23° 43′ 0″

Mittel: **23° 43′ 15″.**

Trotzdem ein bedeutenderer Unterschied der jetzigen absorbirenden Schichte gegen die frühere durch das Spectroskop nicht zu constatiren war, zeigen sich doch Differenzen in den Messungen, die nicht von Beobachtungsfehlern herrühren können. Demnach muss die absorbirende Schichte recht genau definirt und her-

gestellt werden, wenn übereinstimmende Werthe bei grösseren Drehungswinkeln zu erwarten sein sollen.

Zudem scheint aus den angeführten Zahlenwerthen hervorzugehen, dass selbst bei nahezu gleich farbenempfindlichen Augen, wie es die meinigen und die des Herrn Krug sind, bei sehr kleiner Farbendifferenz die Auffassung von Helligkeitsdifferenzen noch merkliche Verschiedenheiten zeigen können und dass daher jeder Beobachter die der Lichtquelle entsprechende Wellenlänge für sich zu bestimmen hätte. Der bemerkte Umstand wäre übrigens ganz in Übereinstimmung mit sonstigen bei Helligkeitsmessungen gemachten Erfahrungen.

Unter Benützung der Normalcuvette wurde der Drehungswinkel noch mittelst der oben erwähnten Laurent-Platten gemessen. Diese zeigten keine gleichförmig beschatteten Gesichtsfeldhälften, was besonders bei der dünneren Platte auffallender hervortrat. Hieraus und aus der geringeren Empfindlichkeit der Laurent-Platte erklärt sich die weniger gute Übereinstimmung der Einzelbestimmungen.

Die Laurent-Platte von 0·23 *mm* Dicke ergab die Drehungen:

23° 43′ 7″ *L*	
23 43 45	23° 43′ 59″ *K*
23 44 6	23 44 13
23 44 51	
23° 43′ 57″	23° 44′ 6″

Mittel: **23° 44′ 0″.**

Mit der dickeren Platte von 0·50 *mm* hingegen war der Drehungswinkel:

23° 44′ 48″ *L*
23 44 19
23 44 43

Mittel: **23° 44′ 37″.**

Also selbst bei äusserst geringer Farbendifferenz zeigen die Platten untereinander und gegen das Halbprisma Unterschiede, die nicht mehr den Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können.

Es war beabsichtigt, für die oben angegebene absorbirende Schichte, die Normalcuvette, die Wellenlänge zu bestimmen, auf welche sich unter Anwendung von Chlornatriumlicht von der Helligkeit der gebräuchlichen Lampen eine mit dem Halbprisma gemessene Drehung bezieht. Hiezu stand ein sonst sehr vorzügliches Spectrometer von Hilger in London mit Christy'schem Halbprisma zu Gebote. Es ist ein Spectrometer mit gerader Durchsicht, bei welchem durch blosse Drehung des Prismas jede Stelle des Spectrums an den Ocularfaden gebracht werden kann. Das Ocular war durch eine Spalte ersetzt; die Orientirung dieser gegen das Polarimeter und des Spectrometers gegen den Heliostatenspiegel bleibt unverändert während der Einstellungen auf die verschiedenen Wellenlängen. Leider war die Dispersion des Spectrometers für vorliegenden Zweck zu klein, so dass die folgenden Bestimmungen nicht als definitive gelten können.

Die Anordnung entsprach derjenigen, die in meiner Abhandlung: Über polaristrobometrische Methoden, insbesondere über Halbschattenapparate"[1] angegeben ist. Um die bei feiner Ocularspalte störenden entoptischen Schatten zu vermeiden, wurde vor dieselbe eine durch eine Stimmgabel in Schwingungen erhaltene Concavlinse[2] gesetzt. Durch diese schwingende Linse wird noch ein weiterer Vortheil erzielt. Die Quarzplatte stand nahe am Analyseur, an welchem das Bild der Ocularspalte entsteht. Beim Schwingen der Linse überstreicht das Bild eine grössere Fläche der Platte und man erhält einen mittleren Werth des Drehungswinkels, der sonst wegen der nicht genauen Homogenität oder wegen des Mangels genau planparalleler Endflächen für die einzelnen Stellen der Platte merklich verschieden ausfallen kann. Eine Änderung der Plattendicke bei einer 1 *mm*-Platte von 1 μ bewirkt schon eine Änderung des Drehungswinkels für die Natriumlinien um 75''.

Die Breite der Ocularspalte war das Zwei- bis Dreifache des Abstandes der beiden Natriumlinien, und die Collimatorspalte wurde so weit geöffnet, dass bei homogener Beleuchtung der-

---

[1] Wien. Ber., 91, II. Abth., S. 1068—1071, 1885.

[2] Vergl. F. Lippich, „Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn G. H. v. Wyss etc.", Wiedemann's Annalen, Bd. XXXVI, S. 767, 1889.

selben ihr Bild genau gleiche Breite mit der Ocularspalte hat. Die Helligkeitscurve des in Betracht kommenden Spectrumtheiles ist dann ein gleichschenkeliges Dreieck und die gemessenen Drehungen gelten, nach dem im vorhergehenden Artikel Bemerkten, für jene Spectrallinie, die der Spitze des Dreieckes entspricht. Bei einseitig sich öffnender Collimatorspalte fällt diese Spectrallinie bei sehr feiner Stellung desselben an einen Rand der Ocularspalte, bei dem angewandten Spectrometer an den linken Rand.

Es wurde nun mit Hilfe eines vorgesetzten Oculars und bei sehr enger Collimatorspalte die Linie D_2 vor jeder Messung möglichst genau an den linken Rand der Ocularspalte gestellt, dann die Collimatorspalte entsprechend geöffnet und nach Schluss der Messungen die Unveränderlichkeit der Einstellungen controlirt. Das Licht ging überdies durch eine vor dem Collimator aufgestellte Cuvette, die mit Kaliumdichromatlösung gefüllt war.

Vier Beobachtungssätze ergaben bei jedesmal erneuter Einstellung der Linien D_2 die folgenden Drehungen mittelst der oben angegebenen Quarzplatte und reducirt auf die Temperatur von 20° C.

	23°	42′	42″	*L*
	23	42	2	
	23	42	56	
	23	42	26	
Mittel:	**23°**	**42′**	**31″**	

Die bedeutenden Abweichungen erklären sich aus der Unsicherheit der Einstellungen am Spectrometer. Die mittleren Fehler der Bestimmungen innerhalb eines und desselben Beobachtungssatzes sind viel geringer und überschreiten nicht 8″. Nimmt man diese zu 10″ an, so hätte das Spectrometer die Einstellungen bis auf $^1/_{17}$ des Abstandes der Natriumlinien genau gestatten müssen, was bei Weitem nicht der Fall war.

Eine fernere Bestimmung galt der Rotationsdispersion an der Stelle der Natriumlinien, es wurde erhalten für eine

Differenz der Wellenlängen = 0·000001
Drehungswinkel = 291″.

Mit diesem Werthe würden sich für die bei den oben angeführten Messungen verwendeten Lichtquellen die folgenden Wellenlängen ergeben:

Bromnatrium, Kaliumdichromat ....$\lambda 10^8 = 59193$
Chlornatrium, Kaliumdichromat ....$\lambda 10^8 = 58937$
Chlornatrium, Normalcuvette ....$\lambda 10^8 = 58880$,

wobei die Wellenlänge von D_2 zu 0·00058891 angenommen ist.

Für Chlornatriumlicht, das durch Kaliumdichromat gereinigt ist, fällt die Wellenlänge allerdings sehr nahe an die Mitte zwischen den beiden Natriumlinien, denn dieser entspricht die Wellenlänge $\lambda 18^8 = 58921$. Trotzdem ist der betreffende Drehungsunterschied bei so grossem Rotationswinkel, wie ihn unsere Quarzplatte liefert, 47″, also weit grösser als die Beobachtungsfehler.

Die Drehung durch die Quarzplatte für die Mitte der Natriumlinien, für welche die Drehungsdifferenz 173″ beträgt, wäre nach den obigen Bestimmungen

$$\beta = 23° \, 41' \, 4'',$$

was gegen die aus den v. Lang'schen Zahlen berechnete nur um 6″ zu gross ist.

Für die Dicke = 1 *mm* ergibt ferner unsere Dispersionszahl, entsprechend der Differenz der Wellenlängen der Natriumlinien $\Delta\lambda . 10^9 = 601$, einen Drehungsunterschied = 160″; die von Boltzmann berechnete Dispersionsformel für Quarz 168″, eine ziemlich gute Übereinstimmung.

Das geeignetste Mittel, um für Halbschattenapparate mit Halbprismen die Messungen verschiedener Beobachter, zumal bei Anwendung verschiedener Lampen für Natriumlicht und Absorptionsmittel vergleichbar zu machen, wäre die Benützung einer Quarzplatte von nahezu 1 *mm* Dicke, deren Drehung entsprechend einer Natriumlinie, deren Dispersion an der Stelle derselben und deren Temperaturcoëfficient genau bestimmt worden ist. Man kann dann, wenn es nöthig erscheinen sollte, vor jeder Messung mittelst einer solchen geaichten Quarzplatte, die den Versuchsbedingungen zukommende Drehung der gewählten Wellenlänge ermitteln und daraus die gemessene Drehung der Versuchs-

substanz auf diese Wellenlänge reduciren. Die auseinandergesetzte Methode zur bezüglichen Aichung der Quarzplatten lässt kaum etwas zu wünschen übrig, nur was die Hilfsmittel anbelangt, so wäre ein eigens zu diesem Zwecke construirtes Spectrometer von grosser Dispersion und Lichtstärke, das alle während einer Messungsreihe nothwendigen Einstellungen sicher und leicht auszuführen gestattet, von besonderem Vortheil. Angaben über ein solches, sowie über die Anwendung der Photographie auf polaristrobometrische Methoden mögen einer späteren Mittheilung vorbehalten bleiben.

Zum Schlusse obliegt mir noch, Herrn Inspector Mareck für die Ausmessung der Quarzplatte meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Leider waren die Gestaltfehler der Platte so bedeutend, dass der aus den Messungen abgeleitete und oben angegebene Mittelwerth der Plattendicke kaum auf $0 \cdot 5\,\mu$ verbürgt werden kann, wesshalb auch die genaue Übereinstimmung des gefundenen Drehungswinkels mit dem von Lang'schen Werthe eine rein zufällige ist.

Über die Untersuchung elektrischer Schwingungen mit Thermoelementen

von

Ignaz Klemenčič.

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

(Mit 3 Textfiguren.)

Die grosse Wichtigkeit der Hertz'schen Entdeckungen bringt es mit sich, dass sich die Physiker lebhaft bemühen, neue Beobachtungsmethoden zu erfinden, theils um die Versuche einem grösseren Zuhörerkreise in objectiver Weise zu zeigen, theils um genaue quantitative Messungen auszuführen. In dieser Beziehung seien erwähnt die Methoden von Wiechert,[1] Fitzgerald,[2] Boltzmann,[3] Dragoumis[4] und die von Rubens und Ritter[5] angewendete bolometrische Methode, mittelst welcher die beiden zuletzt genannten Beobachter das Verhalten von Drahtgittern gegen elektrische Schwingungen quantitativ untersuchten. Nachfolgend will ich einige Messungen beschreiben, welche ich mit einem zwischen die beiden Secundärinductoren eingeschalteten Thermoelemente machte. Es wurde auf diese Weise der aus dem Primärspiegel tretende Strahl längs seiner Axe und senkrecht zu derselben untersucht und weiters die Verstärkungszahl eines Secundärspiegels bestimmt. Unter der Verstärkungszahl verstehe ich dabei das Verhältniss der

[1] Tageblatt d. Naturforscherversamml. zu Heidelberg, 1889, S. 212.
[2] Nature, 41, 1890, p. 295.
[3] Wied. Ann., Bd. 40, S. 399.
[4] Nature, 39, 1889, p. 548.
[5] Wied. Ann., Bd. 40, S. 55.

vom Thermoelemente angezeigten Energie, wenn sich dasselbe im Secundärspiegel befindet, zu jener, welche es anzeigt, wenn es an derselben Stelle im Raume, aber ohne Secundärspiegel aufgestellt wird. Ich machte auch einige Messungen mit dem Bolometer, allerdings nicht mit einer Doppelbrücke nach Art der von Rubens und Ritter angewendeten, sondern mit einer einfachen, welche mir auch ganz gute Resultate lieferte; für die erwähnten Messungen schien mir jedoch die Anwendung von Thermoelementen zweckentsprechender. Ein nicht geringer Vorzug der letzteren liegt darin, dass die Compensation der Widerstandsveränderungen gänzlich entfällt. Durch Wahl passenderer Drähte und Combinirung von mehreren Elementen kann jedenfalls die Empfindlichkeit der hier beschriebenen Methode noch bedeutend gesteigert werden, und dieser Bericht möge daher nur als ein vorläufiger angesehen werden.

1. Die Beobachtungsmethode und die Thermoelemente.

Zwischen den beiden einander zugekehrten Enden eines Secundärinductors ist in einer aus der Fig. 1 ersichtlichen Weise

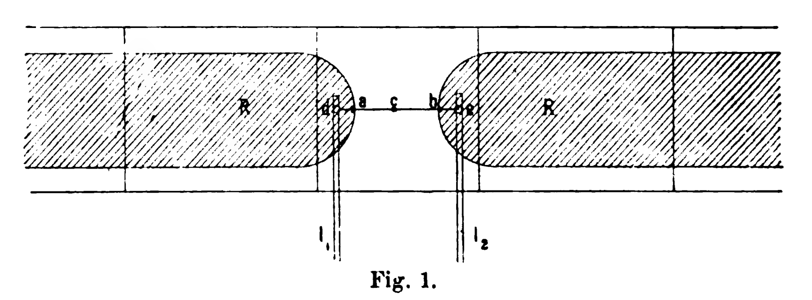


Fig. 1.

ein Thermoelement, bestehend aus einem Platin- und einem Patentnickeldrahte,[1] angebracht. Bei *c* ist die Löthstelle, wo die beiden feinen Drähte zusammenstossen. Die Entfernung *ab* beträgt 3 *cm* und *ac* ist ungefähr gleich *cb*. Bei *a* und *b* sind die Drähte an

[1] Eine von Basse & Selve in Altona erzeugte Metalllegirung, welche sich zur Anfertigung von Widerständen besonders gut eignet. Die Legirung wurde untersucht von Feussner und Lindeck (Zeitschrift f. Instrk., 9, S. 233) und auch vom Verfasser (Wiener Ber., Bd. 97), wobei sie jedoch fälschlich als Nickelin bezeichnet wurde.

die Secundärinductoren, bei *d* und *e* an einen 1·2 *mm* dicken Kupferdraht (l_1, l_2) und dieser wieder an den Secundärinductor angelöthet. Das ganze Element sammt den Secundärinductoren wird von Glasplatten eingeschlossen, so dass es vor Luftströmungen und Beschädigungen geschützt ist (vide Fig. 2). Eine in der

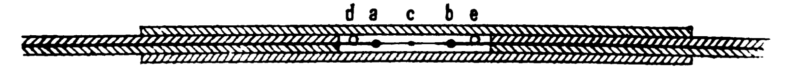


Fig. 2.

Mitte des Elementes um die Glasplatten gelegte Lage von Baumwolle soll den Einfluss der äusseren Temperaturschwankungen vermindern.

Von den Kupferdrähten führt eine Leitung zu dem in einem Nebenzimmer befindlichen Galvanometer, an welchem die durch die Temperaturänderungen der Löthstelle bedingten Strome beobachtet werden. Der benützte Patentnickeldraht hat eine Dicke von 0·11 *mm*, der Platindraht eine solche von 0·04 *mm* (Wollaston'scher Draht). Die thermoelektrische Kraft dieser Combination beträgt 24·3 Mikrovolt pro 1°. Besser als diese Combination würde sich ein Element aus Eisen und Patentnickel mit einer thermoelektrischen Kraft von 43 Mikrovolt pro 1° empfehlen, falls nur solche Drähte von genügender Feinheit zu erhalten wären. Mit einem einzigen Elemente lassen sich vergleichende Messungen an verschiedenen Stellen des von den Strahlen beschienenen Raumes ziemlich schwer ausführen, da die Grösse des Effectes von der Beschaffenheit der Oberfläche der Primärinductoren abhängt und diese letztere mitunter sehr rasch wechselt und selbst nach jedesmaligem Putzen kaum immer die gleiche wird. Man überwindet zum Theile diese Schwierigkeiten, wenn man gleichzeitig zwei Secundärinductoren mit den entsprechenden Elementen in die Galvanometerleitung einschaltet und von diesen das eine als Standardelement an irgend einer passenden Stelle des beschienenen Raumes dauernd aufstellt, das andere aber an die zu untersuchenden Stellen bringt. Beobachtet man dann immer die Summe und die Differenz der Wirkung, so bekommt man Daten, die mit einander gut vergleichbar sind. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass für eine und dieselbe Aufstellung Summe und Differenz mehrmals hintereinander beobachtet wurden,

um auf diese Weise die allmäligen Veränderungen der Funkenwirkung zu eliminiren.

Ein einziger Funke ist nicht genügend wirksam, um eine am Galvanometer beobachtbare Erwärmung der Lothstelle hervorzubringen; ich habe daher immer eine Reihe von Funken (ungefähr 100) durch 10 Sec. lang erregt, sowie es die Herren Rubens und Ritter (l. c.) bei ihrer bolometrischen Methode machten. Vor Beginn der Funkenerregung wurde der Stand der Galvanometernadel, sodann die unter dem Einflusse des 10 Sec. dauernden Funkenstromes erreichte grösste Ausweichung und schliesslich der erste Umkehrpunkt nach Aufhören der Funken abgelesen und die Differenz zwischen der grössten Ausweichung und dem Mittel der beiden anderen Ablesungen als beobachteter Ausschlag notirt. Dieser Ausschlag ist dann ein Mass für die im Thermoelemente entwickelte Energie.

2. Die Spiegel und die Inductoren.

Die Spiegel sind genau nach den Angaben von Hertz[1] hergestellt. Zur Erregung der primären Schwingungen dienten zwei verschiedene Inductorenpaare; das eine, in der von Hertz (l. c.) angegebenen Grösse verfertigt, war in mehreren, aus verschiedenem Material hergestellten Exemplaren vorhanden; das zweite Paar war aus Messing und doppelt so lang als das erste; die übrigen Dimensionen waren bei beiden gleich. Die Primärinductoren wurden durch Messinghülsen in der gewünschten Lage im Spiegel gehalten.

Von den verschiedenen Materialien, welche zur Herstellung der Primärinductoren verwendet wurden, hat sich Platin entschieden am besten bewährt. Messing oder Kupfer geben zwar ebenso gute Resultate; allein bei diesen vermindert sich der Effect nach dem Putzen ziemlich rasch, während er beim Platin längere Zeit ungeschwächt bestehen bleibt. Bei allen Messungen, wo ein Funkenstrom zur Verwendung kommt, empfiehlt es sich daher, die einander zugekehrten Oberflächen des Inductorpaares aus Platinblech herzustellen. Die Funkenstrecke zwischen den Primärinductoren betrug 3 *mm*. Die Reinigung der Kugeln geschah mit Wienerkalk und Alkohol mit Wasser.

[1] Wied. Ann., Bd. 36, S. 769.

Die primären Funken wurden mit Hilfe eines grossen, durch zwei Accumulatoren betriebenen Inductoriums (von Siemens & Halske) erregt. Statt des Foucault'schen Interruptors benützte ich einen Torsionsinterruptor, der nach den von Paul Czermak[1] angegebenen Principien construirt ist. Durch Belastung des schwingenden Hebels wurde die Schwingungszahl auf 10 in der Secunde herabgedrückt. Bei dem verwendeten Inductorium empfiehlt es sich nicht, eine grössere Häufigkeit der Unterbrechungen zu gebrauchen, weil sich dann der Eisenkern des Inductoriums zu wenig magnetisirt.

Die secundären Inductorenpaare waren in ähnlicher Weise wie die von Rubens und Ritter verfertigt. Sie bestanden aus breiten Streifen Messingblech. Rubens und Ritter bekamen mit dem Bolometer eine sehr gute Wirkung bei Anwendung von 10 *cm* breiten Stanniolstreifen. Um einen Einfluss der Breite des Inductors zu constatiren, hatte ich drei verschiedene Paare von je 2·5, 5·0 und 10 *cm* Breite zur Verfügung; die Länge war bei allen die gleiche, und zwar 30 *cm* für jede Inductorhälfte. Das verwendete Messingblech hatte eine Dicke von 0·25 *mm*. Obwohl eine sichere Angabe über den Zusammenhang zwischen der Breite des Inductors und dem beobachteten Effecte nicht gemacht werden kann, da ja die verschiedene Menge des an der Lothstelle haftenden Zinns eine solche nicht zulässt, so kann man aus den Beobachtungen doch mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen, dass die verschieden breiten Elemente unter sonst gleichen Umständen auch ganz gleich wirken würden und dass ein Einfluss der Breite kaum vorhanden ist.

3. Das Galvanometer.

Das benützte Galvanometer ist ein Thomson'sches von Carpentier in Paris mit Rollen aus 0·8 *mm* dickem Drahte und 5·7 Ohm Widerstand bei 18°. Die Entfernung der Millimeterscala vom Spiegel betrug 1800 *mm* und die Schwingungsdauer der Galvanometernadel 12·4 Sec. Ein einseitiger Ausschlag von 1 *mm* zeigte eine Stromstärke von $3 \cdot 5 \times 10^{-9}$ Ampère an. Der gesammte Widerstand des Galvanometers der Thermoelemente und der Zuleitungsdrähte machte 10·3 aus.

[1] Centralzeitung für Optik und Mechanik, 9. Jahrg., 88, Nr. 14, S. 157.

4. Resultate.

Nachfolgend bezeichne ich mit D die Entfernung der Primär- von den Secundärinductoren, mit S das Standardelement, mit T das bewegliche Thermoelement und mit α den beobachteten Galvanometerausschlag. Bei allen Versuchen habe ich den Primärspiegel verwendet. Es sei ferner bemerkt, dass der Funkenstrom mittelst eines Schlüssels vom Beobachtungsstuhle erregt werden konnte. Als Beispiel führe ich in Tabelle 1 eine Beobachtungsreihe an, welche unter folgenden Bedingungen gemacht wurde. T im Secundärspiegel. S 41 *cm* von der Mitte des austretenden Strahles und 19 *cm* vor der vorderen Begrenzungsebene des Primärspiegels. Die kleineren Primärinductoren, $D = 2 \cdot 85\, m$. $T+S$ bedeutet, dass beide Elemente im gleichen Sinne, $T-S$, dass sie im entgegengesetzten Sinne wirkten. Es wurde immer S commutirt.

Tabelle 1.

$T+S$	$T-S$	$T:S$
α		
36·0	—	—
—	26·0	5·8
41·5	—	—
—	30·7	—
42·6	—	—

Die angeführte Beobachtungsreihe ist eine solche von mittlerer Qualität, was die Constanz und Grösse des Ausschlages anbelangt. In beiden Richtungen werden gewiss noch bedeutende Verbesserungen zu erreichen sein.

a) Die Energievertheilung senkrecht zur Mittellinie des austretenden Strahles. Die Anordnung ist aus Fig. 3 ersichtlich. $D = 1 \cdot 25\, m$, diesmal gezählt von den Primärinductoren bis zu dem mit o bezeichneten Punkte der in der Figur verzeichneten Scala; an dieser selbst sind die Entfernungen in Centimetern ausgedrückt und in der nachfolgenden Tabelle 2

mit e bezeichnet. Bei diesen Beobachtungen wurde der Secundärspiegel nicht verwendet. Der Ausschlag α ist für $e = 0$ gleich 1 gesetzt. Kl. P. I., Gr. P. I. bedeutet, dass respective das kleine

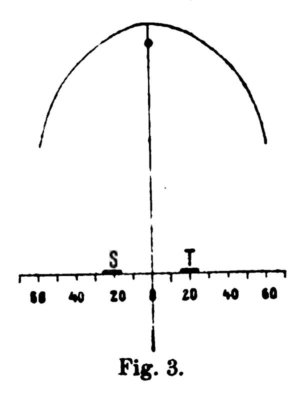


Fig. 3.

oder das grosse Primärinductorenpaar verwendet wurde. Es sei noch bemerkt, dass der Primärspiegel nur für die kleineren Primärinductoren abgestimmt ist,[1] nicht aber für die grossen. Das Standardelement befand sich in einer Entfernung von 22 *cm* von der Mittellinie des Strahles.

Tabelle 2.

e	Kl. P. I.	Gr. P. I.
	α	
0	1	1
15	1·05	0·87
30	0·67	0·56
45	0·37	0·49
60	0·17	0·45
75	0·12	0·26

Durch die Zahlen der angeführten Tabelle ist die concentrirende Wirkung des Primärspiegels deutlich ausgedrückt. Bei Anwendung der kleineren Primärinductoren ist eine Strecke von 15 *cm* nach jeder Seite der Mittellinie ziemlich homogen.

[1] Vide Hertz Wied. Ann., Bd. 36, S. 772.

Der Werth von α für $e=15$ deutet ein kleines Maximum an. Bei allen diesen Versuchen ist jedoch zu beachten, dass in einem geschlossenen Locale Störungen durch die Umgebung wohl kaum zu vermeiden sind. Insbesondere bei Messungen ohne Secundärspiegel werden Beugungen und Reflexionen vielfach störend einwirken, so dass die obigen Zahlen nur ein angenähertes Bild des Verlaufes der Energie darbieten.

b) Die Energievertheilung längs der Mittellinie des Strahles. Es wurden Versuche bei zwei verschiedenen Werthen von D mit und ohne Secundärspiegel, sowie mit den kleinen und grossen Primärinductoren gemacht. Tabelle 3 bezieht sich auf die Versuche ohne Secundärspiegel, Tabelle 4 auf jene mit Secundärspiegel, im letzteren Falle konnten die Entfernungen D natürlich bedeutend grösser genommen werden. $T:S$ bedeutet wieder das Verhältniss der von T und S angezeigten Energie. S befand sich 41 *cm* von der Mitte und 19 *cm* von der vorderen Begrenzungsfläche des Primärspiegels D entfernt. Der Ausschlag α für das kleinere D ist $=1$ gesetzt.

Tabelle 3.
(Ohne Secundärspiegel.)

D in *m*	Kl. P. I.		Gr. P. I.	
	$T:S$	α	$T:S$	α
1·25	3·26	1	1·93	1
2·85	0·80	0·245	0·60	0·311

Tabelle 4.
(Mit Secundärspiegel.)

D in *m*	Kl. P. I.		Gr. P. I.	
	$T:S$	α	$T:S$	α
2·85	5·6	1	1·61	1
6·72	1·8	0·321	0·44	0·272

Es liegen zu wenig Beobachtungen vor, um ein genaues Gesetz für die Energieabnahme längs der Mittellinie des Strahles aufzustellen, das kann man jedoch mit einiger Wahrscheinlichkeit sagen, dass die Energie weniger rasch als das Quadrat der Entfernung D abnimmt. Bei diesen Versuchen ist zu beachten, dass der Secundärspiegel auf das Standardelement zurückwirken kann, dass es also bei verschiedenem D kein Standardelement mehr ist. Ich hatte S wohl so aufgestellt, dass dieser störende Einfluss nicht gross sein konnte; um jedoch ein Urtheil zu gewinnen, ob und in welcher Höhe ein solcher Einfluss vorhanden sein könnte,

habe ich bei einer anderen Versuchsreihe das Standardelement absichtlich so aufgestellt, dass genannter Einfluss voraussichtlich ziemlich gross ausfallen musste. Es wurde gefunden für die kleinen Primärinductoren

$$D = 2\cdot85\,m \qquad T:S = 3\cdot75 \qquad \alpha = 1$$
$$= 6\cdot72 \qquad = 1\cdot02 \qquad = 0\cdot28$$

und für die grossen Primärinductoren

$$D = 2\cdot85\,m \qquad T:S = 1\cdot36 \qquad \alpha = 1$$
$$= 6\cdot72 \qquad = 0\cdot30 \qquad = 0\cdot22$$

Ein Vergleich der zuletzt angeführten α mit jenen der Tabelle 4 zeigt dass in der That eine Rückwirkung auf das Standardelement vorhanden sein kann; doch glaube ich, dass der Einfluss dieser Rückwirkung bei der früheren Aufstellung des Standardelements die Beobachtungsfehler nicht übersteigt.

c) Die Verstärkungszahl des Secundärspiegels. Aus den Daten der Tabellen 3 und 4 berechnet sich diese Zahl, die ich mit K bezeichnen will, bei $D = 2\cdot85\,m$

für die kleineren Primärinductoren $K = 7\cdot0$
" " grösseren " $= 2\cdot7$.

Die beiden Zahlen zeigen deutlich, dass die Spiegel nur den kleineren Inductoren angepasst sind.

Über das elektrische Leitungsvermögen von Salzdämpfen in der Bunsenflamme

von

Svante Arrhenius.

(Vorläufige Mittheilung.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

Wenn man in eine nichtleuchtende Bunsenflamme eine Salzperle einführt, so dass die Flamme durch die Salzdämpfe gefärbt wird, so nimmt das Leitungsvermögen der Flamme stark zu. Der Zweck der Arbeit, über deren Resultate ich einen kurzen Überblick geben will, war, diese Erscheinung näher zu untersuchen und besonders zu ermitteln, wie verschiedene Mengen von verschiedenen Salzen dabei wirksam sind. Die Versuchsanordnung war die folgende, welche für das Studium der Leuchtkraft der Flammen zuerst von Gouy[1] benutzt worden ist. Die Flamme eines gewöhnlichen Bunsenbrenners wurde durch zwei Zuleitungen mit Gas und mit Luft, beide unter constantem Drucke, gespeist. Der Luftstrom wurde vordem durch einen Spray geleitet, in welchem sich die zu untersuchende Salzlösung befand; er brachte in Folge dessen kleine Tropfen dieser Salzlösung in die Flamme. Durch Änderung des Gehaltes der Lösung konnte man in demselben Verhältnisse die Menge des mit dem Luftstrome zur Flamme geführten Salzes ändern. Selbtsverständlich konnte man in derselben Weise beliebige Salze in die Flamme hineinbringen. In der Flamme waren zwei Platinplatten (gross 2·92 und 2·54 cm^2) in einer Entfernung von 0·56 *cm* voneinander unmittelbar über der Spitze des dunklen Flammenkerns

[1] Gouy: Ann. de chem. et de phys. (5) 18 p. 5 (1879).

mittelst dünner Platindrähte aufgehängt. Zwischen diesen Platten wurde nun ein elektrischer Strom, welcher auch ein Wiedemann'sches Galvanometer durchsetzte, geführt. Als Elektricitätsquelle diente eine Batterie von 40 Clark'schen Elementen oder mittelst eines Rheostaten abgezweigte Bruchtheile eines Daniell'schen Elementes. Da alle andern Widerstände in dem Stromkreise (Batterie, Galvanometer) gegen denjenigen der Flamme zwischen den Platinelektroden sehr klein waren, so kann der Ausschlag des Galvanometers als ein Mass des Leitungsvermögens der Flamme betrachtet werden. Ein Scalentheil des Galvanometers entsprach ziemlich nahe 10^{-8} Ampères. Im Folgenden sind die Leitungsvermögen der untersuchten salzhaltigen Flammen gewöhnlich in Scalentheilen angegeben, welche, wenn nöthig, für den äusseren Widerstand (des Galvanometers) corrigirt sind.

1. Zusammenhang zwischen Stromstärke und elektromotorischer Kraft. Wenn die Verhältnisse im Übrigen constant bleiben und nur die elektromotorische Kraft verändert wird, so nimmt die auf dem Galvanometer abgelesene Stromstärke mit der verwendeten elektromotorischen Kraft zu. Es gilt aber keineswegs das Ohm'sche Gesetz, sondern es wächst der Galvanometerausschlag viel langsamer als der elektromotorischen Kraft proportional. So entsprechen zum Beispiel, wenn die zerstäubte Lösung $^1/_4$-normales Kaliumsulfat[1] ist, folgende reducirte Ausschläge den nebengeschriebenen elektromotorischen Kräften (in Clarks; 1 Clark wurde gleich 1·46 Volt gefunden).

Stromstärke	242	275	352	452	612	865	10^{-8} Ampères
Elektromotorische Kraft	1	2	5	10	20	40	Clarks.
Stromstärke : $242 \cdot 10^{-8}$ [2]	1	1·13	1·45	1·87	2·53	3·57	

Die beobachtete Stromstärke ist für das eigene Leitungsvermögen der Flamme, wenn kein Salz darin enthalten ist, durch einfachen Abzug der entsprechenden Stromstärke bei salzfreier Flamme, corrigirt.

Wie man aus der dritten Zeile der obigen Tabelle ersieht, ist die Stromstärke keineswegs der elektromotorischen Kraft proportional.

---

[1] Diese Lösung enthält in 1 Liter $^1/_4$ (39 + 48) = 21·75 *gm* Kaliumsulfat.

[2] Das heisst Stromstärke ausgedrückt in der Stromstärke, welche 1 Clark entspricht, als Einheit.

Wenn man nun für die verschiedenen Salze in verschiedenen Verdünnungen ähnliche Tabellen für die (corrigirte) Stromstärke entwirft, so findet man, dass die Zahlen der dritten Zeile immer innerhalb der Versuchsfehler gleich bleiben. Es ist also in der Formel:

$$i = k . f(e)$$

wo i die (corrigirte) Stromstärke, e die elektromotorische Kraft und k eine Constante ist, $f(e)$ für alle Salze in allen Verdünnungsgraden dieselbe Function. Ähnlich sind die Verhältnisse bei kleineren elektromotorischen Kräften. Es verhalten sich die (corrigirten) Ausschläge für verschiedene elektromotorische Kräfte unter 1 Daniell (=1·14 Volts) wie folgende Tabelle zeigt:

Elektromotorische Kraft	1	1·5	0·2	0·1	0·05	0·02	Dll.
Verhältniss der Aussschläge:	1·76	1.59	1	1·54	0·27	0·11	

Erst bei äusserst geringen elektromotorischen Kräften, unter etwa 0·2 Daniell, ist das Ohm'sche Gesetz für Salzdämpfe in der Bunsenflamme giltig.

2. Abhängigkeit des Leitungsvermögens von dem Salzgehalte. Von den untersuchten Salzen wurden Normallösungen bereitet und aus diesen durch Verdünnung Lösungen, welche im Liter $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{64}$ und $^1/_{256}$ Grammmolekel hielten. Wenn man nun diese verschiedenen Lösungen eines Salzes in den Spray nacheinander hineinbringt, so wird offenbar der Salzgehalt der Flamme in dem Verhältniss $1 : {}^1/_4 : {}^1/_{16}$ etc. abnehmen. das Leitungsvermögen der Flamme ändert sich gleichzeitig, aber nicht proportional dem Salzgehalte, sondern sehr nahe proportional der Quadratwurzel aus demselben, das heisst im Verhältnisse $1 : {}^1/_2 : {}^1/_4 : {}^1/_8 : {}^1/_{16}$. Als elektromotorische Kraft ist bei diesen Bestimmungen 0·2 Daniell verwendet worden, weil nach dem Vorigen das Ohm'sche Gesetz für diese elektromotorische Kraft noch annähernd giltig ist. Als Beispiele führe ich die Leitungsvermögen von Kalium und Natriumnitrat an.

Gehalt		1	$^1/_4$	$^1/_{16}$	$^1/_{64}$	$^1/_{256}$
Leitungsvermögen	KNO_3	221	114	58	28·5	11·4
	$NONa_3$	30·5	15·6	7·4	4·0	2·2

Wie man aus den zwei letzten Zeilen ersieht, nehmen die Leitungsvermögen der KNO_3- und $NaNO_3$-haltigen Flammen sehr

nahe im Verhältniss $1 : {}^1/_2 : {}^1/_4 : {}^1/_8 : {}^1/_{16}$ ab. Es ist daher die Leitfähigkeit (für die eigene Leitfähigkeit der nicht salzhaltigen Flamme corrigirt) einer salzhaltigen Flamme der Quadratwurzel aus dem Salzgehalt proportional. Auch für die anderen untersuchten Alkalisalze, nämlich KCl, KJ, KBr, KOH, K_2SO_4, Na_2SO_4, $NaCH_3$ COO, NaBr, NaCl, NaOH, $Na\,H\,C_4\,H_4\,O_6$, LiCl, $Li\,CH_3$ COO, RbCl, Cs Cl und $Tl\,HSO_4$ ist diese Regelmässigkeit mit grosser Annäherung erfüllt. Bei äusserster Verdünnung findet eine merkbare Abweichung davon statt, indem die Leitfähigkeit etwas schneller als proportional der Quadratwurzel zunimmt. Auch bei den höchsten Concentrationen finden bisweilen kleine Abweichungen (besonders deutlich bei Na Ba) statt.

3. Verhältniss der Leitfähigkeiten von Salzen desselben Metalls. Wenn man die Leitungsvermögen der verschiedenen K-Salze untereinander und diejenige der Na-Salze untereinander vergleicht, so findet man, dass alle die ersten von derselben Grössenordnung sind und bedeutend (etwa 9 mal) grösser als die letzten, welche wiederum untereinander von derselben Grössenordnung sind. Bei grösseren Verdünnungen tritt dies noch deutlicher hervor, so dass man sogar behaupten kann, dass alle K-Salze dann in der Flamme gleich gut leiten (wenn sie gleich concentrirt sind). Ähnliches gilt für die Na-Salze und für die Li-Salze. Als Beispiele mögen die Leitfähigkeiten von einigen K-Salzen in ${}^1/_{256}$-normaler Lösung und von einigen Na-Salzen in ${}^1/_{64}$-normaler Lösung dienen.

Salz	KCl	KJ	KBr	KOH	K_2SO_4	KNO_3	Mittel
Leitfähigkeit	12·0	11·8	12·5	11·8	12·0	11·4	11·9

Salz	$NaNO_3$	Na_2SO_4	$NaCH_3CO_2$	NaBr	NaCl	NaOH	$NaHC_4H_4O_6$	Mittel
Leitfähigkeit	4·0	3·3	3·4	4·0	4·1	4·0	4·2	3·76.

Ebenso leiten die beiden untersuchten Li-Salze beinahe gleich gut.

4. Zusammenhang zwischen dem Atomgewicht eines Alkalimetalles und der Leitfähigkeit seiner Salze. Wenn man die Salze (zum Beispiel Chloride) verschiedener Alkalimetalle untersucht, so findet man, dass (für gleiche Concentrationen) das Salz um so besser leitet, je höher das Atomgewicht des Metalles ist, so dass die Li-Salze am

wenigsten gut, die Cs-Salze am besten leiten. Als Beispiel mögen die Leitfähigkeiten der $^1/_{16}$-normalen Chloridlösungen dienen.

Salz	LiCl	NaCl	KCl	RbCl	CsCl
Leitfähigkeit	2·2	8·1	66	81	117

Die Atomgewichte von Li, Na, K, Rb, und Cs sind resp. 7, 23, 39, 85·3 und 132·6. Dagegen schliesst sich Thallium an diese Reihe nicht an, indem die Leitfähigkeit für $^1/_{16}$ normales $TlHSO_4$ nur 4·0 beträgt, also weit unterhalb derjenigen des CsCl liegt, obgleich Tl ein höheres Atomgewicht (204) hat als Cs (132·6). Bekanntlich verhält sich Tl in chemischer Hinsicht nicht wie die anderen Alkalimetalle, sondern bildet ein Übergangsglied zu den anderen (schwereren) Metallen. Ebenso, aber in noch höherem Grade, ist das Verhalten von Silber und Blei, welche sich an diese Gruppe der Metalle anschliessen. Die Leitfähigkeiten von Normallösungen von $AgNO_3$ und $^1/_2$ $Pb(NO_3)_2$ sind (für 0·2 Dll) etwa 1·6 und 2·0, jedenfalls so gross, dass sie mit Sicherheit constatirt werden können.

5. Verhalten der Salze der schweren Metalle. Wenn ein Salz eines schweren Metalles in die Flamme gebracht wird, so ändert sich die Leitungsfähigkeit der Flamme so wenig, dass man nicht eine Leitfähigkeit des Salzes constatiren kann. Die geringe Zunahme der Leitfähigkeit, welche in einigen Fällen beobachtet wird, kann sehr wohl von Spuren von Alkalisalzen oder von in der Flamme aus den Salzen ausgeschiedenen festen Staubtheilen herrühren (vergl. unten). Die Dämpfe dieser Salze in der Bunsenflamme sind also (innerhalb der Beobachtungsfehler als Nichtleiter zu betrachten. Von diesen Metallen wurden die Salze der folgenden untersucht:

Magnesium (Chlorid und Sulfat), Zink (Chlorid und Sulfat), Cadmium (Chlorid), Kupfer (Chlorid und Sulfat), Eisen (Doppelsulfat mit Ammonium), Nickel (Sulfat), Kobalt (Chlorür.) Aluminium (Nitral), Chrom (Chorid), Mangan (Chlorür.) und Zink (Chlorid).

Kein merkbares Leitungsvermögen haben ausserdem die Ammonsalze (untersucht Chlorammonium) und die Säuren, von welchen Chlor- und Bromwasserstoff, Schwefelsäure und Essigsäure untersucht wurden. Die Ammonsalze zerfallen offenbar in

der Flamme in Ammoniak und Säure und der erste dieser Körper wird ohne Zweifel in seine Bestandtheile weiter zerlegt, welche ebenso wenig wie die Säure ein Leitungsvermögen besitzen.

6. Verhalten der Salze der alkalischen Erdmetalle. Wenn ein Salz eines alkalischen Erdmetalles (Calcium, Baryum und Strontium) in die Flamme gebracht wird, so ändert sich die Leitungsfähigkeit der Flamme sehr bedeutend mit der Zeit und nähert sich einem Grenzwerth. Dieser Grenzwerth wird um so eher erreicht, je grösser die Concentration der angewandten Salzlösung ist und je grösser das Atomgewicht des Metalles ist, das am schnellsten für Ba-Salze am langsamsten für Ca-Salze, Diese Zunahme der Leitfähigkeit rührt ohne Zweifel davon her, dass auf den Plattinplatten in der Flamme kleine feste Partikelchen sich absetzen, welche die Leitung durch Convection besorgen. Man konnte nach einem Versuch mit diesen Salzen sehr deutlich einen schwachen weissen Anflug an den Metallplatten brauchen.

Wenn die Platinplatten mit Chlorwasserstoff gewaschen wurden, konnte dieser Anflug entfernt werden, was dadurch bemerkt wurde, dass die Leitfähigkeit der Flamme nach dem Waschen auf ihren Werth, welchen sie ohne Salzgehalt besass, zurückging. Wenn dagegen keine Waschung vorgenommen wurde, so blieb die Leitfähigkeit der Flamme sehr bedeutend, obgleich alle Salzzufuhr abgesperrt wurde und nahm erst sehr langsam ab (bei Ba-Salzen äusserst langsam). Bei dem Waschen der Platten bemerkte man, nachdem Ba- oder Sr-Salze in der Flamme gewesen waren, einen sehr deutlichen Geruch nach Schwefelwasserstoff. Der abgesetzte feste Körper ist also ein Sulfid, wahrscheinlich ein Oxysulfid, und vielleicht mit Carbonat gemischt. Die Flamme enthält reichlich die zur Bildung dieser Körper nöthigen Bestandtheile, H_2S, H_2O und CO_2. In ähnlicher Weise verhalten sich die Magnesiumsalze, bei welchen der Grenzwerth sehr langsam erreicht wird. Man kann also constatiren, dass dieselben anfangs nicht leiten, um allmälig einen sehr merkbaren Betrag (22·5 Salztheile bei 0·2 Dcl.) zu erreichen. Die Leitfähigkeit dieser festen Partikelchen in der Flamme unterscheidet sich von demjenigen der Dämpfe sehr scharf dadurch, dass sie dem Ohm'schen Gesetze

ziemlich nahe folgt, wie folgendes Beispiel ($Mg\ Cl_2$) zeigen mag.

Elektromotorische Kraft	0·1	0·2	0·5	1·0 Dll.
Ausschlag	11·5	22·5	61	111 Scalentheile.

Bei den Ca-Salzen, wo der Endwerth ziemlich langsam erreicht wird, kann man sich überzeugen, dass der anfängliche Ausschlag zum grössten Theil von der Leitung der Salzdämpfe herrührt, indem die Ausschläge für 0·2 Dll. und 1 Dll. sich etwa wie 0·5 : 1 verhalten, wie bei den Alkalimetallen. Die Ca-Salze und vermuthlich auch die Sr- und Br-Salze leiten also wirklich auch durch ihre Dämpfe.

7. Elektromotorische Kraft zwischen Metallen in der Flamme. Bringt man in der Flamme ein anderes Metall als Platin (wegen der Feuerbeständigkeit konnten nur Eisen und Nickel verwendet werden) neben einer Platinplatte an, so entsteht eine elektromotorische Kraft zwischen diesen Platten, welche einen Strom in der Flamme von dem anderen (positiveren) Metall zum Platin zu treiben sucht. Diese elektromotorische Kraft war für verschiedene Salzflammen annähernd gleich gross und betrug für Ni|Pt etwa 0·4 Volt für Fe|Pt etwa 0·6 Volt.

Sehr genaue Messungen konnten nicht ausgeführt werden, da verschiedene Theile der Flamme etwas verschieden elektromotorisch erregen. So zum Beispiel erhält man zwischen zwei Platinplatten auch eine elektromotorische Kraft, welche jedoch, wenn die Platten auf derselben Höhe standen und wirklich von den leuchtenden Flammengasen umspült wurden (also auch nicht in den Flammenkern hineinragten), nur etwa den Werth von 0·1 Volt erreichte und bei symmetrischer Stellung der Platten noch kleiner war. Es ist also durch diese Versuche unzweifelhaft festgestellt, dass zwischen zwei verschiedenen Metallen in einer Salzdämpfe enthaltenden Flamme eine Potentialdifferenz herrscht, welche von demselben Zeichen und Grössenordnung ist, wie diejenige zwischen zwei in einen Elektrolyten eingesenkten Metallen.

8. Schluss. Das Leitungsvermögen der von Salzen herrührenden Dämpfe in der Bunsenflamme verhält sich sehr nahe ähnlich demjenigen eines schwach dissociirten Elektrolyten (wie zum Beispiel Essigsäure), indem es annähernd proportional der

Quadratwurzel aus dem Gehalte zunimmt. Bei grossen Verdünnungen kommen auch ähnliche Abweichungen von dieser Regelmässigkeit bei diesen Körperclassen vor, indem dann die Leitfähigkeit etwas schneller als proportional der Quadratwurzel aus dem Gehalte wächst. Weiter ist die Potentialdifferenz zwischen zwei in Salzdämpfe eingesenkten Metallen von demselben Zeichen und Grössenordnung wie die Potentialdifferenz zwischen diesen Metallen in einem Elektrolyten. Diese beiden Umstände können kaum anders gedeutet werden, als durch die Annahme, dass die Salzdämpfe elektrolytisch den Strom leiten. Eine Verschiedenheit zwischen den Salzdämpfen und flüssigen Elektrolyten scheint darin zu bestehen, dass in den ersten keine Polarisation durch den Durchgang des Stromes verursacht wird, da ja für dieselben das Ohm'sche Gesetz bei kleinen elektromotorischen Kräften (unter 0·2 Dcl.) giltig ist, was bei den flüssigen Elektrolyten nicht im Allgemeinen zutrifft. Diese Verschiedenheit ist jedoch nur scheinbar, indem die Versuche von Clark[1] und von Poincaré[2] zeigen, dass bei hohen Temperaturen auch bei flüssigen Elekrolyten keine Polarisation entsteht. Dagegen scheint für die Salzdämpfe der Umstand eigenthümlich zu sein, dass das Ohm'sche Gesetz bei grösseren elektromotorischen Kräften nicht erfüllt ist, was bei den bisher untersuchten flüssigen Elektrolyten immer zutrifft.

---

[1] Clark Phil. Mag. (5) 20 p. 37 (1885).

[2] Lucien Poincaré: Comptes Rendus. T. 110 p. 950 (1890).

Zur Chemie des Accumulators

von

Mathias Cantor.

Aus dem physikalisch-chemischen Laboratorium der k. k. Universität in Wien.

(Mit 2 Textfiguren.)

§. 1. Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit verdanke ich Herrn Dr. James Moser, welcher mich aufforderte, die im Accumulator stattfindenden chemischen Processe zu studiren. Die bisherigen Untersuchungen haben in der That zu einem Abschlusse nicht geführt; vielmehr gelangen diese Arbeiten zu ganz verschiedenen Ergebnissen. Es soll hier nur beispielsweise auf die Frage nach der Occlusion des Wasserstoffes hingewiesen werden. Gladstone und Tribe[1] haben die stark reducirende Eigenschaft des von Metallen aufgenommenen Wasserstoffes benützen wollen, um diesen nachzuweisen. Ihre Versuche ergaben ein negatives Resultat, und sie schliessen, dass, wenn Wasserstoff vom Blei überhaupt aufgenommen wird, dies in unmessbar kleinen Mengen geschieht.

Zu demselben Ergebnisse führte ein Versuch, welchen Frankland[2] zur Entscheidung dieser Frage unternommen hat. Er reducirte Mennige elektrolytisch und untersuchte den gebildeten Bleischwamm auf seinen Wasserstoffgehalt. Auch er konnte keine messbare Menge Wasserstoff nachweisen.

---

[1] Gladstone und Tribe, Die chemische Theorie der Secundärbatterien, S. 54.

[2] Frankland, Proceedings of the Royal Society, 35, pag. 67.

Dagegen folgert F. Streintz[1] aus dem Verhalten des geladenen Elementes, dass eine beträchtliche Menge Wasserstoff vom Blei aufgenommen wird und dass dieser Vorgang von wesentlicher Bedeutung sei. Da die von Streintz gemachte Beobachtung später noch ausführlich erörtert werden wird, so soll hier nur darauf verwiesen werden.

Auch M. S. Drzewiecki[2] nimmt an, dass die negative Platte des Secundärelementes nicht ausschliesslich aus metallischem Blei zusammengesetzt ist. Er schliesst dies aus folgenden Beobachtungen: Frisch polirtes Blei zeigt, in die Flüssigkeit des Accumulators getaucht, gegen die negative Platte desselben eine Potentialdifferenz von 0·2 Volt. Ferner mit der positiven Platte eine solche von 1·7 Volt. Dagegen gibt Drzewiecki die Potentialdifferenz der positiven und negativen Platte des Accumulators mit 2·15 Volt an. Aus diesen Beobachtungen kann nun allerdings geschlossen werden, dass blankes Blei in seinem elektrischen Verhalten verschieden ist von dem an der negativen Platte gebildeten Bleischwamme; allein für die weitere Annahme, dass dieser Bleischwamm Wasserstoff aufnimmt, sei es unter Bildung eines Bleiwasserstoffes, dem Drzewiecki die Formel Pb_2H_2 zuschreibt, oder durch Occlusion, wird keinerlei Beweis erbracht. Drzewiecki selbst betont die Nothwendigkeit, diese Frage durch directe Analyse zu entscheiden.

Von P. Schoop[3] wird gleichfalls die Bildung einer Verbindung von Blei und Wasserstoff angenommen und diese hypothetische Verbindung ohne weitere Begründung als der wahre active Bestandtheil angesehen.

Es schien, als könne eine quantitative Untersuchung der einzelnen chemischen Processe, welche die Ladung und Entladung eines Accumulators begleiten, einiges zur Aufklärung dieser Vorgänge beitragen. In dieser Absicht wurde die vorliegende Arbeit unternommen.

§. 2. Ladung und Entladung eines Secundärelementes sind mit einer chemischen Veränderung der Elektroden, des Elektrolyten und einer Gasentwicklung verbunden. Zur Beurtheilung

---

[1] F. Streintz, Wied. Ann., XXXVIII, S. 344.

[2] Drzewiecki, La lumière électrique, XXXV, Nr. 6, pag. 290.

[3] P. Schoop, Electrical Review, XXVI, Nr. 646, pag. 394.

des chemischen Vorganges ist es erforderlich, die Producte desselben, hier also die Gase und die Änderung in der Zusammensetzung des Elektrolyten und der Elektroden zu ermitteln. Was die Gase anbelangt, so sind diese Wasserstoff und Sauerstoff, und genügt es zu ihrer Bestimmung, dieselben gesondert aufzufangen und deren Volumen zu messen. Ebensowenig bietet die Bestimmung des Elektrolyten eine Schwierigkeit. Dagegen ist eine directe Analyse der Elektroden nicht wohl ausführbar, da diese eine Zerstörung der Platte bedingt. Da aber die chemische Veränderung, welche die Elektrode in Folge der Ladung erfährt, verursacht wird durch einen chemischen Process, der zwischen ihr und dem Elektrolyten stattfindet, so kann indirect aus den Veränderungen des Elektrolyten bestimmt werden, wenn ausser dem einen Processe keine anderen Vorgänge die Zusammensetzung des Elektrolyten verändern, beziehungsweise, wenn die Veränderungen, die ein etwa sonst stattfindender Vorgang hervorbringt, genau bekannt sind. Dies geschieht, wenn die Ladung jeder Platte des Secundärelementes für sich gesondert vorgenommen und als zweiter Pol eine Elektrode verwendet wird, die keine merkliche chemische Veränderung erfährt. In einer derart gebildeten Zelle wird die Zusammensetzung des Elektrolyten bloss durch den zwischen ihm und der einen Elektrode stattfindenden Austausch und durch die Gasentwicklung verändert. Letztere kann leicht beobachtet werden; wird also noch die Zusammensetzung des Elektrolyten ermittelt, so ergibt sich aus diesen beiden Daten die Veränderung, welche die Elektrode erfährt. Damit auch kleinere Veränderungen der Elektrode noch eine deutlich nachweisbare Veränderung des Elektrolyten hervorbringen, ist es nothwendig, die Menge des letzteren entsprechend klein zu nehmen.

§. 3. Diesen Bedingungen zu genügen, wurde der in Fig. 1 abgebildete Apparat benützt. Derselbe besteht aus zwei Glasröhren, welche durch ein drittes kurzes Rohr mit einander communiciren. Die beiden Röhren haben eine Länge von 10 *cm*, der Durchmesser der einen beträgt 1·5, der zweiten 0·5 *cm*. Unten sind die Röhren durch eingeschliffene Glasstopfen verschliessbar, in welche Platindrähte eingeschmolzen sind, die in das Innere der Röhre führen. An dem Drahte, welcher in die engere Röhre

führt, ist ein Platinblech befestigt. Dieses bildet einen Halbcylinder, der sich an die Röhrenwand anlegt, so dass von oben her eine Pipette in die Röhre bis an den Boden eingeführt werden kann. An den Draht in der weiteren Röhre wird ein Stück der zu untersuchenden Platte angelöthet. Draht und Löthestelle werden sorgfältig isolirt. Das obere Ende der engen Röhre ist mit einem Gasentbindungsrohre versehen. Um ein Überspritzen zu vermeiden, ist letzteres an die Kugel eines Ludwig'schen Aufsatzes angeschmolzen, der, mit einem Halse versehen, in die engere Röhre des Apparates eingeschliffen ist. In ähnlicher Weise ist die weitere Röhre abgeschlossen, nur ist der Aufsatz an diese angeschmolzen. Ein um die Röhre geschlungener Platindraht dient dazu, den Apparat an die Waage zu hängen. Mittelst einer dünnen Pipette, welche in die engere Röhre eingesenkt wird, kann der Apparat gefüllt werden. In derselben Weise können auch Proben des Elektrolyten herausgenommen werden. Im Folgenden sollen einige auf die Ladung bezügliche Versuche beschrieben werden. Dieselben wurden mit dem Secundärelemente E. P. S. angestellt. Aus den Platten desselben wurden zwei Stücke mit je zweimal vier Maschen und eines mit dreimal vier Maschen ausgeschnitten und passend vereinigt als Elektrode in die weitere Röhre eingeführt. Als Elektrolyt diente eine circa 28%-ige Schwefelsäure.

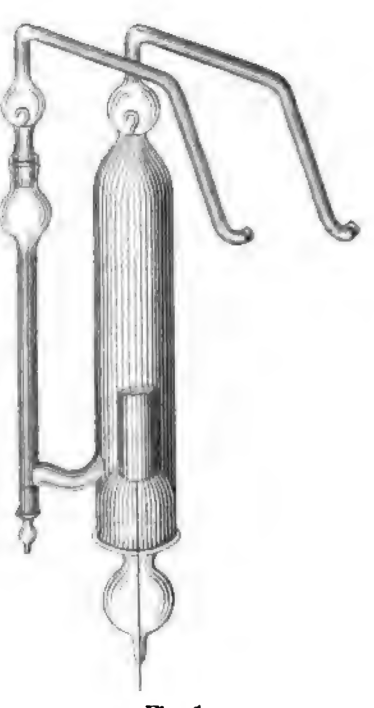


Fig. 1.

§. 4. Bei der Ausführung der Versuche wurde folgender Gang eingehalten: Nachdem die zu untersuchende Elektrode befestigt war, wurde der Apparat mittelst Durchsaugen von Luft, die durch concentrirte Schwefelsäure und über Chlorcalcium ging, bis zur Gewichtsconstanz getrocknet. Dann wurden circa 3 *g* der als

Elektrolyt dienenden Schwefelsäure eingefüllt. Der Apparat wurde hierauf an einem Stativ so befestigt, dass die Gasentbindungsröhren unter Schwefelsäure tauchten, welche dieselbe Zusammensetzung hatte, wie die als Elektrolyt verwendete. Dies war nothwendig, um eine Veränderung des Elektrolyten durch Verdunsten zu vermeiden. Über die Gasentbindungsröhren wurden cubicirte, gleichfalls mit Schwefelsäure gefüllte Röhren gestülpt zur gesonderten Auffangung und Messung der abströmenden Gase. Mittelst der eingeschmolzenen Drähte wurde dann der Apparat in einen Stromkreis geschaltet, welcher aus Batterie, Widerstandskasten, Galvanometer und einem Hofmann'schen Voltameter gebildet war, so dass die zu untersuchende Platte denselben Pol bildete wie bei der Ladung. Die Batterie bestand aus acht Meidinger-Elementen; mittelst des Widerstandskastens konnte die Stromstärke, welche das Galvanometer anzeigte, constant erhalten werden. Das Voltameter war mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt und zeigte die Menge der in verschiedenen Phasen elektrolytisch abgeschiedenen Gase an. Wurde der Strom geschlossen, so begann die Ladung der zu untersuchenden Platte und wurde solange fortgesetzt, bis an der Platte die gleiche Menge Gas sich entwickelte, wie an der entsprechenden Elektrode des Voltameters. Die Concentration der Schwefelsäure wurde durch Titriren einer gewogenen Probe bestimmt. Als Titerflüssigkeit wurde eine beiläufig $^1/_{15}$ Kalilauge verwendet, als Indicator Phenolphtaleïn. Die Lösung wurde von Zeit zu Zeit mit Salzsäure von bekanntem Gehalte verglichen und erwies sich während der Dauer der Versuche unverändert.

Ladung der negativen Platte.

§. 5. Bei der getroffenen Anordnung findet die die Ladung bewirkende Elektrolyse zwischen Platin als Anode und der negativen Platte des Secundärelementes als Kathode statt. Letztere besteht aus einem Bleigitter, in dessen Maschen eine Füllmasse eingepresst ist. Nach Angabe der Fabrik und der damit übereinstimmenden Analyse besteht diese Füllung aus Bleioxyd und Bleisulfat. Man hat sonach als Bestandtheile, welche möglicherweise in den chemischen Process treten können: Pb, PbO, $PbSO_4$. Zur Feststellung der chemischen Veränderungen bedarf es nach

den früheren Auseinandersetzungen bloss der Messung der Volumina der entweichenden Gase und der Ermittlung der Zusammensetzung des Elektrolyten. Letztere konnte einmal hinsichtlich der Concentration, dann durch die Bildung von Oxydationsproducten, wie Wasserstoffsuperoxyd und Überschwefelsäure, oder Reductionsproducten, wie schweflige Säure, verändert werden. Bei den angewandten geringen Stromdichten war zwar nach den Untersuchungen von Geuther[1] und Richarz[2] das Auftreten solcher Producte nicht wahrscheinlich. Indessen wurde doch der Elektrolyt mit $KMnO_4$ und KJ geprüft. Da mit $KMnO_4$ keine Reaction beobachtet werden konnte, so war die Abwesenheit von Reductionsproducten und Wasserstoffsuperoxyd nachgewiesen. Mit KJ zeigte sich zwar eine durch Stärke erkennbare Jodausscheidung, allein die Titration mit $Na_2S_2O_3$ ergab diese so unbedeutend, dass davon ganz abgesehen werden konnte. Die Veränderung, welche der Elektrolyt erfährt, beschränkt sich somit auf die von H. Aron[3] und Frankland[4] beobachtete Concentrationsänderung. Die Zusammensetzung des Elektrolyten nach der Ladung konnte daher auf folgende Weise ermittelt werden: In einer Probe von circa 0·4 *g* wurde zuerst die procentische Zusammensetzung bestimmt. Dann wurde der Apparat entleert und die Gesammtmenge der im Elektrolyten enthaltenen SO_3 bestimmt, woraus sich dann auch die darin befindliche Menge H_2O ergab. Damit die untersuchte Probe die mittlere Concentration besass, wurde zuerst der ganze Inhalt der Zelle in die Pipette gesaugt, zurückfliessen gelassen und dann erst die Probe herausgenommen.

§. 6. In der beschriebenen Weise wurden die Versuche I und II ausgeführt. Bei dem weiteren Versuche III wurde im Wesen derselbe Vorgang eingehalten, nur wurden, um einen Einblick in den Verlauf des Processes zu gewinnen, auch die Zwischenstufen beobachtet; diese sollen später besprochen werden. In die folgende Übersicht sind nur die auf das Totalergebniss bezüglichen Zahlen aufgenommen.

[1] Geuther, J. B. 1859, S. 82.
[2] Richarz, Wied. Ann., XXIV, S. 183.
[3] H. Aron, Elektrotechnische Zeitschrift, 4, 1883, S. 101.
[4] Frankland, Proceedings of the Royal Society, 35, pag. 67.

			I.	II.	III.
Dimensionen der Kathode			19×12×3 *mm* 20× 9×3 *mm* 19× 8×3 *mm*	19×12×3 *mm* 19× 9×3 *mm* 18× 8×3 *mm*	19×12×3 *mm* 18× 9×3 *mm* 17× 9×3 *mm*
Gewicht der Kathode			12·1586 *g*	11·3734 *g*	11·3354 *g*
Stromstärke			12 Milli-Amp.	6 Milli-Amp.	12 Milli-Amp.
Gewicht der eingefüllten Schwefelsäure			3·5681 *g*	3·7734 *g*	3·3950 *g*
Zusammensetzung des Elektrolyten	vor der Ladung	H_2O	2·7338 *g*	2·8908 *g*	2·6047 *g*
		SO_3	0·8343 *g*	0·8826 *g*	0·7903 *g*
	nach der Ladung	H_2O	2·6791 *g*	2·8237 *g*	2·5329 *g*
		SO_3	1·0949 *g*	0·8895 *g*	0·9202 *g*
Volum des gasförmig entweichenden H bei 0° und 760 *mm*			73·1 *cm*³	78·5 *cm*³	90·9 *cm*³

Aus diesen Zahlen können einige Schlüsse auf den während der Ladung stattfindenden Process gezogen werden.

§. 7. Wasserstoff ist vor der Ladung nur als Wasser im Elektrolyten enthalten. Nach der Ladung ist derselbe theils gasförmig, theils als Wasser im Elektrolyten vorhanden, ferner kann ein Theil des Wasserstoffes durch den Ladungsvorgang in irgend welcher Form an die Kathode gebunden werden. Da die Gesammtmenge des Wasserstoffes vor und nach der Ladung unverändert sein muss, so wird der an die Kathode gebundene Wasserstoff als Differenz zwischen der anfangs vorhandenen Menge und der nach der Ladung im Elektrolyt und gasförmig vorhandenen Menge bestimmt werden können.

Die gefundenen Zahlen geben nun:

			I.	II.	III.
H-Gehalt	Vor der Ladung	als H_2O	$\frac{2 \cdot 7338}{9} = 0 \cdot 3038\,g$	$\frac{2 \cdot 8908}{9} = 0 \cdot 3212\,g$	$\frac{2 \cdot 6047}{9} = 0 \cdot 2894\,g$
	Nach der Ladung	als H_2O	$\frac{2 \cdot 6791}{9} = 0 \cdot 2977\,g$	$\frac{2 \cdot 8237}{9} = 0 \cdot 3137\,g$	$\frac{2 \cdot 5329}{9} = 0 \cdot 2814\,g$
		als Gas	$73 \cdot 1 \times 0 \cdot 0896\,mg = 0 \cdot 0065\,g$	$78 \cdot 5 \times 0 \cdot 0896\,mg = 0 \cdot 0070\,g$	$90 \cdot 9 \times 0 \cdot 0896\,mg = 0 \cdot 0081\,g$
			$0 \cdot 3042\,g$	$0 \cdot 3207\,g$	$0 \cdot 2895\,g$
Differenz			$-0 \cdot 0004\,g$	$+0 \cdot 0005\,g$	$-0 \cdot 0001\,g$

Die unter „Differenz" angegebenen Zahlen entsprechen dem Gewichte des von der Platte aufgenommenen Wasserstoffes. Ohne in eine weitläufige Fehlerrechnung einzugehen, können diese Differenzen ihrer Kleinheit und ihres wechselnden Vorzeichens wegen als von Beobachtungsfehlern herrührend vernachlässigt werden. Nur zur beiläufigen Beurtheilung der Genauigkeit der hier angewandten Bestimmung sei Folgendes bemerkt. Die Zusammensetzung des Elektrolyten wurde vor und nach der Ladung bestimmt durch Titriren einer Probe, die $^1/_8$ bis $^1/_{10}$ des Gewichtes des Elektrolyten besass. Der Fehler einer solchen Bestimmung kann mit $0 \cdot 1\,cm^3$ Kalilauge angenommen werden oder auf die ganze Menge mit $0 \cdot 8$ bis $1\,cm^3$.

Der grösste Fehler bei beiden Bestimmungen zusammen wäre 1·6 bis 2 *cm*³ Kalilauge. Da nun 1 *cm*³ Kalilauge gleich ist 2·646 *mg* SO_3, so gäbe dies einen Fehler von circa 5 *mg* SO_3, respective H_2O, da letzteres als Differenz bestimmt wird. Dieser Fehler entspricht 0·5 bis 0·6 *mg* oder circa 6 *cm*³ Wasserstoff. Eine nur einigermassen beträchtliche Aufnahme von Wasserstoff durch die Platte könnte daher durch den Fehler in der Beobachtung nicht verdeckt werden. Die thatsächlichen, beobachteten Differenzen liegen sämmtlich unter der Grenze und erscheint deren Vernachlässigung daher wohl gerechtfertigt.

Die gefundenen Zahlen führen daher zu dem Schlusse, dass der Ladungsvorgang eine Aufnahme von Wasserstoff durch die Platte nicht bewirkt. Die Aufnahme von Wasserstoff konnte in zweifacher Weise erfolgen, als Wasser durch Hydratisirung, beziehungsweise Bildung von sauren Salzen, dann als Wasserstoff durch Occlusion oder Bildung eines Bleiwasserstoffes. Die Versuche zeigen also, dass keiner dieser Processe stattfindet, dass insbesondere Wasserstoff nicht occludirt wird.

§. 8. Der Wasserstoff ist also nach der Ladung nur gasförmig oder als Wasser im Elektrolyten vorhanden. Ein Vergleich mit dem während der Ladung im Voltameter entwickelten Wasserstoffe zeigt, dass nur ein Theil des elektrolytischen Äquivalentes gasförmig entweicht. Der Rest muss sonach zur Regeneration von Wasser auf Kosten des Sauerstoffes der Platte, also zur Reduction der Platte verbraucht worden sein. Die Menge des zur Reduction verbrauchten Wasserstoffes ist in der folgenden Tabelle unter der Bezeichnung „wirksamer Wasserstoff“ verzeichnet. Diese Bezeichnung soll nicht etwa irgend eine active Modification von Wasserstoff andeuten, sondern bloss der Vereinfachung wegen gebraucht werden. Der Reductionsprocess kann sowohl das Bleioxyd als solches oder das an Schwefelsäure gebundene betreffen, d. h. nach den zwei folgenden Gleichungen vor sich gehen:

$$PbO + H_2 = H_2O + Pb \qquad 1)$$

$$PbSO_4 + H_2 = H_2SO_4 + Pb. \qquad 2)$$

Wegen der später zu besprechenden Localaction kann nicht entschieden werden, ob der erste dieser Processe thatsächlich stattfindet; dagegen folgt unzweifelhaft aus dem in der folgenden

Tabelle ersichtlichen Zuwachse von SO_3, welcher nur durch den zweiten Process bewirkt werden kann, dass bei der Ladung eine Reduction von Bleisulfat stattfindet. Näheres über diese Reduction gibt die Beobachtung des zeitlichen Verlaufes der Ladung (§. 13).

	I.	II.	III.
H im Voltameter = Elektrolytisches Äquivalent....	289·7 cm^3	208·7 cm^3	262·0 cm^3
Entweichender H	73·1 cm^3	78·5 cm^3	90·9 cm^3
Wirksamer H	216·6 cm^3	130·2 cm^3	171·1 cm^3
Zuwachs an SO_3...........	0·2606 g	0·0069 g	0·1299 g
Wirksamer H in Percenten des elektrolytischen Äquivalentes	74·8%	62·5%	65·3%

§. 9. Für die praktische Verwendung des Accumulators dürfte das in der letzten Zeile der Tabelle angegebene Verhältniss des wirksamen zum elektrolytisch entwickelten Wasserstoffe von Belang sein, indem dasselbe voraussichtlich mit der Capacität der Platte in engem Zusammenhange steht. Dieses Verhältniss wird in erster Linie von der Beschaffenheit der Platte, dann von der Stromstärke und der Ladungszeit abhängen. Die Untersuchung dieser Abhängigkeit ist in der vorliegenden Arbeit nicht beabsichtigt worden; weitere Versuche, bei welchen die Zusammensetzung der Platte variirt werden soll, werden hierüber vielleicht einigen Aufschluss geben. Nur das eine kann schon aus den bisher gemachten Erfahrungen geschlossen werden, dass dieses Verhältniss nicht, wie die Versuche von Gladstone und Tribe vermuthen lassen, mit abnehmender Stromstärke beständig wächst, sondern dass für jede Platte es eine Stromdichte geben muss, bei welcher dieses Verhältniss ein Maximum hat.

§. 10. Das Ergebniss des §. 7, wonach keine merkliche Occlusion von Wasserstoff an der Kathode eines Secundärelementes stattfindet, steht im directen Widerspruche mit den Folgerungen, welche Streintz[1] aus der von ihm geführten Untersuchung über das Secundärelement zieht. Es erscheint daher nothwendig, etwas

[1] F. Streintz, Wied. Ann., XXXVIII, S. 344.

näher auf diese Arbeit, insoweit sie den chemischen Vorgang betrifft, einzugehen. In derselben wird auf die Gasentwicklung hingewiesen, welche an der Kathode eines geladenen Elementes stattfindet, wenn dieses ungeschlossen stehen bleibt. Der Versuch wurde mit den auch hier untersuchten Platten des Secundärelementes E. P. S. in einem Hofmann'schen Voltameter angestellt und eine Wasserstoffentwicklung beobachtet, welche mehr als das 57-fache des Volums der Elektrode ausmachte. Diese Wasserstoffentwicklung wird erklärt als Entweichen des während der Ladung von der Platte occludirten Wasserstoffes. Die zweite Eventualität, dass dieser Wasserstoff herrühre von einer Zersetzung des Wassers, beziehungsweise der verdünnten Schwefelsäure durch Blei, verwirft Streintz aus zwei Gründen:

1. Sei kein Anlass zu einer Localaction vorhanden,
2. könne keine sichtbare Veränderung der Elektrode beobachtet werden, die doch in Folge der Bildung von Bleisulfat eintreten müsste.

Dem gegenüber muss aber darauf hingewiesen werden, dass Blei ein Wasser zersetzendes Metall[1] ist. Wenn nun auch die Wasserzersetzung mit gewöhnlichem Blei nur bei höherer Temperatur erfolgt, so hat man in dem vorliegenden Falle die feine Vertheilung des frischreducirten Bleies zu berücksichtigen. Es bieten sich nämlich genügend Beispiele, welche zeigen, dass eine sehr feine Vertheilung von Agentien die Reactionsfähigkeit derselben überaus zu steigern und ähnliche Wirkungen wie eine Temperaturserhöhung zu veranlassen vermag.

Es soll hier nur das pyrophorische Eisen genannt werden. Dass die Elektrode keine sichtbare Veränderung erleidet, ist ebensowenig als Beweis gegen die Sulfatbildung anzusehen. Denn, wie Frankland[2] bemerkt, erscheint das im Secundärelemente gebildete Bleisulfat nicht weiss, sondern gefärbt. Überdies ist bei der porösen Beschaffenheit der Elektrode, beziehungsweise des durch die Ladung gebildeten Bleischwammes, die Sulfatbildung im Innern ermöglicht, so dass eine auffallende Veränderung der Oberfläche nicht eintreten muss. Eine Localaction

---

[1] J. Thomson, Thermochemische Untersuchungen, III, S. 335.

[2] Frankland, Proceedings of the Royal Society. 46, pag. 304.

zwischen dem fein vertheilten Blei und der verdünnten Schwefelsäure ist demnach keineswegs ausgeschlossen. Nach den Ergebnissen der Versuche I—III scheint aber die von Streintz beobachtete Wasserstoffentwicklung anders gar nicht erklärbar.

§. 11. Immerhin war es von Interesse, durch einen directen Versuch darzuthun, dass diese Wasserstoffentwicklung von einer Zersetzung der verdünnten Schwefelsäure durch das frisch reducirte Blei verursacht wird. Also durch den folgenden Process:

$$Pb + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2 .$$

Wenn dieses Schema den Vorgang richtig darstellt, so muss die Wasserstoffentwicklung verknüpft sein mit der Bindung einer äquivalenten Menge SO_3. Dieser Umstand wurde benützt, um die Erklärung der Wasserstoffentwicklung aus einer Localaction zu prüfen.



Fig. 2.

Es wurde die negative Platte eines Secundärelementes in der beschriebenen Weise geladen und nach der Ladung in einer Probe die Concentration des Elektrolyten bestimmt. Der an der geladenen Platte sich entwickelnde Wasserstoff wurde aufgefangen, und nachdem sich eine genügende Menge gebildet hatte, wieder die Concentration des Elektrotyen bestimmt. Dieser Vorgang wurde dreimal wiederholt. Am Schlusse wurde der Apparat entleert und die Gesammtmenge der SO_3 wie bei den früheren Versuchen ermittelt. Aus diesen Daten konnte dann die Menge der SO_3, welche in jeder der drei Perioden gebunden worden war, berechnet und mit der gleichzeitig entwickelten Wasserstoffmenge verglichen werden.

§. 12. Bei dem ersten Versuche dieser Art (IV) wurde ein Apparat benützt, der eine von dem in §. 3 beschriebenen etwas abweichende Einrichtung hatte (Fig. 2).

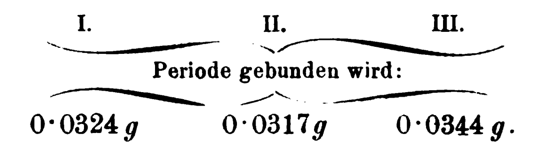
Er bestand aus zwei Glasröhren von 9 *cm* Länge; der Durchmesser der einen war 0·8 *cm*, der anderen 0·4 *cm*. Die weitere Röhre war wie bei dem ersten Apparate mit Gla stopfen und Aufsatz verschlossen. Die engere Röhre war abgebogen und unmittelbar über dem Glasstopfen an die weitere angeschmolzen, so dass ein h-förmiges Rohr mit ungleich weiten Schenkeln gebildet wurde. Oben erweiterte sich die engere Röhre zu einer Kugel, welche einen Hals zur Aufnahme eines eingeschliffenen Glasstopfens trug. In den Glasstopfen der weiteren Röhre war ein Platindraht eingeschmolzen, an welchen ein passendes Stück der negativen Platte angelöthet wurde. Die Ladung wurde in der Weise bewirkt, dass dieser Draht mit dem negativen Pol der Batterie verbunden, während der positive zu einem in die engere Röhre eingesenkten dicken Platindrahte geführt wurde. Nachdem die Ladung beendet war, wurde dieser Draht entfernt und mittelst des Glasstopfens die Röhre verschlossen, während das Gasentbindungsrohr der weiteren Röhre unter eine mit Schwefelsäure gefüllte cubicirte Röhre führte, wo der sich entwickelnde Wasserstoff aufgefangen wurde. Die folgenden Zahlen zeigen den Verlauf des Versuches:

Die „1. Probe“ ist unmittelbar nach Beendigung der Ladung genommen.

Unter „Rest“ ist die Zusammensetzung des Elektrolyten am Ende des Versuches angegeben.

	Gewicht	SO_3	H_2O
1. Probe	0·3852 *g*	0·0932 *g*	0·2920 *g*
2. „	0·1280 *g*	0·0283 *g*	0·0997 *g*
3. „	0·1397 *g*	0·0275 *g*	0·1122 *g*
Rest ..	0·8448 *g*	0·1387 *g*	0·7061 *g*

Daraus berechnet sich die Menge SO_3, welche in der


I. II. III.

Periode gebunden wird:

0·0324 *g* 0·0317 *g* 0·0344 *g*.

In der folgenden Zusammenstellung findet man nun das diesen Mengen äquivalente Wasserstoffvolumen (0°, 760 *mm*) unter „berechnet", während das direct beobachtete, reducirte Volumen unter „beobachtet" angegeben ist.

	H beobachtet	H berechnet
I. Periode....	9·9 cm^3	9·0 cm^3
II. „	9·2 cm^3	8·8 cm^3
III. „	9·4 cm^3	9·6 cm^3
Zusammen..	28·5 cm^3	27·4 cm^3

Ein zweiter Versuch (V) wurde in dem eingangs beschriebenen Apparate ausgeführt, welcher nebst den bequemeren Dimensionen den Vortheil bot, dass der Verlauf der Ladung zur Controle für die Verlässlichkeit des ganzen Versuches benützt werden konnte. Die Ladung wurde genau in der im §. 4 beschriebenen Weise vorgenommen.

Eingefüllt wurden: 2·9140 *g* Schwefelsäure,
welche die Zusammensetzung hatten: 0·6717 *g* SO_3, 2·2423 *g* H_2O.

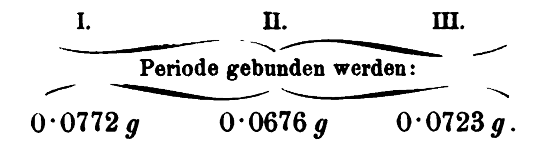
Während der Ladung entwichen

64·7 cm^3 H (0°, 760 *mm*).

Die Localaction nach der Ladung ist durch folgende Zahlen gekennzeichnet:

	Gewicht	SO_3	H_2O
1. Probe	0·1144 *g*	0·0855 *g*	0·0789 *g*
2. „	0·1260 *g*	0·0368 *g*	0·0892 *g*
3. „	0·1122 *g*	0·0308 *g*	0·0814 *g*
Rest.........	2·5394 *g*	0·6446 *g*	1·8948 *g*
Nach der Ladung	—	0·7477 *g*	2·1443 *g*

Daraus berechnen sich die Mengen SO_3, welche in der



I. II. III.

Periode gebunden werden:

0·0772 *g* 0·0676 *g* 0·0723 *g*.

Die äquivalenten Wasserstoffvolumina sind wieder unter „berechnet" angegeben.

	H beobachtet	H berechnet
I. Periode ...	23·3 cm^3	21·6 cm^3
II. „ ...	17·9 cm^3	18·9 cm^3
III. „ ...	20·2 cm^3	20·2 cm^3
Zusammen..	61·4 cm^3	60·7 cm^3

Der Vergleich der Wasserstoffmengen vor und nach dem Versuche gibt eine Controle für die Verlässlichkeit der ganzen Beobachtung. Vor dem Versuche ist Wasserstoff bloss als Wasser im Elektrolyten enthalten; man hat demnach als

H-Gehalt vor dem Versuche .... $\frac{2\cdot2423}{9} = 0\cdot2491\,g$

H-Gehalt nach dem Versuche als H_2O ... $\frac{2\cdot1443}{9} = 0\cdot2383\,g$

Gasförmig { während der Ladung entwichen. 64·7 cm^3
durch die Localaction gebildet.. 61·4 cm^3 }

126·1 cm^3 = 0·0113 *g*

0·2496 *g*

Die Differenz beträgt 0·5 *mg* oder etwa 5·6 cm^3, liegt sonach unter der Fehlergrenze.

Was die Übereinstimmung der beobachteten und berechneten Werthe betrifft, so ist bei beiden Versuchen der beobachtete Werth in der I. Periode grösser, als der in dieser Zeit gebundenen SO_3-Menge entspricht. Es mag dies, wenigstens zum Theile, davon herrühren, dass von der Ladung her zahlreiche Gasblasen an der

Elektrode sitzen, die sich später ablösen und das Volumen des Wasserstoffes vermehren. Übrigens ist bei Bestimmung der Concentration der Zwischenstufen der Fehler ein grösserer, weil die Proben kleiner genommen werden müssen. Immerhin ist die Übereinstimmung wohl genügend, um die Äquivalenz der Wasserstoffentwicklung mit der SO_3-Bindung darzuthun. Insbesondere weichen die Gesammtwerthe bloss um relativ kleine Beträge von einander ab. In Übereinstimmung mit §. 10 scheint sonach der Schluss gerechtfertigt, dass die Wasserstoffentwicklung, welche an der Kathode des geladenen, ungeschlossenen Accumulators stattfindet, von einer Zersetzung der Schwefelsäure durch Blei verursacht wird.

Diese Reaction dürfte einige Erscheinungen erklären, welche im Secundärelemente beobachtet worden sind. So trägt sie jedenfalls zu dem Verluste an Energie bei, welcher stattfindet, wenn geladene Elemente längere Zeit ungeschlossen bleiben. Ebenso wird sie bei der Rückstandsbildung von Bedeutung sein.

§. 13. Nachdem sichergestellt war, dass der Wasserstoff, welcher nicht gasförmig entweicht, zu Wasser regenerirt wird, dass also der Elektrolyt durch die Ladung nur so viel Wasser verliert, als dem entweichenden Wasserstoffe äquivalent ist, war es auch ermöglicht, die Zwischenstufen der Ladung in einfacher Weise zu beobachten und so neben dem Endresultate auch den Verlauf dieses Vorganges zu verfolgen. Denn da das Volumen des gasförmigen Wasserstoffes jederzeit bekannt ist, so ist auch die im Elektrolyten enthaltene Menge Wasser immer bestimmt, indem bloss von der anfänglich vorhandenen die dem Wasserstoffe äquivalente Menge abzuziehen kommt. Daher kann auch die vorhandene Menge SO_3 aus der Concentration allein ermittelt werden.

Es war daher nur nothwendig, in einzelnen Intervallen die Gasentwicklung und die Concentration festzustellen. Bei dem Versuche III wurden 4 Perioden des ganzen Ladevorganges untersucht, so dass immer am Ende einer jeden Periode in einer Probe die Concentration des Elektrolyten bestimmt wurde. Zum Schlusse wurde dann wie früher die Gesammtmenge der SO_3 und daraus die unter „Rest“ angegebene Zusammensetzung des Elektrolyten am Ende des Versuches ermittelt.

Die folgenden Zahlen zeigen den Verlauf des Versuches:

	Gewicht	SO_3	H_2O
Elektrolyt vor der Ladung ..	3·3950 *g*	0·7903 *g*	2·6047 *g*
1. Probe	0·1846 *g*	0·0324 *g*	0·1522 *g*
2. „	0·1196 *g*	0·0262 *g*	0·0934 *g*
3. „	0·0946 *g*	0·0238 *g*	0·0708 *g*
4. „	0·3608 *g*	0·0990 *g*	0·2618 *g*
Rest.........	2·6935 *g*	0·7388 *g*	1·9547 *g*
Elektrolyt nach der Ladung ..	—	0·9202 *g*	2·5329 *g*

Unter „Nach der Ladung" ist die Summe der in allen Proben und im Reste enthaltenen Mengen als Gesammtergebniss der Ladung angegeben. Diese Ziffern sind es auch, welche in die erste Tabelle aufgenommen wurden. In der folgenden Tabelle ist in der ersten Spalte (H) das Volumen des in den einzelnen Perioden entweichenden Wasserstoffes angegeben. In der zweiten unter H_2O die diesem äquivalente Menge Wasser. Aus diesen Angaben und der Zusammensetzung der Proben wurde dann der Zuwachs von SO_3 berechnet, welcher in der dritten Spalte verzeichnet ist.

	H	H_2O	SO_3-Zuwachs
I. Periode...	5·8 cm^3	0·0047 *g*	−0·2368 *g*
II. „ ...	2·7 cm^3	0·0022 *g*	+0·1649 *g*
III. „ ...	15·8 cm^3	0·0127 *g*	+0·1266 *g*
IV. „ ...	66·6 cm^3	0·0537 *g*	+0·0750 *g*

Übereinstimmend mit den Beobachtungen Frankland's zeigt sich in der I. Periode eine Abnahme von SO_3 im Elektrolyten. Diese kann nur durch Bindung derselben in der Platte erfolgen, welche im Allgemeinen durch zwei Processe möglich ist.

$$PbO + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2O. \quad 1)$$

$$Pb + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2. \quad 2)$$

Da jedoch, wie die Tabelle zeigt, die Bindung der SO_3 mit nur sehr geringer Wasserstoffentwicklung verbunden ist, so erscheint der zweite Process ausgeschlossen.

Die Abnahme der SO_3 im Elektrolyten in der I. Periode der Ladung ist somit verursacht durch die Verwandlung von Bleioxyd in Bleisulfat.

In den folgenden Perioden findet ein stetiger Zuwachs von SO_3 statt. Wie im §. 8 ausgeführt, rührt dieser von einer Reduction des Bleisulfates her.

Zur Beurtheilung dieses Processes sind in der folgenden Tabelle die Mengen des wirksamen Wasserstoffes mit dem Zuwachs von SO_3 in den einzelnen Perioden verglichen.

	Elektrolytisch entwickelter H	Entweichender H	Wirksamer H	Zuwachs an SO_3
I. Periode...	63·5 *cm*³	5·8 *cm*³	57·7 *cm*³	—0·2368 *g*
II. „ ...	54·3 *cm*³	2·7 *cm*³	51·6 *cm*³	+0·1649 *g*
III. „ ...	56·0 *cm*³	15·8 *cm*³	40·2 *cm*³	+0·1266 *g*
IV. „ ...	88·2 *cm*³	66·6 *cm*³	21·6 *cm*³	+0·0750 *g*

Wenn man die Mengen Wasserstoff berechnet, die der freigemachten SO_3 entsprechend zur Reduction von Bleisulfat verbraucht werden, so findet man, dass in der

IV.	III.	II.
Periode		
96·9%	87·8%	89·1%

des wirksamen Wasserstoffes in diesen Process eintreten.

Ob der Rest des wirksamen Wasserstoffes zur Reduction von Bleioxyd verbraucht wird, lässt sich nicht bestimmen. Es kann nämlich auch ein noch grösserer Theil des wirksamen Wasserstoffes zur Reduction von Bleisulfat dienen, während gleichzeitig durch die oben nachgewiesene Sulfatbildung aus Bleioxyd SO_3 wieder gebunden wird. Die der freiwerdenden SO_3 äquivalenten Wasserstoffmengen geben nur diejenigen Quantitäten, welche mindestens zur Reduction von Sulfat verbraucht

werden. Daher ist es auch unbestimmt, ob in der I. Periode Sulfat oder Oxyd reducirt wird. Im Ganzen, insbesondere aber in den späteren Perioden, ist jedoch die Reduction von Bleisulfat die weitaus überwiegende Reaction.

§. 14. Fasst man die nachgewiesenen Reactionen zusammen, so kann der chemische Vorgang, welcher die Ladung der negativen Platte begleitet, in folgender Weise beschrieben werden:

Das in der Platte befindliche Bleioxyd wird in Sulfat verwandelt. Der elektrolytische Wasserstoff reducirt das Bleisulfat unter Bildung von Schwefelsäure. Das frischreducirte Blei zersetzt dagegen die Schwefelsäure unter Freimachung von Wasserstoff und Bildung von Sulfat. Die Ladung wird so lange fortschreiten können, bis zwischen den beiden reciproken Processen ein stationärer Zustand hergestellt ist.

Über die polarisirende Wirkung der Lichtbeugung

(Erste Mittheilung)

von

Karl Exner.[1]

(Mit 8 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Juli 1890.)

Die Studien über die Polarisation durch Beugung haben zu so widersprechenden Resultaten geführt, dass eine Revision angezeigt erscheint. Den ersten Theil einer solchen enthält die folgende Mittheilung.

Die erste Beobachtung über diesen Gegenstand rührt von Arago[2] (1812) her. Dieser sagt: „Bei den Phänomenen der gefurchten Gläser ist der Theil des farbigen Lichtes, welcher zurückgeworfen wird, stark durch Reflexion polarisirt; der complementäre und durchgelassene Theil scheint aber nicht modificirt zu sein. Wenn die Furchen des Glases hinreichend tief sind und in angemessenen Abständen von einander liegen, so bemerkt man rechts und links vom Hauptbilde eine zusammenhängende Reihe prismatischer Bilder, sowohl im zurückgeworfenen, als auch im durchgelassenen Lichte. Bei der Reflexion sind diese Bilder unter denselben Umständen wie das Hauptbild polarisirt; beim durchgehenden aber scheint das Licht, woraus sie bestehen, nicht modificirt zu sein. Lässt man bereits polarisirtes Licht auf ein gefurchtes Glas fallen, so bemerkt man stets die prismatischen Bilder, welche das Hauptbild begleiten, wenn auch die Lage des Glases diejenige ist, in welcher nicht ein einziges Lichtmolekül reflectirt wird (diesen Versuch wiederholen.) Eine Platte von isländischem Doppelspath oder jedem anderen doppelbrechenden

---

[1] Diese Arbeit wurde in Gemeinschaft mit Herrn Walther Conrad durchgeführt.

[2] Arago's Werke (Übers. von Hankel), 10. Bd., S. 61.

Mittel mit Furchen versehen und untersuchen, ob die prismatischen Bilder wie bei gewönlichem Glase polarisirt sind, welches auch die Lage der Furchen in Bezug auf die Achse der Doppelbrechung des Krystalles sein möge (gebeugte und reflectirte Bilder). Untersucht man unter angemessener Neigung ein von einem Spiegel reflectirtes Licht durch ein gefurchtes Glas, so werden die Beugungsbilder, von dem des Hauptbild begleitet ist, nicht depolarisirt sein, wie man wohl hätte vermuthen können."

Nach Arago sind demnach bei der Reflexion an einem Glasgitter die das Hauptbild begleitenden Beugungsbilder in der Einfallsebene polarisirt wie das Hauptbild selbst, die durchgehenden Beugungsbilder hingegen sollen unpolarisirt sein, wenn es das einfallende Licht war. Die erstere Beobachtung wurde durch spätere Forscher bestätigt, die letztere nur bedingungsweise. Es sind nämlich die durchgehenden Beugungsbilder nahe unpolarisirt, wenn die geritzte Fläche des Glases dem Beobachter zugekehrt ist, hingegen beträchtlich in der Einfallsebene, d. i. wie durch Reflexion polarisirt, wenn die gefurchte Fläche der Lichtquelle zugekehrt ist.

Fraunhofer[1] (1813) belegte die nichtradirte Fläche eines Glasgitters mit schwarzem Harzfirniss[2] und beobachtete die reflectirten Beugungsspectra nach seiner Methode. Er fand es sehr merkwürdig, dass unter einem gewissen Einfallswinkel ein Theil eines durch Reflexion entstandenen Spectrums aus vollständig polarisirtem Lichte bestand. Dieser Einfallswinkel war für die verschiedenen Spectren sehr verschieden, ja selbst für die verschiedenen Farben ein und desselben Spectrums. Bei Gittern von verschiedener Constante mussten die Einfallswinkel ganz andere sein, wenn dieselben Spectra polarisirt sein sollten.

Die ersten eingehenderen Untersuchungen über die polarisirende Wirkung der Beugung rühren von Stokes[3] her (1849).

---

[1] Fraunhofer, Gilbert, Ann., Bd. 74, 1813.

[2] Dies geschah, um zu verhindern, dass sich den zu untersuchenden Beugungsspectren andere Beugungsspectra von verschiedener Provenienz beimengten. Ich werde im Folgenden derlei Licht „falsches Licht" nennen. Jeder Versuch, bei welchem für die Abhaltung des falschen Lichtes nicht gesorgt ist, erscheint als unbrauchbar.

[3] Stokes, Cambr. Trans., IX, 1849.

Der Zweck seiner Untersuchungen war die Bestimmung der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes. Stokes hat eine dynamische Theorie der Beugung entwickelt und hiebei den Äther als einen festen Körper betrachtet, wenigstens insoweit, als er die Resultante der auf ein Flächenelement ausgeübten Druckkräfte im Allgemeinen nicht als senkrecht auf diesem Flächenelemente annahm, wie diess bei Flüssigkeiten der Fall ist; überdiess nahm er an, dass sich nur die transversalen Schwingungen fortpflanzen, nicht aber die longitudinalen. Er fand so, dass der Winkel der Schwingungsrichtung des gebeugten Strahles mit der ursprünglichen Schwingungsrichtung stets ein Minimum sein müsse. Das heisst: Zieht man durch einen Punkt des gebeugten Strahles eine Parallele zur ursprünglichen Schwingungsrichtung, so liegt die Schwingungsrichtung des gebeugten Strahles in der durch die ursprüngliche Schwingungsrichtung und den gebeugten Strahl bestimmten Ebene und steht auf dem gebeugten Strahle senkrecht.

Dies vorausgesetzt, trete ein geradelinig polarisirter Strahl, dessen Schwingungen mit den Stäben eines Beugungsgitters den Winkel α' bilden, senkrecht durch das Gitter. Die gebeugten Strahlen breiten sich jenseits des Gitters in einer zu den Stäben senkrechten Ebene aus. Ist θ der Winkel eines der gebeugten Strahlen mit den directen Strahlen (Beugungswinkel) und β' der Winkel der Schwingungen des gebeugten Strahles mit den Stäben des Gitters, so besteht nach Stokes die Relation

$$\operatorname{tang} \beta' = \operatorname{tang} \alpha' . \cos \theta.$$

Geschehen die Schwingungen, wie Fresnel annahm, senkrecht zur Polarisationsebene und bedeuten α und β die Winkel der Polarisationsebene mit der Beugungsebene, so geht die letzte Gleichung über in

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha . \cos \theta, \tag{1}$$

welche Gleichung das Stokes'sche Cosinusgesetz ausspricht. Nach diesem Gesetze bewirkt die Beugung eine Annäherung der Polarisationsebene an die Beugungsebene. Geschehen hingegen die Schwingungen in der Polarisationsebene, so gilt die Gleichung

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha . \frac{1}{\cos \theta} \tag{1a}$$

und die Beugung bewirkt eine Entfernung der Polarisationsebene von der Beugungsebene.

Stokes sah in diesen Consequenzen seiner Theorie ein Mittel, die Frage nach der Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes experimentell zu beantworten. Er liess Sonnenlicht durch einen polarisirenden Nicol senkrecht auf ein Glasgitter (Furchengitter) fallen und untersuchte das gebeugte Licht mittelst eines analysirenden Nicols. Das Ergebniss der ersten Versuche war, dass sich die Polarisationsebene nahe gar nicht drehte in Übereinstimmung mit der Beobachtung Arago's und im Widerspruche mit den Formeln (1) und (1*a*).

Allein Stockes bemerkte, dass es sich bei diesem Experimente nicht um eine einfache Beugung handle, da hier die Beugung mit einem Wechsel des Mittels verbunden sei. Er führte den Begriff einer „irregulären Refraction" ein und verfuhr weiter wie folgt:

Man kann zwei Hypothesen über die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes aufstellen und zwei Hypothesen über die irreguläre Refraction, nämlich: 1. die Beugung geschieht vor der Brechung, 2. sie geschieht nach der Brechung. Hieraus combiniren sich vier Hypothesen, welche zu verschiedenen Consequenzen führen. Da überdiess die gefurchte Seite des Glasgitters sowohl dem Beobachter, als der Lichtquelle zugekehrt werden kann, so gibt es acht Fälle zu unterscheiden.

A.

Die gefurchte Fläche dem Beobachter zugekehrt.

1. Die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene, die Beugung vor der Brechung.

Mittelst der Fresnel'schen Formel für die Drehung der Polarisationsebene durch Brechung ergibt sich:

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} \alpha \,.\, \frac{\cos \theta'}{\cos (\theta - \theta')}, \tag{2}$$

wo θ' der Beugungswinkel im Glase und θ jener in Luft ist.

2. Die Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene, die Beugung nach der Brechung.

Es ergibt sich die Formel (1).

3. Die Schwingungen **parallel** zur Polarisationsebene, die Beugung **vor** der Brechung.

Es ergibt sich:

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\alpha . \frac{1}{\cos\theta' \cos(\theta-\theta')} \tag{2 a}$$

4. Die Schwingungen **parallel** der Polarisationsebene, die Beugung **nach** der Brechung.

Es ergibt sich die Formel (1 *a*).

B.

Die gefurchte Fläche der Lichtquelle zugekehrt.

1. Schwingungen **senkrecht**, Beugung **vor** Brechung.

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\alpha . \frac{\cos\theta}{\cos^2(\theta-\theta')} \tag{3}$$

2. Schwingungen **senkrecht**, Beugung **nach** Brechung.
   Es ergibt sich Formel (2).
3. Schwingungen **parallel**, Beugung **vor** Brechung.

$$\text{tang}\,\beta = \text{tang}\,\alpha . \frac{1}{\cos\theta \cos^2(\theta-\theta')} \tag{3a}$$

4. Schwingungen **parallel**, Beugung **nach** Brechung.
   Es ergibt sich Formel (2 *a*).

Zur Vergleichung dieser Formeln mit den Erscheinungen hat **Stokes** über 20 Experimente angestellt und neun von diesen zur Prüfung der Formeln herangezogen. Von diesen letzteren Experimenten beziehen sich sechs auf den Fall *B*, wo die geritzte Fläche der Lichtquelle zugekehrt ist und drei auf den Fall *A*, wo die geritzte Fläche dem Beobachter zugekehrt ist.

Stokes bemerkte zunächst, dass die obigen Formeln sämmtlich von der Form tang $\beta = m$ tang α sind und sich nur durch den Coëfficienten m unterscheiden. Er verfuhr bei seinen Experimenten in der Art, dass er für einen gegebenen Beugungswinkel unter allen Azimuthen α beobachtete, aus den erhaltenen Zahlen m rechnete und dieses mit den Formeln verglich.

Um die **Stokes**'schen Resultate besser beurtheilen zu können, habe ich seine Experimente wiederholt. Doch hatte mein

Glasgitter ungefähr doppelt so viel Striche (über 200 auf dem Millimeter) und gestattete, die Erscheinungen bis zu einem Beugungswinkel von 90° zu verfolgen, während Stokes nicht über 60° kam. Ich beobachtete ausschliesslich unter einem Azimuthe $\alpha = 45°$ und versah das Gitter zur Abhaltung des falschen Lichtes bei den Versuchen *A* mit einem Doppeldiaphragma (Fig. 1). An dem Gitter *AB* waren zwei Stannioldia-

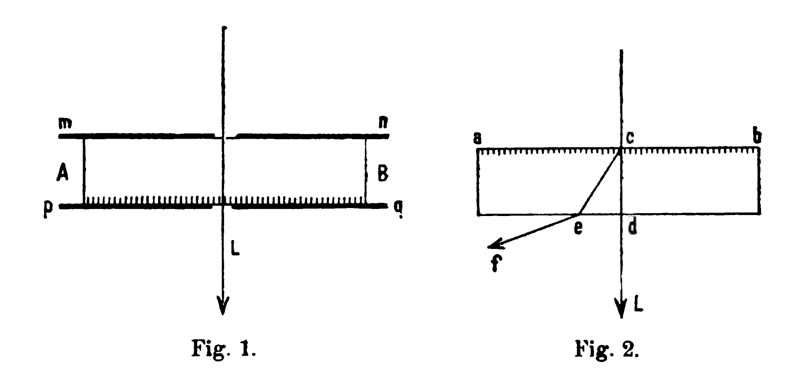


Fig. 1. Fig. 2.

phragmen *mn*, *pq* mit spaltförmigen, den Gitterstrichen parallelen Öffnungen angebracht. *L* bedeutet die Richtung der einfallenden Strahlen. In Bezug auf die Beobachtungen *B* schien mir die Stokes'che Versuchsanordnung in Bezug auf die Abhaltung des falschen Lichtes nicht ausreichend. Ist nämlich (Fig. 2) *ab* die geritzte Fläche, *cd* die Richtung der directen Strahlen und *cef* einer der zu untersuchenden gebeugten Strahlen, so wird directes Licht bei *d* reflectirt, bei *c* durch Reflexion nach *ce* gebeugt und geht ebenfalls den Weg *cef*. Wegen dieses Bedenkens habe ich bei Wiederholung der Versuche *B* die folgende Anordnung vorgezogen.

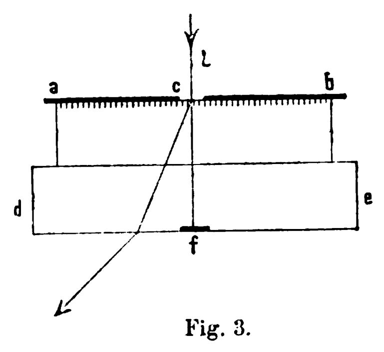


Fig. 3.

Das Gitter *ab* (Fig. 3) war bis auf eine enge Spalte *c* mit Stanniol bedeckt und mittelst Cassiaöl auf einer Glasplatte *de* aufgeklebt. Letztere war bei *f* matt geschliffen und geschwärzt.

Der Übersichtlichkeit wegen habe ich in Fig. 4 die Abhängigkeit der Drehung der Polarisationsebene vom Beugungswinkel nach den Formeln (1), (1*a*), (2), (2*a*), (3), (3*a*) durch Curven dargestellt. Die Beugungswinkel sind auf der Abscissenaxe 0—90 aufgetragen, die Drehungen als Ordinaten. Die Curven entsprechen dem Brechungsexponenten des von Stokes

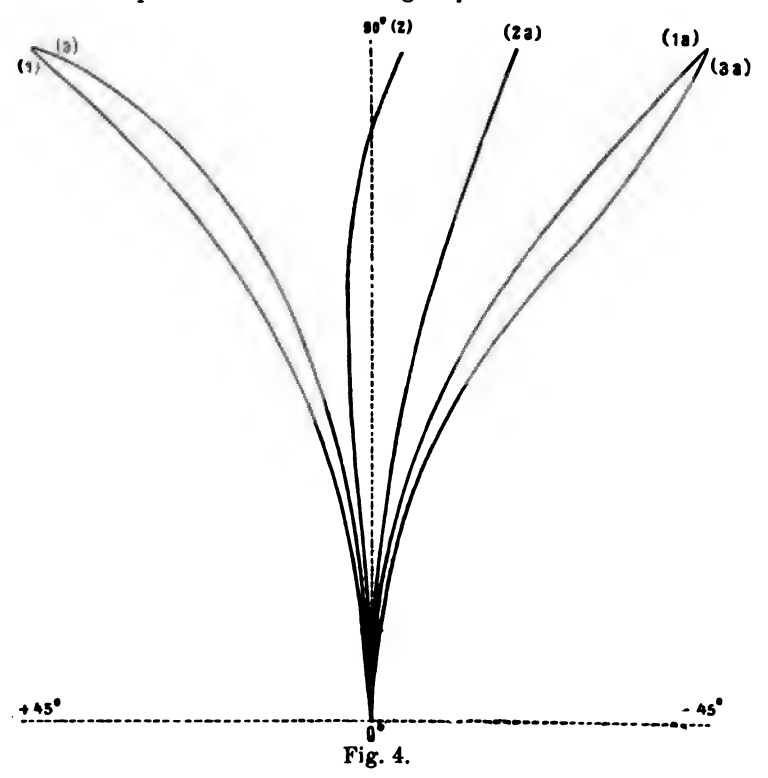


Fig. 4.

benutzten Glases, $n = 1 \cdot 5206$. Drehungen im Sinne einer Annäherung der Polarisationsebene an die Beugungsebene sind als positiv aufgefasst und nach links aufgetragen, Drehungen im entgegengesetzten Sinne nach rechts. Die Länge eines Millimeters in der Figur entspricht einem Winkelgrade. Die Curven (1), (2), (3) entsprechen der Fresnel'schen Hypothese über die Schwingungsrichtung, die Curven (1*a*), (2*a*), (3*a*) der entgegengesetzten Hypothese. Für $n = 1$ würden die Curven (2) und (3) mit der Curve (1) zusammenfallen und die Curven (2*a*) und (3*a*) mit der Curve (1*a*).

Bei dem Versuche *A* gelangte Stokes zu Resultaten, welche sich am meisten der Curve (2) anschlossen, und ich selbst gelangte zu demselben Resultate. Fig. 5 zeigt die Curve (2) mit den Beobachtungen von Stokes (Punkte) und meinen eigenen (Kreuze). Ebenso gelangte sowohl Stokes, als ich selbst bei den Versuchen *B* zu Resultaten, welche sich der Curve (3) an-

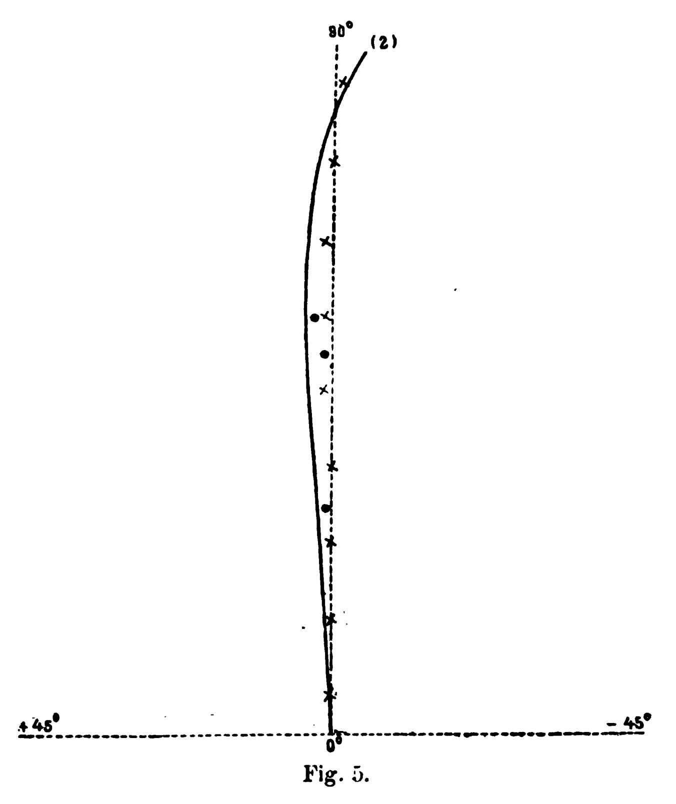


Fig. 5.

schliessen, wie dies in Fig. 6 dargestellt ist, wo Punkte und Kreuze dieselbe Bedeutung haben.

Der Vergleich der Beobachtungen mit den theoretischen Curven zeigt zunächst, dass die Beobachtungen weitab liegen von allen Curven, welche den Parallelismus der Schwingungen mit der Polarisationsebene zur Voraussetzung haben. Es zeigt sich ferner eine nicht zu verkennende Übereinstimmung der Beobachtungen *A* mit der Curve (2), und der Beobachtungen *B* mit der Curve (3). Die Curve (2) nimmt einen charakteristischen

Verlauf. Die Drebung der Polarisationsebene erreicht bei ungefähr 60° Beugungswinkel ein Maximum von nur 3°, wird bei einem Beugungswinkel von ungefähr 80° zum zweiten Mal der Null gleich und nimmt schliesslich zwischen 80° und 90° bis —4° ab. Meine bis zu einem Beugungswinkel von 85° ausgedehnten Messungen lassen das Maximum, den zweiten Nullwerth und das

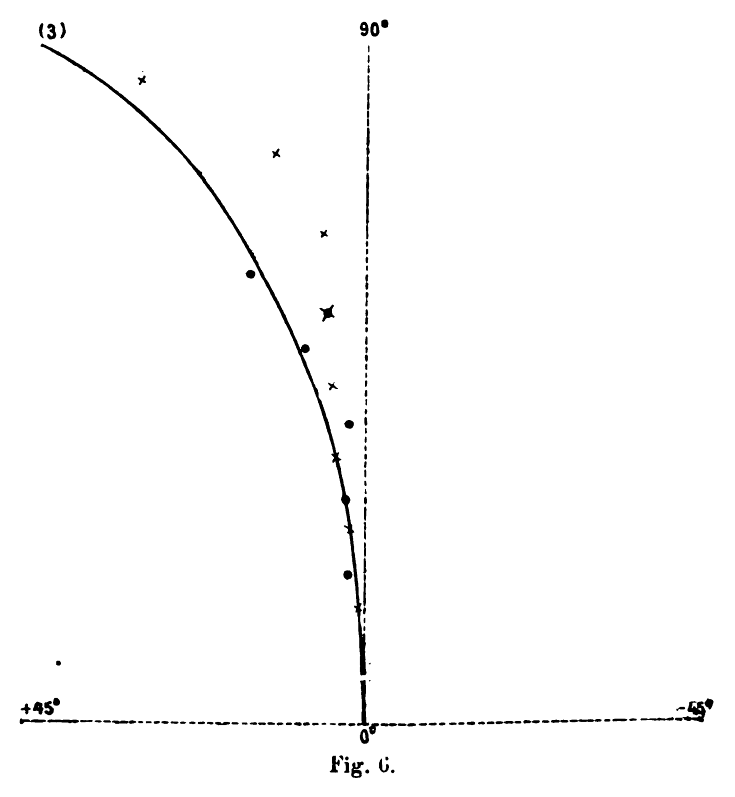


Fig. 6.

Negativwerden an den richtigen Stellen deutlich erkennen. Die Curve (3) zeigt, obgleich die an der zweiten Fläche des Glases eintretende Brechung die Polarisationsebene von der Beugungsebene zu entfernen sucht, merkwürdigerweise bei grösseren Beugungswinkeln eine rasche Annäherung der Polarisationsebene an die Beugungsebene und bei einem Beugungswinkel von 90° ein schliessliches Zusammenfallen dieser beiden Ebenen. Die Tendenz, sich dieser Endlage zu nähern, zeigen meine Beobachtungen deutlich.

Die Versuche sprechen also für das Cosinusgesetz, für die Fresnel'sche Annahme über die Schwingungsrichtung und für jene Stokes'sche Hypothese, nach welcher der Vorgang der Beugung an einem Gitter in der Trennungsfläche zweier Medien so aufzufassen ist, dass in allen Fällen zuerst die Beugung und dann die Brechung vor sich geht. Letzteres würde bedeuten, dass sich die Brechung in der ersten Schichte des zweiten Mediums vollzieht.

Die Tabelle auf Seite 771 diene als Ergänzung zu den Figuren. In derselben bedeutet das Zeichen $\perp$ die Voraussetzung, dass die Schwingungen zur Polarisationsebene normal sind, das Zeichen $\|$, dass sie parallel sind; das Zeichen *A* die Voraussetzung, dass die geritzte Fläche dem Beobachter zugekehrt ist, das Zeichen *B*, dass sie der Lichtquelle zugekehrt ist; das Zeichen (*JR*), dass die Beugung vor der Brechung vor sich geht, (*RJ*), dass das Umgekehrte der Fall ist; positive Drehungen bedeuten eine Annäherung der Polarisationsebene an die Beugungsebene, negative eine Entfernung von derselben. Überdiess ist vorausgesetzt, dass die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit den Gitterstäben einen Winkel von 45° bilde und dass der Brechungsexponent des Glases gleich 1·5206 sei.

Die beobachtete Abhängigkeit der Lage der Polarisationsebene vom Beugungswinkel schliesst sich in unverkennbarer Weise dem Gange jener Functionen an, welche Stokes aus seinen Hypothesen für diese Abhängigkeit hergeleitet hat; gleichwohl muss der Grad der numerischen Übereinstimmung als ein nicht befriedigender bezeichnet werden. Desshalb stellte ich ein neues Experiment an, bei welchem jene Stokes'sche Hypothese, welche sich auf die irreguläre Refraction bezieht, ganz ausgeschaltet erscheint. Ich lasse die Beschreibung des Experimentes folgen.

Das Glasgitter[1] *AB* (Fig. 7) ist mit der geritzten Fläche *mn* mittelst eines Tropfens Öl an eine Halbcylinderlinse *H* geklebt und die ungeritzte Fläche bis auf einen Spalt *s* mit Asphaltfirniss überzogen. Die beiden Gläser, das Öl und der Firniss haben

[1] Ich verdanke die Benützung dieses Gitters der Güte des Herrn Prof. V. v. Lang.

Experiment (α).

Beugungswinkel θ in Graden	Drehung der Polarisationsebene in Graden bei senkrechter Incidenz, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit den Ritzen 45° bildet.							
	Brechungsindex des Glases: 1·5206. Rechnung nach Formel:						Beobachtung (Exner) Methode:	
	(1) $A \perp (RJ)$	(2) $A \perp (JR)$ oder $B \perp (RJ)$	(3) $B \perp (JR)$	(1a) $A \parallel (RJ)$	(2a) $A \parallel (JR)$ oder $B \parallel (RJ)$	(3a) $B \parallel (JR)$	A	B
5°	0°	0°	0°	— 0°	— 0°	— 0°	0°	
10	1	1	0	— 1	— 0	— 1		
15	1	1	1	— 1	— 1	— 1	0	1°
20	2	1	1	— 2	— 1	— 2		
25	3	1	2	— 3	— 2	— 4	0	2
30	4	2	3	— 4	— 2	— 5		
35	6	2	4	— 6	— 3	— 7	0	4
40	8	2	6	— 8	— 4	— 9		
45	10	3	7	—10	— 5	—12	1	4
50	12	3	9	—12	— 6	—15		
55	15	3	11	—15	— 7	—19	1	5
60	18	3	14	—18	— 8	—23		
65	22	3	17	—22	—10	—27	1	5
70	26	3	20	—26	—11	—31		
75	30	2	24	—30	—13	—35	0	11
80	35	0	29	—35	—15	—39		
85	40	— 1	35	—40	—17	—42	—1	29
90	45	— 4	45	—45	—19	—45		

nahe den gleichen Brechungsindex. Diese Vorrichtung wird auf das Tischchen eines Spectrometers gesetzt. Das Spaltfernrohr ist von der Linse befreit und trägt einen drehbaren Nicol. Das Beobachtungsfernrohr ist von beiden Linsen befreit und trägt einen drehbaren, mit verticalem Theilkreise versehenen Nicol. Das vom Heliostaten kommende Sonnenlicht geht durch den Polariseur, dessen Hauptschnitt mit den verticalen Gitterstäben einen Winkel von 45° bildet, tritt durch den Spalt *s* und erfährt am Gitter *mn* Beugung. Das gebeugte Licht *L'* erfährt keinerlei Brechung und tritt durch das Beobachtungsfernrohr und den Analiseur. Während die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes mit der horizontalen Ebene einen Winkel von 45° bildet, kann der Winkel der Polarisationsebene des gebeugten Lichtes mit der horizontalen Ebene (Beugungsebene) gemessen werden.

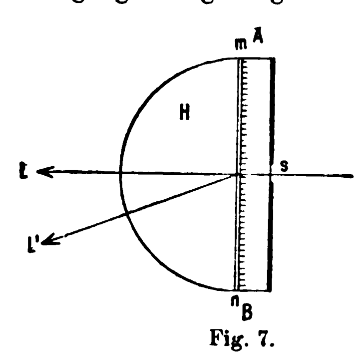


Fig. 7.

Die folgende Tabelle enthält die Resultate meiner Messungen bei dem eben beschriebenen Versuche. In dieser Tabelle bedeutet θ den Beugungswinkel und $\alpha-\beta$ die Drehung der Polarisationsebene im Sinne einer Annäherung an die Beugungsebene. Die Zahlen bedeuten ganze Grade.

Experiment b.

θ	$\alpha-\beta$	θ	$\alpha-\beta$	θ	$\alpha-\beta$
5°	0°	35°	6°	65°	24°
10	0	40	8	70	27
15	1	45	11	75	32
20	2	50	14	80	34
25	4	55	16	85	43
30	3	60	20	90	46

Bei diesem Experimente erscheinen die Beugungsspectren lichtschwächer; sie entstehen wahrscheinlich durch Luft- oder

andere Rückstände in den Furchen. Da bei diesem Experimente keine oder sehr geringe Brechungen stattfinden, reduciren sich die sechs theoretischen Curven (1), (2), (3), (1*a*), (2*a*), (3*a*) auf die zwei Curven (1) und (1*a*), von welchen die erste voraussetzt, dass die Schwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht

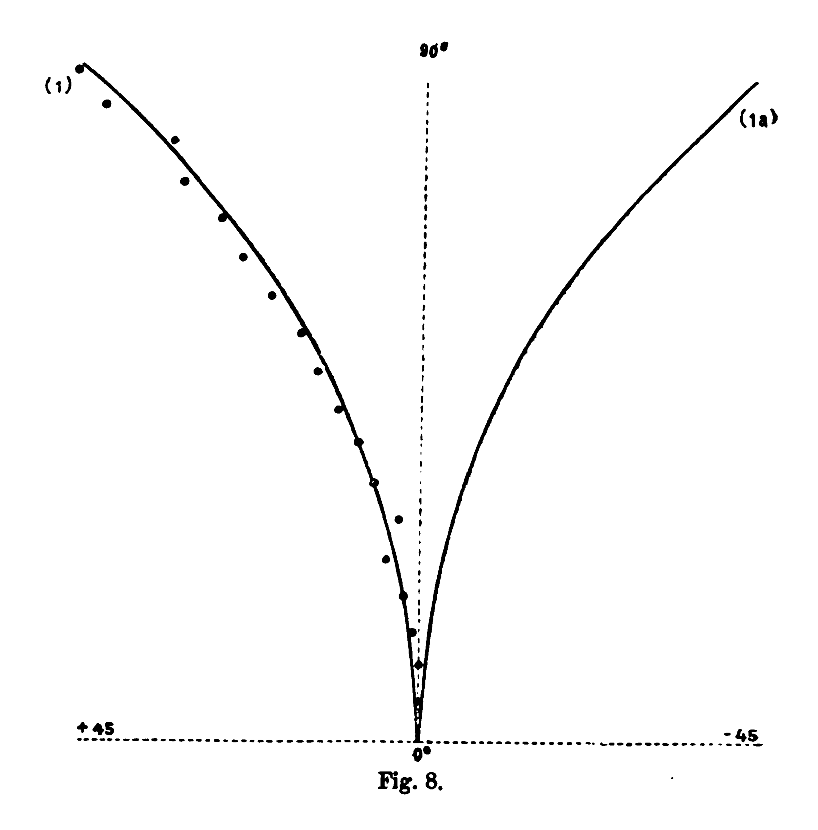


Fig. 8.

stehen, die zweite hingegen, dass die Schwingungen in der Polarisationsebene liegen. In Fig. 8 finden sich die Curven (1) und (1*a*) reproducirt und sind die Beobachtungen der letzten Tabelle als Punkte eingezeichnet. Man sieht, dass die Beobachtungen der Curve (1) entsprechen und weitab von der Curve (1*a*) liegen.

Es ergibt sich demnach aus dem Experimente unmittelbar:

F a l l e n   L i c h t s t r a h l e n   s e n k r e c h t   a u f   e i n   B e u g u n g s g i t t e r   u n d   s i n d   d i e   S c h w i n g u n g e n   p a r a l l e l   u n d   s e n k r e c h t   z u   d e n   G i t t e r s t ä b e n   g l e i c h   i n t e n s i v ,   s o   i s t

letzteres im gebeugten Lichte nicht mehr der Fall, vielmehr entsprechen einem Beugungswinkel θ Amplituden, deren Verhältniss $1:\cos\theta$ ist; für $\theta = 90°$ verschwindet eine der beiden Composanten vollständig und die Polarisationsebene steht auf den Gitterstäben senkrecht.

Die von mir wiederholten, erweiterten und modificirten Stokes'schen Experimente haben demnach eine volle Bestätigung des Stokes'schen Cosinusgesetzes ergeben. Nimmt man überdiess die Richtigkeit der von Stokes entwickelten dynamischen Theorie der Beugung an, so folgt, dass die Schwingungen auf der Polarisationsebene senkrecht stehen.

Die **Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe** erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.



SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. BAND. VIII.—IX. HEFT.

Jahrgang 1890. — October – November.

(Mit 2 Tafeln und 1 Textfigur.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1890.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 8.—9. Heftes 1890 des XCIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 70 kr. = 3 RMk. 40 Pf.

SITZUNGSBERICHTE

DER

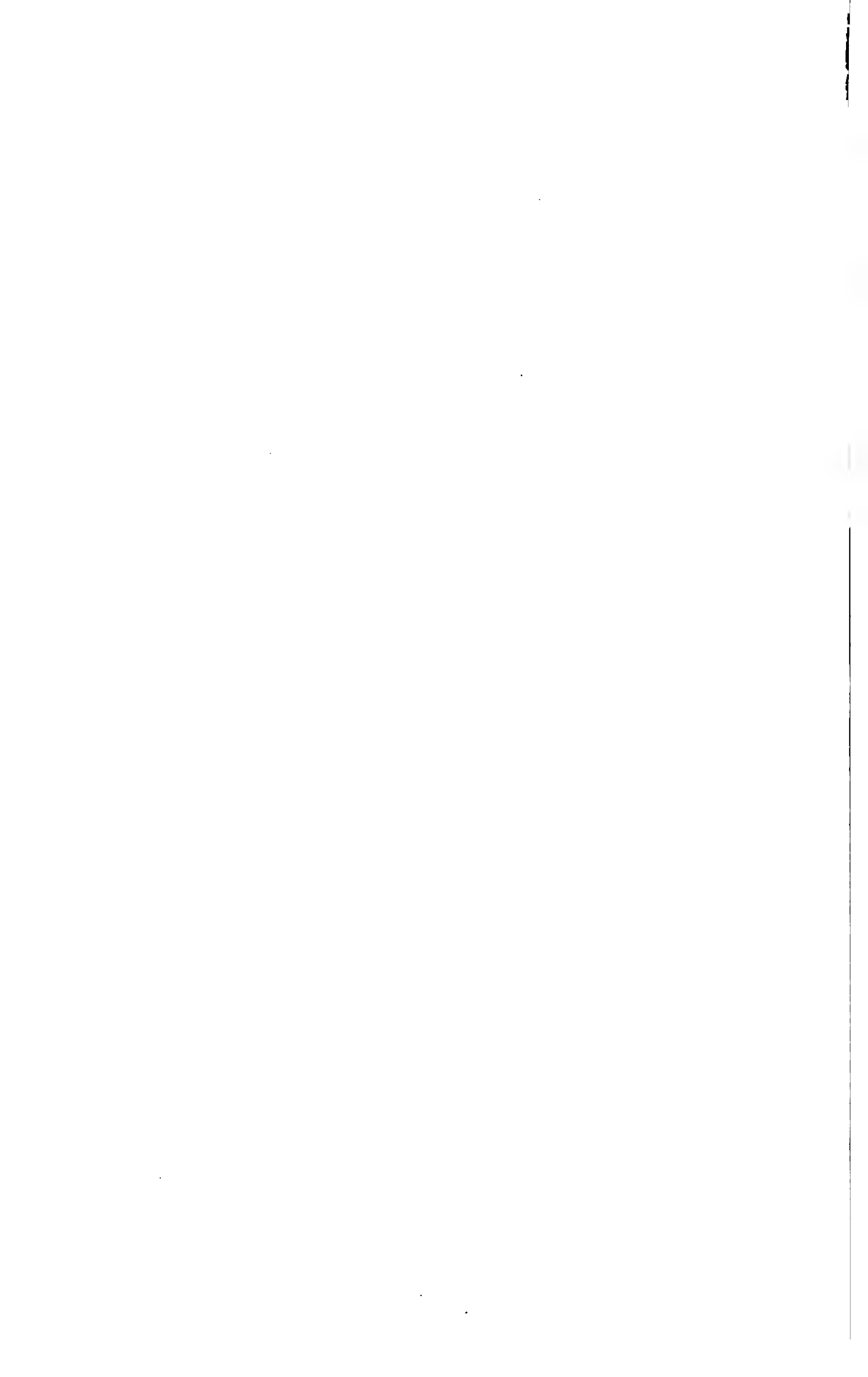
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. VIII. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



XIX. SITZUNG VOM 9. OCTOBER 1890.

Der Vicepräsident der Akademie, Herr Hofrath Dr. J. Stefan, führt den Vorsitz und begrüsst die Mitglieder der Classe bei Wiederaufnahme der akademischen Sitzungen und insbesondere das neu eingetretene Mitglied Prof. Dr. V. v. Ebner.

Hierauf gibt der Vorsitzende Nachricht von dem Ableben des wirklichen Mitgliedes dieser Classe, Hofrath Dr. Ludwig Barth Ritter von Barthenau, am 3. August in Wien, und des wirklichen Mitgliedes der philosophisch-historischen Classe, em. Prof. Dr. Lorenz Ritter v. Stein, am 23. September l. J. in Weidlingau.

Die anwesenden Mitglieder geben ihrem Beileide durch Erheben von den Sitzen Ausdruck.

Der Secretär legt die im Laufe der Ferien erschienenen akademischen Publicationen vor, und zwar:

Den 40. Jahrgang des Almanachs der kaiserlichen Akademie für das Jahr 1890; ferner von den

Sitzungsberichten der Classe, Jahrgang 1890, Abtheilung I, Heft IV—V (April—Mai); Abtheilung II a, Heft IV—VI (April bis Juni); Abtheilung II. b., Heft IV—VI (April—Juni) und die

Monatshefte für Chemie Nr. VI (Juni) und Nr. VII bis VIII (Juli—August) 1890.

Für die Wahl zu Mitgliedern dieser Classe sprechen ihren Dank aus, und zwar:

Das wirkliche Mitglied Prof. Dr. V. v. Ebner in Wien, die correspondirenden Mitglieder im Inlande Prof. Dr. M. Willkomm in Prag und Prof. Dr. H. Weidel in Wien, schliesslich

das correspondirende Mitglied im Auslande Prof. Ph. van Tieghem in Paris.

Das k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht übermittelt eine Anregung der Akademie der Wissenschaften zu Bologna, betreffend den Zusammentritt eines neuerlichen Congresses in Rom zur Feststellung eines Anfangs-Meridians für Längen- und Zeitbestimmung und stellt das Ersuchen um Berathung dieses Gegenstandes im Schoosse der kaiserlichen Akademie und um möglichst schleunige Berichterstattung hierüber.

Das k. k. Ministerium des Innern übermittelt die von der n. ö. Statthalterei vorgelegten Tabellen über die in der Winterperiode 1889/90 am Donaustrome im Gebiete des Kronlandes Niederösterreich und am Wiener Donaucanale stattgehabten Eisverhältnisse.

Das c. M. Prof. Dr. Richard Maly in Prag übersendet eine im chemischen Laboratorium der k. k. deutschen Universität in Prag vom Assistenten L. Storch ausgeführte Untersuchung, betitelt: „Zur Frage der Constitution des Thioharnstoffes“ I.

Das c. M. Prof. Dr. Richard Maly in Prag übersendet ferner eine Arbeit des Herrn Carl Haaf aus dem Laboratorium des Prof. v. Nencki in Bern, betitelt: „Zur Kenntnis der Guanamine.“

Das w. M. Herr Hofrath Prof. L. Boltzmann in Graz übersendet eine im physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz von Prof. Dr. J. Klemenčič ausgeführte Arbeit, betitelt: „Einige Bemerkungen über Normalwiderstände.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Uber Elementaranalyse auf elektrothermischem Wege“, von Herrn Prof. J. Oser am chemischen Laboratorium der k. k. technischen Hochschule in Wien.
2. „Über Conographie. Ein Beitrag zur constructiven Geometrie der Kegelschnitte“, von Herrn Adalbert Breuer, Prof. an der k. k. Staats-Oberrealschule in Trautenau.

Herr August Adler, Supplent an der k. k. Staats-Oberrealschule in Klagenfurt, übersendet eine Abhandlung: „Über

die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel."

Herr Dr. Gejza Bukowski übersendet einen vorläufigen Schlussbericht über seine geologische Reise in Kleinasien, ddo. Bochnia, am 25. Juli 1890.

Herr Franz v. Dobrzyński, Privatdocent an der k. k. technischen Hochschule in Lemberg, übersendet folgende Mittheilung: „Über die photographische Wirkung der elektromagnetischen Wellen".

Herr Prof. Dr. A. Grünwald in Prag übersendet folgende weitere Mittheilung: „Über das sogenannte II. oder zusammengesetzte Wasserstoffspectrum von Dr. B. Hasselberg und die Structur des Wasserstoffes."

Das w. M. Prof. A. Lieben überreicht nachstehende zwei Arbeiten:

1. „Über eine neue quantitative Methode zur Bestimmung der freien Salzsäure des Magensaftes", von Dr. A. Jolles in Wien.
2. „Uber Veratrin", von Dr. S. Stransky in Budapest.

Das c. M. Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Über Congruenzen mit mehreren Unbekannten."

Der Secretär legt Angaben über die Arbeiten der Tiefsee-Expedition vor.

Selbständige Werke oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Ph. van Tieghem et H. Douliot, Recherches comparatives sur l'Origine des membres endogènes dans les plantes vasculaires. Paris, 1889; 8°.

Einige Bemerkungen über Normalwiderstände

von

Ignaz Klemenčič.

(Mit 1 Textfigur.)

Aus dem physikalischen Institute der k. k. Universität in Graz.

1. Über die zeitliche Änderung des Widerstandes einiger Drahtsorten.

Vor einiger Zeit habe ich mehrere Drahtlegirungen bezüglich ihrer Brauchbarkeit zur Anfertigung von Normalwiderständen untersucht und die Resultate dieser Arbeit in den Sitzungsber. d. kaiserl. Akad., Bd. 97 veröffentlicht. Inzwischen sind auch in der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Berlin in ähnlicher Absicht Versuche mit einigen Drahtsorten gemacht worden.[1] Beide Untersuchungen ergaben zunächst das Resultat, dass sich das Neusilber am wenigsten zur Anfertigung von Normalwiderständen eignet, und dass es angezeigt ist, dasselbe durch eine andere Legirung zu ersetzen. Ich glaubte aus meinen Beobachtungen die Anwendung von Platinsilber empfehlen zu müssen. Die physikalisch-technische Reichsanstalt verfertigt ihre Normalwiderstände aus Patentnickeldraht.[2] Platinsilber und Patentnickel haben beide einen kleineren Temperaturcoëfficienten wie das Neusilber und ändern ihren Widerstand mit der Zeit bedeutend weniger als letzteres. Die Legirung Platinsilber hat insbesondere ihre grosse Widerstandsfähigkeit gegen chemische Einflüsse für

[1] Feussner u. Lindeck, Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1889, S. 233.

[2] Feussner u. Lindeck, Zeitschr. f. Instrumentenkunde. 1890, S. 6.

sich und sie hat sich auch in der Praxis zum Theile sehr gut bewährt. Die physikalisch-technische Reichsanstalt legt auf einen möglichst kleinen Temperaturcoëfficienten grosses Gewicht und es wird geradezu eine Metalllegirung mit dem Temperaturcoëfficienten *o* angestrebt, welche merkwürdige Eigenschaft eine Nickelmangankupferlegirung zu besitzen scheint.

Wenn nun auch ein kleiner Temperaturcoëfficient ausserordentlich wünschenswerth ist, so kommt doch bei der Construction von Normalwiderständen die zeitliche Beständigkeit des Widerstandes der verwendeten Legirung in erster Linie in Betracht. Ich habe mit den schon (l. c.) beschriebenen Widerstandsbüchsen Beobachtungen gemacht, welche einen grösseren Zeitraum umfassen und eine Einsicht in die zeitlichen Widerstandsänderungen der verwendeten Drahtsorten gewähren. Zwei Büchsen sind mittlerweile schadhaft geworden und es konnten mit ihnen keine weiteren Messungen gemacht werden. Die anderen vier Widerstandsbüchsen habe ich zu verschiedenen Zeiten untereinander und mit einem Quecksilberwiderstande verglichen. Die Bezeichnung soll dieselbe bleiben wie in der früheren Abhandlung. Es bedeutet daher:

PJM eine Widerstandsbüchse, bei welcher ein Platiniridiumdraht auf einen Metallcylinder gewickelt ist.

NM eine Widerstandsbüchse, bei welcher ein Patentnickeldraht[1] auf einen Metallcylinder gewickelt ist.

NSM eine Widerstandsbüchse, bei welcher ein Neusilberdraht auf einen Metallcylinder gewickelt ist.

NB eine Widerstandsbüchse, bei welcher ein Patentnickeldraht auf einen Beincylinder gewickelt ist.

Die nachfolgende Tabelle 1 gibt die zu verschiedenen Zeiten beobachteten Widerstandsverhältnisse der Büchsen untereinander.

---

[1] Ich habe in der früheren Abhandlung diesen Draht fälschlich als Nickelindraht bezeichnet. Der Nickelindraht hat eine andere Zusammensetzung als die vorliegende Legirung. Durch die gütige Vermittlung des Herrn Dr. K. Feussner wurde der hier verwendete Draht in der physikalisch-technischen Reichsanstalt bezüglich seiner Zusammensetzung geprüft und mit dem in der Reichsanstalt untersuchten, von Basse & Selve in Altona gelieferten Patentnickeldrahte gleich gefunden.

Tabelle I. Bezogen auf 16°5.

	Aug. 1887	Juli 1888	Juli 1889	März 1890	Aug. 1790
PJM/NM	0·99829	0·99828	0·99819	0·99831	0·99825
PJM/NSM	0·99139	0·99070	0·98985	0·98978	0·98950
PJM/NB	0·99120	0·99120	0·99110	0·99117	0·99115
NSM/NB	0·99993	1·00054	1·00122	1·00145	1·00164
NSM/NM	1·00709	1·00768	1·00839	1·00863	1·00883
NB/NM	1·00718	1·00716	1·00715	1·00718	1·00717

Aus der letzten Zeile dieser Tabelle ist ersichtlich, dass die beiden Patentnickeldrähte, welche zur Anfertigung von *NB* und *NM* verwendet wurden, ihren Widerstand im Verlaufe von drei Jahren vollkommen gleich geändert haben. Die beiden genannten Drähte sind in ihrer Zusammensetzung ganz gleich, und da auch die Behandlung derselben vor der Herstellung der Büchsen dieselbe war, so kann diese Thatsache nicht so sehr überraschen. Umso merkwürdiger ist es aber, dass auch der Platiniridiumdraht dieselben zeitlichen Widerstandsänderungen zeigt wie der Patentnickeldraht, was aus der 1. und 3. Zeile hervorgeht. Es lässt sich vielleicht schon aus diesem Umstande schliessen, dass bei beiden Drahtsorten diese Änderungen nicht gross sein konnten. Ganz anders sind die Ergebnisse für Neusilber; bei diesem scheint auch nach drei Jahren noch kein Stillstand eingetreten zu sein. Über die absolute Grösse der zeitlichen Widerstandsänderungen belehrt uns die Tabelle 2, welche uns die zu verschiedenen Zeiten gemachten Vergleiche zwischen einem Quecksilberwiderstande und den einzelnen Widerstandsbüchsen wiedergibt.

Tabelle II. Bezogen auf 16°5.

	August 1887	Febr. 18^8	März 1890	Δ
Hg/PJM	1·01529	1·01553	1·01553	— 24
Hg/NB	1·00636	1·00656	1·00657	— 21
Hg/NM	1·01355	1·01378	1·01375	— 20
Hg/NSM	1·00644	1·00618	1·00517	+127

Der Quecksilberwiderstand *Hg* wurde immer mit destillirtem Quecksilber gefüllt, die Widerstandsröhre vorher mit warmem, destillirten Wasser ausgewaschen und getrocknet. Die Zahlen in der mit Δ bezeichneten Columne geben die Änderung des Widerstandes (in Tausendstel Procent) zwischen der ersten und letzten Beobachtung an. Aus diesen Zahlen folgt, dass der Widerstand der Patentnickeldrähte und des Platiniridiumdrahtes mit der Zeit abgenommen hat, und zwar bei beiden nahezu gleichviel und im Allgemeinen nur um einen mässigen Werth. Es ergibt sich aber auch aus den oben angeführten Zahlen, dass die Widerstandsänderungen bei beiden Drahtsorten bereits im Februar 1888, d. i. ein halbes Jahr nach der ersten Beobachtung, zum Stillstande gekommen waren. Es sei noch erwähnt, dass die Widerstandsbüchsen ungefähr ein halbes Jahr vor der ersten Beobachtung (August 1887) fertiggestellt wurden. Daraus folgt die für die Praxis wichtige Nutzanwendung, dass die aus Patentnickeldraht oder Platiniridiumdraht angefertigten Normalwiderstände ungefähr ein Jahr lang lagern sollen, bevor sie ausgewerthet und in Verwendung gebracht werden.[1] Dabei wird natürlich immer vorausgesetzt, dass die verwendeten Drähte vor und während der Herstellung der Normalwiderstände keinen übermässigen Deformationen ausgesetzt werden.

Hält man die für Neusilber erhaltenen Daten der Tabellen 1 und 2 zusammen, so folgt daraus, dass die Widerstandsänderung der betreffenden Büchse bedeutend grösser ist, als die der anderen und dass bei ihr auch im März 1890 noch kein stationärer Zustand erreicht wurde. Es scheint beinahe, dass diese andauernden Änderungen nicht bloss in vorhergegangenen Deformationen, sondern vielleicht auch anderwärts ihren Grund haben.

Die hier untersuchten Patentnickelsorten zeigten ebenso wie jene in der physikalisch-technischen Reichsanstalt zu Berlin verwendeten durchwegs eine Abnahme des Widerstandes mit der Zeit. Vor nicht langer Zeit jedoch erhielt ich von Basse & Selve einen Patentnickeldraht, der den gleichen specifischen Wider-

[1] Dies empfiehlt sich auch, wenn man die Widerstandsänderungen durch Erwärmen der Spulen beschleunigt, was ja bei unseren Büchsen auch geschehen ist.

stand (0·0000235 Ohm) bei der Zimmertemperatur und den gleichen Temperaturcoëfficienten (0·000183 zwischen 16 und 45°) besass, wie die früheren Patentnickeldrähte, nur war er viel weicher wie diese. Eine aus diesem durch Wickeln über einen Bleistift hergestellte Spirale zeigte jedoch mit der Zeit eine Widerstandszunahme, und zwar vom 1. bis zum 6. Tage, nachdem sie inzwischen auf 45° erwärmt wurde, um 62, sodann bis zum 30. Tage noch um weitere 53 Tausendstel Procent. Ich habe diese Spirale später durch fünfmaliges Wickeln und Abwickeln gewaltsam deformirt; der Widerstand wuchs dabei um mehrere Procente (theils in Folge der Härtung, theils in Folge der Dehnung); als aber die Spirale diesmal nun sich selbst überlassen wurde, zeigte sie mit der Zeit eine Widerstandsabnahme und zwar vom 1. bis zum 3. Tage eine sehr geringe, dann aber nach einer Erhöhung der Temperatur auf 100° eine solche von 37 Tausendstel Procent. Es scheint also, als ob es möglich wäre, durch geeignete Behandlung eine Patentnickelsorte zu erlangen, bei der die zeitlichen Widerstandsänderungen geradezu verschwindend wären.

2. Über Quecksilbernormalwiderstände.

Es ist üblich, bei Benützung von Quecksilberwiderständen die dazu dienenden Glasröhren mit verschiedenen Flüssigkeiten zu waschen, hierauf zu trocknen und dann mit destillirtem Quecksilber zu füllen. Ich habe im Verlaufe der letzten Jahre oft mit einem Normalwiderstande gearbeitet, der schon in meiner früheren Abhandlung beschrieben wurde. Die Reinigung geschah immer mit warmem destillirten Wasser, welches mittelst Luftdrucks durch die Capillare gepresst wurde. Eine so gereinigte Capillare konnte öfters hintereinander entleert und wieder gefüllt werden, der Widerstand derselben wurde bis auf einige Tausendstel Procent stets gleich gefunden, sobald man immer Quecksilber von der gleichen Qualität verwendete. Man bekommt jedoch sehr leicht abweichende Werthe, wenn man destillirtes Quecksilber verschiedener Provenienz nimmt. Ich hatte zur Verfügung: Nr. 1 ein im hiesigen chemischen Institute sorgfältig gereinigtes und destillirtes Quecksilber, welches vorher stark mit Natriumamalgam verunreinigt war, und Nr. 2 ein im physikalischen Institute gereinigtes und destillirtes Quecksilber, welches früher zu Ver-

suchen im Laboratorium diente und daher vielfach Gelegenheit hatte, Metalle aufzunehmen.

Mit diesen beiden Quecksilbersorten wurde eine mehrfach gebogene, mit weiteren Endröhren versehene Capillare abwechselnd gefüllt und ihr Widerstand mit dem der Normalwiderstandsbüchsen *PJM*, *NM*, *NB* und *NSM* verglichen. Als Elektroden wurden amalgamirte, 5 *mm* dicke Kupferdrähte verwendet. Zur besseren Temperaturbestimmung war die Röhre in ein Wasserbad getaucht. Die Resultate sind in Tabelle III ausführlich mitgetheilt, um zu zeigen, wie weit die Übereinstimmung geht, wenn die Röhre wiederholt mit Quecksilber von derselben Qualität gefüllt wird.

Tabelle III.

	Quecksilber Nr. 1.			Quecksilber Nr. 2.			
	17. Aug. 1889	18. Aug. 1890	Mittel	17. Aug. 1889	18. Aug. 1890	Mittel	Δ
Hg/NM	1·00825	1·00823	1·00824	1·00846	1·00846	1·00846	22
Hg/PJM	1·00634	1·0063[illegible]	1·00632	1·00655	1·00655	1·00655	23
Hg/NB	1·00116	1·00113	1·00115	1·00139	1·00139	1·00139	24
Hg/NSM	0·99918	0·99914	0·99916	0·99941	0·99939	0·99940	24

Δ ist wieder in Tausendstel Procent angegeben. Es leitet also das Quecksilber Nr. 1 ungefähr um 0·024% besser als Nr. 2. Um mich zu überzeugen, welches Quecksilber den richtigen Werth gibt, habe ich auch solches Quecksilber untersucht, welches direct vom Händler bezogen und hierauf im Institute getrocknet und destillirt wurde. Die Leitungsfähigkeit dieses Quecksilbers stimmte mit Nr. 2 bis auf 0·002%. Frisch vom Händler bezogenes, getrocknetes, jedoch nicht destillirtes Quecksilber wies eine nur um 0·007% grössere Leitungsfähigkeit auf als Nr. 2.

Es empfiehlt sich daher, zu Quecksilbernormalwiderständen stets vorher nicht benütztes Quecksilber zu nehmen, ja in den meisten Fällen wird man hinreichend genaue Resultate erhalten, wenn man solches auch ohne vorherige Destillation anwendet.

3. Über das Eindringen von Quecksilber in Kupfer.

Die Einschaltung von Normalwiderständen in Leitungen geschieht gewöhnlich durch Eintauchen von kupfernen Elektroden in Quecksilber bis zu einer gewissen Marke; dabei gibt man den Zuleitungsdrähten eine solche Dicke, dass der Widerstand dieser gegen den der Normalspule sehr klein ist. Wegen der Wärmezufuhr von aussen darf man jedoch in dieser Beziehung nicht über eine gewisse Grenze hinausgehen und so kommt namentlich bei Normalspulen mit sehr kleinen Unterabtheilungen der Einheit der Widerstand der Zuleitungsdrähte immerhin in Betracht. Es wäre nun denkbar, dass das Quecksilber in die kupfernen Elektroden dringt und auf diese Weise vielleicht den Gesammtwiderstand der Spule in einer bemerkenswerthen Weise ändert; namentlich bei der von mir aufgestellten Form der Normalwiderstandsbüchsen wären solche Bedenken nicht ungerechtfertigt. Ich habe mich daher bemüht, über den Vorgang des Eindringens von Quecksilber in Kupfer einige Aufschlüsse zu gewinnen und benützte dazu zwei Wege.

1. Kleine, 5 *mm* dicke Kupfercylinder wurden an der Mantelfläche mit Minnium bestrichen und nur die Grundflächen blank gelassen. Eine über den Kupfercylinder geschobene Glasröhre bildete einen Napf, welcher mit Quecksilber gefüllt wurde. Das Kupfer konnte auf diese Weise von der Basis, nicht aber von der Mantelfläche aus vom Quecksilber angegriffen werden. Die Cylinder mit den gefüllten Näpfen blieben nun an einem ruhigen Orte sich selbst überlassen. Nach einem halben Jahre wurde einer von diesen Cylindern längs seiner Axe aufgeschnitten und die Einwirkung des Quecksilbers untersucht; es konnte jedoch selbst mit der Lupe ein Eindringen bis zu messbarer Tiefe nicht constatirt werden. Dasselbe Resultat ergab die Untersuchung bei zwei Cylindern, welche auf diese Weise ein Jahr lang unter dem Einflusse des Quecksilbers standen. Eine Amalgamirung, respective Auflockerung der Oberfläche bis zu merkbarer Tiefe konnte nur bei einigen Kupferbügeln festgestellt werden, welche durch länger als zwei Jahre als Überbrückungsdrähte bei Quecksilbernäpfen dienten und zeitweise auch Temperaturen bis 50 oder 60° ausgesetzt waren.

2. Ferner versuchte ich direct die durch Amalgamirung bewirkte Widerstandsänderung zu messen. Zu diesem Zwecke wurde über einen 5 *mm* dicken Kupfercylinder C_1 (Fig. 1) eine knapp passende Glasröhre G_1 mit Siegellack gekittet und sodann beide zusammen bei E senkrecht zur Axe des Cylinders abgeschliffen und die Schlifffläche zum Schlusse mit sehr feinem Schmirgel polirt. Am anderen Ende ragte der Draht aus der Glasröhre hervor und es waren an dieses Ende zwei dünnere Kupferdrähte D_1 und D_2 angelöthet. Ein zweiter Cylinder war genau so construirt wie der erste und wenn man sie mit den Enden E zur Berührung brachte, so bildeten sie einen Leiter, dessen Widerstand etwa zwischen den Löthstellen der beiden D_1 gemessen werden konnte. Damit der Druck an der Berührungsstelle immer derselbe blieb, wurde der Leiter vertical gestellt, so dass der obere Theil nur durch sein eigenes Gewicht auf den unteren drückte. Eine mit der unteren Hälfte fest verbundene Glasröhre G_2 diente als Führung. Ich hatte zwei solche beinahe ganz gleiche Leiter; der Widerstand derselben wurde zu verschiedenen Zeiten bestimmt. In der Zwischenzeit waren die Endflächen E immer der Wirkung des Quecksilbers ausgesetzt; zu diesem Zwecke dienten über den Endflächen E angebrachte, mit Quecksilber gefüllte Näpfe. Durch eine Amalga-

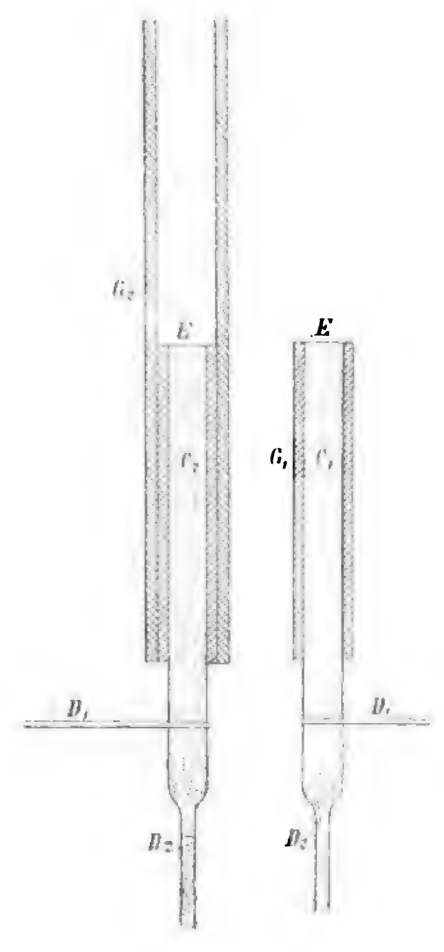


Fig. 1.

mirung der Stellen *E* bis zu merklicher Tiefe musste der Gesammtwiderstand des Leiters verändert werden. Um einen passenden, jedoch mit der Zeit nicht veränderlichen Vergleichswiderstand zu haben, machte ich mir zwei genau gleich geformte, mit Glasröhren umgebene Leiter aus derselben Drahtsorte wie die früheren, schnitt sie jedoch in der Mitte nicht auf. Die beiden Versuchsdrähte sind im Nachfolgenden mit *A* und *B*, die Vergleichswiderstände mit *C* und *D* bezeichnet. Die vier Stücke wurden mittelst der Elektroden $D_2 D_2$ in einen Stromkreis geschaltet, in dem sich auch ein kleiner Widerstand (2 bis 5 Ohm) befand. Der Vergleich der vier Leiter untereinander geschah durch Messung des Ausschlages eines Galvanometers mit dickdrahtiger Rolle, deren Enden nach der Reihe an die Elektroden $D_1 D_1$ gelegt wurden. Die Länge der Cylinder zwischen diesen Elektroden war nicht bei allen ganz gleich, im Mittel jedoch ungefähr 9·5 *cm*. Für das gegenseitige Verhältniss der Widerstände wurden die in nachfolgender Tabelle IV enthaltenen Werthe gefunden.

Tabelle IV.

Datum der Beobachtung	C/D	C/A	C/B	D/A	D/B
Juli 1889	1·0225	1·0998	0·9761	1·0757	0·9546
Jänner 1890	1·0226	1·0943	0·9712	1·0702	0·9497
August 1890	1·0260	1·0975	0·9735	1·0697	0·9489

Die ersten Beobachtungen (Juli 1889) wurden gleich nach Herstellung der Versuchsstücke gemacht.

Das Verhältniss der Widerstände von *C* und *D* stellte sich im August 1890 um $^1/_3{}^0/_0$ grösser heraus als bei den beiden früheren Bestimmungen. Aus der Betrachtung der übrigen Daten geht hervor, dass sich *C* etwas geändert haben muss, was vielleicht durch einen kleinen Riss bei den Elektroden erklärlich wäre. Immerhin lässt sich aus der obigen Tabelle schliessen, dass sich der Widerstand der Versuchsdrähte durch das Eindringen des Quecksilbers im Verlaufe eines Jahres etwa um $^1/_2{}^0/_0$ geändert hat. Aus früheren Bestimmungen des spec. Widerstandes und aus den Dimensionen folgt für *D* ein Widerstand $= 6 \cdot 8 \times 10^{-5}$

Ohm. Die in einem Jahre constatirte Änderung beträgt daher höchstens 4×10^{-7} Ohm. Bedenkt man nun, dass aller Wahrscheinlichkeit nach eine solche Veränderung im ersten Jahre am grössten ist, dann aber fort und fort kleiner ausfällt, so kann man mit Recht behaupten, dass sie auch im Ganzen gegenüber den üblichen Werthen der Normalwiderstände nicht in Betracht kommt.

Es darf ferner nicht unberücksichtigt bleiben, dass die hier gesammelten Erfahrungen nur dann giltig sind, wenn die Amalgamirung nicht durch äussere Einflüsse, z. B. höhere Temperaturen oder vielleicht auch Erschütterungen, beeinflusst wird.

Es ist schon durch andere Beobachtungen festgestellt worden, dass Kupfer in Quecksilber schwer löslich ist und es war zu erwarten, dass die Veränderungen durch Amalgamirung nicht bedeutende sein werden, trotzdem schien es mir interessant genug, darüber auch einige numerische Daten zu gewinnen.

Ein Metall, welches sich in Quecksilber sehr leicht löst, ist das Zinn. Ich habe mir Stäbe aus Zinn gegossen und in ähnlicher Weise wie aus dem Kupferdrahte einen Versuchswiderstand gemacht. Ein zweiter ungetheilter Zinnstab diente zum Vergleiche. Es ergab sich in Folge Eindringens des Quecksilbers schon nach 14 Tagen eine Widerstandszunahme von $4^0/_0$. Weitere Beobachtungen konnten nicht gemacht werden, da sich mit der Zeit an der Berührungsfläche eine völlig flüssige Lösung bildete, die bis in eine gewisse Tiefe reichte, wodurch dann auch andere Einflüsse auf den Widerstand wirken konnten.

Zur Theorie der Congruenzen mit mehreren Unbekannten

von

Leopold Gegenbauer,
c. M. k. Akad.

Die Bedingungen für das Vorhandensein von Lösungen einer Congruenz mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul p überhaupt und von genau $p-1-n$ unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln derselben sind wiederholt und in verschiedener Weise formulirt worden. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Congruenz

$$a_0 x^{p-2} + a_1 x^{p-3} + \ldots + a_{p-3} x + a_{p-2} \equiv 0 \quad (\text{mod. } p), \qquad 1)$$

wo die Grössen $a_0, a_1, \ldots, a_{p-3}, a_{p-2}$ ganze Zahlen vorstellen, überhaupt durch einen von Null verschiedenen Werth von x befriedigt werden kann, hat wohl zuerst Herr Schönemann im 31. Bande des Journals für die reine und angewandte Mathematik von Crelle aufgestellt. Viele Jahre später hat Herr Rados[1] im 93. Bande derselben Zeitschrift folgenden allgemeinen, von Herrn König im mathematischen Seminare des Budapester Polytechnikums mitgetheilten Satz bewiesen:

Damit die Congruenz 1), in welcher a_{p-2} nicht durch p theilbar ist, mindestens $p-1-n$ verschiedene Wurzeln besitzt, ist erforderlich, dass sämmtliche Determinanten $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus dem Systeme

$$a_{\iota+\varkappa} \ (\iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2); \quad a_{h+s(p-1)} = a_h$$

[1] „Zur Theorie der Congruenzen höheren Grades.“

gebildet werden können, durch p theilbar sind; sind die Determinanten $(n+1)$ter Ordnung diejenigen niedrigster Ordnung, welche diese Bedingung erfüllen, so hat die Congruenz genau $p-1-n$ verschiedene Wurzeln.

Herr L. Kronecker[1] hat kurz nachher in demselben Bande des angeführten Journales gezeigt, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz von genau $p-1-n$ unter einander und von Null verschiedenen Wurzeln der angegebenen Congruenz darin ihren Ausdruck finden, dass der Rang des Systems $a_{i+\varkappa}$ in Bezug auf den Primzahlmodul p genau gleich n ist, d. h. also, dass die Determinanten

$$\left| a_{i+\varkappa} \right|_{(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, r)} \quad (a_{h+s(p-1)} = a_h)$$

oder die Determinanten

$$\left| a_{i+\varkappa} \right|_{(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n;\ \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1, r)}$$

für $r = n, n+1, \ldots, p-3, p-2$ die Primzahl p als Factor enthalten, während die Determinante

$$\left| a_{i+\varkappa} \right|_{(i, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1)}$$

zu p theilerfremd ist.

Ich habe hierauf einen höchst einfachen Beweis des interessanten Kronecker'schen Theorems[2] mitgetheilt und wenige Wochen später zu den durch dasselbe angegebenen zwei äquivalenten Systemen von nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Vorhandensein einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz mit einer Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul ein neues in dem folgenden Satze hinzugefügt:

Damit die Congruenz

$$a_{p-2} x^{p-2} + a_{p-3} x^{p-3} + \ldots + a_1 x + a_0 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ p)$$

---

[1] „Über einige Anwendungen der Modulsysteme auf elementare algebraische Fragen."

[2] „Die Bedingungen für die Existenz einer bestimmten Anzahl von Wurzeln einer Congruenz." Diese Sitzungsberichte, 95. Band, II. Abth. S. 165—169.

genau $p-1-n$ untereinander und von Null verschiedene Wurzeln besitzt, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$|a_{\iota+\varkappa}| \quad (\iota, \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, p-2)$$

nebst ihren ersten $p-2-n$ Ableitungen nach a_0 den Factor p enthält, während die $(p-1-n)$te Ableitung zu dieser Primzahl theilerfremd ist.[1]

Für Congruenzen mit mehreren Unbekannten in Bezug auf einen Primzahlmodul hat man bisher nur in wenigen ganz speciellen, zum Theile sehr leicht zu behandelnden Fällen entweder einen Ausdruck für die Anzahl der Lösungssysteme aufgestellt oder die Bedingungen für das Vorhandensein von Wurzelsystemen überhaupt und für die Existenz einer bestimmten Anzahl von solchen ermittelt. Die Ableitung der Bedingungen für die Existenz von Wurzelsystemen und damit die theilweise Erweiterung der von Schönemann, König, Kronecker, Rados und mir gefundenen Resultate, wodurch eine Lücke in der Theorie der Congruenzen wenigstens zum Theile ausgefüllt wird, ist der Zweck der vorliegenden Mittheilung, in deren erstem Paragraphen einige einfache, schon früher behandelte specielle Fälle in neuer Weise erörtert und zum Theile verallgemeinert werden. während im zweiten eine für die allgemeine Untersuchung wichtige Darstellung eines gewissen Determinantenproductes durch eine Determinante angegeben wird, in welcher eine Reihe von derartigen Relationen enthalten sind, welche von Puchta, Voigt, Drude, Baltzer, mir u. A. angegeben wurden, und endlich im dritten das erwähnte allgemeine Problem erledigt wird und einige bemerkenswerthe Sätze in Bezug auf die Anzahl der Wurzelsysteme von Congruenzen mit beliebig vielen Unbekannten bewiesen werden.

§. 1. In höchst einfacher Weise lässt sich die von Herrn Le Besgue[2] im Jahre 1859 gefundene Anzahl der Wurzelsysteme der allgemeinen Congruenz ersten Grades

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b \equiv 0, \quad (\text{mod. } p) \qquad 1)$$

[1] „Über Congruenzen." A. e. a. O., S. 610—617.

[2] „Nombre de solutions d'une congruence de premier degré à plusieurs inconnues." Journal de mathémathiques pures et appliquées par Joseph Liouville. Deuxième série, t. IV, p. 366.

wo selbstverständlich die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zu p theilerfremd sein sollen, ermitteln.

Da aus der Congruenz

$$a_n x_n + b \equiv a_n x'_n + b \pmod{p}$$

bei der vorausgesetzten Eigenschaft der ganzen Zahlen a_x, wie immer b beschaffen sein mag, die Beziehung

$$x_n \equiv x'_n \pmod{p}$$

folgt, so durchläuft der Ausdruck $a_n x_n + b$ ein vollständiges Restensystem nach dem Modul p (mit Einschluss der Null), wenn x_n ein solches durchläuft, nimmt aber x_n nur alle von Null verschiedenen Werthe an, so erhält dieser Ausdruck alle der Zahl b incongruenten Werthe.

Es ist demnach die Anzahl der Lösungssysteme der Congruenz 1) mit n Unbekannten gleich der Summe der Anzahlen der Wurzelsysteme der p Congruenzen ersten Grades mit $n-1$ Unbekannten

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + c \equiv 0 \pmod{p}$$
$$(c \equiv 0, 1, 2, \ldots, p-1) \pmod{p}$$

während die Anzahl derjenigen unter diesen Lösungssystemen, deren sämmtlichen Elemente von Null verschieden sind, gleich der Summe der Anzahlen der Wurzelsysteme derselben Beschaffenheit der $p-1$ Congruenzen ersten Grades mit $n-1$ Unbekannten

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + c' \equiv 0 \pmod{p}$$

ist, wo c' alle nach dem Modul p verschiedenen ganzen Zahlen mit Ausnahme von b annimmt.

Da also die Ermittlung der Anzahl der angeführten Lösungssysteme einer Congruenz ersten Grades mit n Unbekannten auf die Bestimmung der Anzahlen der Wurzelsysteme von p, bezw. $p-1$ Congruenzen desselben Grades mit $n-1$ Unbekannten zurückkommt, da ferner bei Congruenzen ersten Grades mit einer Unbekannten die Beschaffenheit des Coëfficienten der Unbekannten auf diese Anzahl keinen Einfluss hat, so ergibt sich sofort das Theorem:

Die Anzahl der Wurzelsysteme einer Congruenz ersten Grades mit beliebig vielen Unbekannten überhaupt und derjenigen unter ihnen, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, ist von der Beschaffenheit der als theilerfremd zum Primzahlmodul vorausgesetzten Coëfficienten der Unbekannten unabhängig.

Eine Congruenz ersten Grades mit einer Unbekannten hat bekanntlich stets eine Lösung, und daher ist nach den eben gemachten Erörterungen die Anzahl der Lösungen der Congruenz 1) gleich p^{n-1}.

Bei der Bestimmung der Anzahl derjenigen unter diesen Systemen, in denen alle Elemente von Null verschieden sind, hat man zu unterscheiden, ob b durch p theilbar ist oder nicht. Bezeichnet man diese Anzahl, den zwei erwähnten Fällen entsprechend, mit S'_n und S_n, so hat man sofort die Relationen

$$S'_n = (p-1)S_{n-1}$$
$$S_n = S'_{n-1}+(p-2)S_{n-1},$$

deren Vereinigung die Beziehung

$$S_n+S_{n-1} = (p-1)\{S_{n-1}+S_{n-2}\}$$

liefert, aus welcher wegen

$$S_1 = 1, \quad S_2 = p-2$$

die Formel

$$S_n+S_{n-1} = (p-1)^{n-1}$$

folgt. Schreibt man in derselben für n der Reihe nach $n, n-1, n-2, \ldots, 2$ und subtrahirt die Summe der geradstelligen unter den so entstehenden Gleichungen von der Summe der ungeradstelligen, so erhält man die Le Besgue'schen Formeln

$$S_n = \frac{1}{p}\{(p-1)^n-(-1)^n\}$$

$$S'_n = \frac{p-1}{p}\{(p-1)^{n-1}-(-1)^{n-1}\}.$$

Wesentlich complicirter werden schon die Ausdrücke für die Anzahl aller Lösungssysteme der Congruenz zweiten Grades

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_nx_n^2+b\equiv 0 \pmod{p} \qquad 2)$$

und derjenigen unter ihnen, in denen kein Element den Werth Null erhält, weil diese Anzahlen von der Natur der Coëfficienten nicht mehr unabhängig sind.

Da aus der Congruenz

$$a_nx_n^2+b\equiv a_nx_n'^2+b \pmod{p}$$

für ein zum Modul theilerfremdes a_n die Beziehung

$$x_n\equiv\pm x_n' \pmod{p}$$

folgt, so nimmt der Ausdruck a_nx_n+b, wenn x_n ein vollständiges Restensystem nach dem Primzahlmodul p mit Einschluss der Null durchläuft, den Werth b (welchen es nur für $x_n\equiv 0 \pmod{p}$ annehmen kann) einmal, jeden der anderen untereinander und von Null verschiedenen Werthe, die es überhaupt annehmen kann, aber zweimal an, und es ist demnach die Anzahl derjenigen Lösungssysteme der Congruenz 2), deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, gleich der doppelten Summe der Anzahlen der gleich beschaffenen Wurzelsysteme der $\frac{p-1}{2}$ Congruenzen zweiten Grades mit $n-1$ Unbekannten

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}^2+c\equiv 0 \pmod{p}$$

$$(a_nx_n^2+b\equiv c \pmod{p}; \qquad x_n=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2} \pmod{p})$$

während die Gesammtzahl der Lösungssysteme gleich der doppelten Summe der Gesammtanzahlen der Lösungen der oben angeführten Congruenzen, vermehrt um die Gesammtanzahl der Wurzelsysteme der Congruenz

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2+\ldots+a_{n-1}x_{n-1}^2+b\equiv 0 \pmod{p}$$

ist.

Da nun die erwähnten Anzahlen für die Congruenzen

$$a_1x_1^2+b\equiv 0 \pmod{p}$$

$$a_1x_1^2+a_2x_2^2\equiv 0 \pmod{p}$$

nur von dem quadratischen Restcharakter der Coëfficienten abhängen, so sieht man, dass sie auch im allgemeinen Falle ausser

von der Anzahl der Veränderlichen und dem Modul nur noch von der Anzahl der quadratischen Reste, welche unter den Coëfficienten vorkommen, abhängen.

Ist b nicht durch p theilbar, so kann man stets eine ganze Zahl z so bestimmen, dass

$$bz \equiv 1 \pmod{p}$$

ist, und demnach lässt sich die Congruenz 2) stets in einer der beiden folgenden Formen darstellen:

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 \equiv 0 \pmod{p} \qquad 3)$$

$$a'_1 x_1^2 + a'_2 x_2^2 + \ldots + a'_n x_n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \qquad 4)$$

wo, falls b quadratischer Rest von p ist, unter den ganzen Zahlen $a'_\varkappa$ ebenso viele Reste auftreten, als unter den ganzen Zahlen $a_\varkappa$, während für $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$ die Anzahl der Reste unter den ganzen Zahlen $a'_\varkappa$ mit der Anzahl der Nichtreste unter den Coëfficienten $a_\varkappa$ zusammenfällt.

Es sei nun r die Anzahl der Reste unter den Coëfficienten der Unbekannten in den Congruenzen 3) und 4), und es möge mit $S_n^{(0)\prime}(r)$ die Gesammtanzahl der Lösungen der Congruenz 3), mit $S_n^{(0)}(r)$ aber die Anzahl derjenigen von ihnen, in denen kein Element den Werth Null besitzt, und mit $S'_n(r)$, bezw. $S_n(r)$, die betreffende Anzahl für die Congruenz 4) bezeichnet werden.

Aus den obigen Bemerkungen ergeben sich dann sofort die Relationen

$$S_n^{(0)\prime}(r) = S_{n-1}^{(0)\prime}(r-1) + (p-1) S'_{n-1}(r-1) \quad (r > 0)$$

$$S_n^{(0)}(r) = (p-1) S_{n-1}(r-1) \quad (r > 0)$$

Multiplicirt man die Congruenz 3) mit einem Nichtreste, so geht dieselbe in eine Congruenz zweiten Grades derselben Form mit n Unbekannten über, unter deren Coëfficienten $n-r$ Reste vorkommen, und demnach bestehen, da durch dieses Verfahren die Anzahl und Natur der Wurzelsysteme selbstverständlich nicht geändert wird, die Relationen

$$S_n^{(0)\prime}(r) = S_n^{(0)\prime}(n-r)$$

$$S_n^{(0)}(r) = S_n^{(0)}(n-r)$$

deren Verbindung mit den eben aufgestellten Gleichungen die Formeln

$$S_n^{(0)\prime}(0) = S_n^{(0)\prime}(n) = S_{n-1}^{(0)\prime}(n-1) + (p-1)S'_{n-1}(n-1)$$

$$S_n^{(0)}(0) = S_n^{(0)}(n) = (p-1)S_{n-1}(n-1)$$

$$S_n^{(0)\prime}(r) - S_n^{(0)\prime}(n-r-1) = (p-1)\{S'_n(n-r-1) - S'_n(r)\} \quad (n > r \geqq 0)$$

$$S_n(r) = S_n(n-r-1) \quad (n > r \geqq 0)$$

liefert.

Ist unter den Coëfficienten der Unbekannten in der Congruenz 4) ein Rest vorhanden, so stellt das betreffende Glied, wenn dessen Unbekannte x_λ alle nach dem Modul p verschiedenen Werthe durchläuft, zweimal alle Reste und einmal (für $x_\lambda \equiv 0$) den Werth Null dar. Da nun, wie u. A. Herr T. J. Stieltjes jr.[1] gezeigt hat, auf einen Rest $\left(\frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{4} - 1\right)$-mal ein Rest, $\frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{4}$-mal ein Nichtrest und $\frac{1+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}$-mal die Zahl p folgt, so hat man für $r \geqq 1$ sofort die Beziehungen

$$S'_n(r) = S'_{n-1}(r-1) + \left\{1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right\} S_{n-1}^{(0)\prime}(r-1) +$$
$$+ \frac{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2} S'_{n-1}(r-1) + \frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2} S'_{n-1}(n-r)$$

$$S_n(r) = \left\{1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right\} S_{n-1}^{(0)}(r-1) +$$
$$+ \frac{p-4-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2} S_{n-1}(r-1) + \frac{p-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2} S_{n-1}(n-r),$$

Befindet sich unter den Coëfficienten der Unbekannten in der eben erwähnten Congruenz ein Nichtrest, so stellt das betref-

[1] „Bijdrage tot de theorie der derde- en vierde-machtsresten." Verslagen en mededeelingen der koninklijke Akademie van wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Tweede reeks. Zeventiende Deel. Amsterdam 1882.

fende Glied, wenn seine Unbekannte x_λ alle verschiedenen Werthe annimmt, zweimal alle Nichtreste und (für $x_\lambda \equiv 0$) einmal den Werth Null dar. Nun folgt aber auf einen Nichtrest $\left[\frac{p}{4}\right] = \frac{p-2+\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}$ -mal ein Rest und ebenso oft ein Nichtrest und $\frac{1-\left(\frac{-1}{p}\right)}{2}$ -mal die Zahl p, und demnach bestehen die Relationen

$$S'_n(0) = S'_{n-1}(0) + \left\{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right\} S^{(0)'}_{n-1}(0) + \\ + 2\left[\frac{p}{4}\right]\{S'_{n-1}(0) + S'_{n-1}(n-1)\}$$

$$S'_n(r) = S'_{n-1}(r-1) + \left\{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right\} S^{(0)'}_{n-1}(r) + \\ + 2\left[\frac{p}{4}\right]\{S'_{n-1}(r) + S'_{n-1}(n-r-1)\} \qquad (n > r > 0)$$

$$S_n(r) = \left\{1-\left(\frac{-1}{p}\right)\right\} S^{(0)}_{n-1}(r) + 2\left[\frac{p}{4}\right]\{S_{n-1}(r) + S_{n-1}(n-r-1)\} \\ (n > r \geqq 0)$$

Diese Formeln reichen in Verbindung mit den leicht zu ermittelnden Gleichungen

$$S'_1(r) = S_1(r) = 1 + \left(\frac{-1}{p}\right)(2r-1)$$

$$S^{(0)'}_1(r) = 1\,, \qquad S^{(0)}_1(r) = 0$$

zur Bestimmung der erwähnten Anzahlen, von deren Aufstellung hier Umgang genommen werden mag, vollkommen aus. Beispielsweise mag die Gleichung

$$S_2(r) = 4\left\{\left[\frac{p}{4}\right] - \left(\frac{-1}{p}\right)\frac{r(r-1)}{2}\right\}$$

angegeben werden.

Für die eben erörterten Anzahlen hat Herr Le Besgue[1] a. a. O. mit Hilfe der $\frac{p-1}{2}$ -gliedrigen Perioden der p^{ten} Einheitswurzeln elegante Ausdrücke aufgestellt.

---

[1] „Nombre de solutions d'une congruence de premier dégré à plusieurs inconnues." Liouville, Journal de mathématiques, s. II, t. IV, p. 366.

Aus Sätzen über die Gesammtanzahl oder die Anzahl der gewissen Bedingungen genügenden Wurzelsysteme einer Congruenz kann man leicht Theoreme ableiten, welche sich auf andere Congruenzen beziehen, in denen Summen von Gliedern von der Form $ax^{\frac{p-1}{2}}$ auftreten, wenn man beachtet, dass für jede von Null verschiedene ganze Zahl z

$$z^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

ist, je nachdem z quadratischer Rest von p ist oder nicht.

So ergeben sich u. A. aus den eben aufgestellten Formeln die Theoreme:

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s+1} + \ldots + a_{s+n} x_{s+n} + b \equiv 0 \pmod{p}$$

wird durch p^{n+s-1} Systeme von ganzen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{s+n}$ befriedigt. Unter diesen befinden sich

$$\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{2}\right)^s \{2^s((p-1)^n - (-1)^n) - (-1)^{n-1} p r\}$$

solche, in denen alle Elemente von Null verschieden sind, wo r die Anzahl derjenigen unter den 2^s ganzen Zahlen $b \pm a_1 \pm a_2 \pm \pm \ldots \pm a_s$ ist, welche den Factor p enthalten.

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s+1}^2 + \ldots + a_{s+n} x_{s+n}^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

wird durch

$$\frac{1+\left(\frac{b}{p}\right)}{2} S_n'(r) + \frac{1-\left(\frac{b}{p}\right)}{2} + \left(\frac{b^2}{p}\right) S_n^{(0)}(r) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=s} \left(\frac{p-1}{2}\right)^{\lambda} \cdot$$

$$\cdot \left\{ r_1^{(\lambda)} S_n'(r) + n_1^{(\lambda)} S_n'(n-r) + \left\{ 2^{\lambda} \binom{s}{\lambda} - r_1^{(\lambda)} - n_1^{(\lambda)} \right\} S_n^{(0)\prime}(r) \right\}$$

Werthsysteme der Unbekannten befriedigt, wo r die Anzahl der quadratischen Reste von p unter den Coëfficienten $a_{s+1}, a_{s+2}, \ldots, a_{s+n}$, $r_1^{(\lambda)}$ und $n_1^{(\lambda)}$ die Anzahl der quadratischen Reste, bezw. Nichtreste, von p unter den $2^\lambda \binom{s}{\lambda}$ ganze Zahlen $b \pm a_{\varkappa_1} \pm a_{\varkappa_2} \pm \ldots \pm a_{\varkappa_\lambda}$ $(\varkappa_\varrho \gtrless \varkappa_\sigma;\ \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_\lambda = 1, 2, \ldots, s)$ vorstellt. Unter diesen befinden sich

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^s \{r_1^{(s)} S_n(r) + n_1^{(s)} S_n(n-r) + \{2^s - r_1^{(s)} - n_1^{(s)}\} S_n^{(0)}(r)\}$$

solche, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind.

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s-1}^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

besitzt

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^s \left\{ r_1 + n_1 + \left(\frac{-1}{p}\right)(2r-1)(r_1 - n_1) \right\}$$

Wurzelsysteme, in denen kein Element den Werth Null hat, wo r_1, bezw. n_1, die Anzahl der quadratischen Reste, bezw. Nichtreste von p unter den 2^s ganzen Zahlen $b \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_s$ vorstellt und $r = 1$ oder 0 ist, je nachdem a_{s+1} quadratischer Rest von p ist oder nicht.

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s+1}^2 + a_{s+2} x_{s+2}^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

besitzt

$$\left(\frac{p-1}{2}\right)^s \left\{ 4\left[\frac{p}{4}\right](r_1 + n_1) + 2\left(\frac{-1}{p}\right)(r r_1 + (r-1) n_1)(r-1) + \right.$$
$$\left. + \left(1 + 3\left(\frac{-1}{p}\right) - 2\left(\frac{-1}{p}\right)(r-1)^2\right)(p-1)(2^s - r_1 - n_1) \right\}$$

Lösungssysteme, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, wo r_1, bezw. n_1, die Anzahl der quadratischen Reste, bezw. Nichtreste von p unter den 2^s ganzen Zahlen $b \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_s$ vorstellt und r die Anzahl der quadratischen Reste von p unter den Coëfficienten a_{s+1}. a_{s+2} ist.

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

besitzt

$$\left[\frac{b}{p}\right] - \left[\frac{b-1}{p}\right] + \frac{p-1}{2}\left\{\left[\frac{b+a_1}{p}\right] + \left[\frac{b-a_1}{p}\right] - \left[\frac{b+a_1-1}{p}\right] - \left[\frac{b-a_1-1}{p}\right]\right\} +$$
$$+ p + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{a_1}{p}\right)\left\{\left(\frac{b}{p}\right) + \frac{p-1}{2}\left\{\left(\frac{b-a_1}{p}\right) + \left(\frac{b+a_1}{p}\right)\right\}\right\}$$

Wurzelsysteme, unter denen sich

$$p + (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{a_1}{p}\right)\left\{\left(\frac{b}{p}\right) + \frac{p-1}{2}\left\{\left(\frac{b+a_1}{p}\right) + \left(\frac{b-a_1}{p}\right)\right\}\right\}$$

solche befinden, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind.[1]

Die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s+1}^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

hat sicher ein Wurzelsystem, dessen sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, wenn nicht alle 2^s ganzen Zahlen $b \pm a_1 \pm a_2 \pm \pm \ldots \pm a_s$ denselben quadratischen Restcharakter in Bezug auf den genannten Modul besitzen.

Sind die 2^s ganzen Zahlen $b \pm a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_s$ nach dem Primzahlmodul $p = 2^{s+1} + 3$ unter einander und von Null verschieden, so besitzt die Congruenz

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^{\frac{p-1}{2}} + \ldots + a_s x_s^{\frac{p-1}{2}} + a_{s+1} x_{s+1}^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

sicher ein Wurzelsystem, dessen sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, wenn b zu p theilerfremd ist.

---

[1] Die Bedingungen für die Existenz von Lösungssystemen dieser Congruenz hat zuerst Herr Carlo Maria Piuma in seinem im 11. Bande der zweiten Serie der „Annali di matematica pura ed applicata" von F. Brioschi enthaltenen Aufsatze „Intorno ad una congruenza di modulo primo" angegeben.

Speciell erhält man die Sätze:

Die Congruenz:

$$a_1 x_1^{\frac{p-1}{2}} + a_2 x_2^2 + b \equiv 0 \pmod{p}$$

hat sicher Wurzelsysteme, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, wenn die drei ganzen Zahlen b, $b+a_1$, $b-a_1$ nicht sämmtlich quadratische Reste oder Nichtreste von p sind.

Die Congruenz

$$a_1 x_1^3 + a_2 x_2^2 + b \equiv 0 \pmod{7}$$

wird stets durch ein Werthepaar x_1, x_2, dessen Elemente von Null verschieden sind, befriedigt, wenn die drei Coëfficienten zu 7 theilerfremd sind.[1]

§. 2. Zur Erledigung der im Anfange erwähnten allgemeinen Aufgabe benöthigt man eine Determinantenrelation, welche nun entwickelt werden soll. Dieselbe ist eine wesentliche Verallgemeinerung der von mir in meiner im 97. Bande dieser Sitzungsberichte enthaltenen Mittheilung „Über Determinanten" bewiesenen Gleichung

$$\left|(\ldots((\alpha_{i,x}^{(1)}, \alpha_{i,x}^{(2)}); (\alpha_{i,x}^{(3)}, \alpha_{i,x}^{(4)}); \ldots; (\alpha_{i,x}^{(2^n-1)}, \alpha_{i,x}^{(2^n)}))\ldots)\right|_{(i,x=1,2,3,\ldots,m)} =$$

$$= \left|\alpha_{i,x}^{(1)} + \alpha_{i,x}^{(2)} + \ldots + \alpha_{i,x}^{(2^n)}\right| \Pi \left|\alpha_{i,x}^{(1)} \pm \alpha_{i,x}^{(2)} \pm \alpha_{i,x}^{(3)} \pm \ldots \pm \alpha_{i,x}^{(2^n)}\right|_{(i,x=1,2,3,\ldots,m)}$$

wo das Product über alle Zeichencombinationen zu erstrecken ist, für welche die eine Hälfte der Elemente positiv, die andere aber negativ ist.

---

[1] Diesen Satz hat im Wesentlichen Herr Pellet im Jahre 1882 in den „Nouvelles Annales de mathématiques" mitgetheilt.

Ist ω_r eine primitive $r$te Einheitswurzel und multiplicirt man die $(kn+\lambda)$te $(\lambda = 1, 2, \dots, n)$ Horizontalreihe der Determinante rnter Ordnung

$$\left|\begin{array}{l}
a_{1,1}^{(0)},\ a_{1,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(0)},\ a_{1,1}^{(1)},\ a_{1,2}^{(1)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{1,1}^{(r-1)},\ a_{1,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-1)} \\
a_{2,1}^{(0)},\ a_{2,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(0)},\ a_{2,1}^{(1)},\ a_{2,2}^{(1)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{2,1}^{(r-1)},\ a_{2,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-1)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n,1}^{(0)},\ a_{n,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(0)},\ a_{n,1}^{(1)},\ a_{n,2}^{(1)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{n,1}^{(r-1)},\ a_{n,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-1)} \\
a_{1,1}^{(r-1)},\ a_{1,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-1)},\ a_{1,1}^{(0)},\ a_{1,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(0)},\ \dots\dots\dots,\ a_{1,1}^{(r-2)},\ a_{1,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-2)} \\
a_{2,1}^{(r-1)},\ a_{2,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-1)},\ a_{2,1}^{(0)},\ a_{2,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(0)},\ \dots\dots\dots,\ a_{2,1}^{(r-2)},\ a_{2,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-2)} \\
a_{3,1}^{(r-1)},\ a_{3,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{3,n}^{(r-1)},\ a_{3,1}^{(0)},\ a_{3,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{3,n}^{(0)},\ \dots\dots\dots,\ a_{3,1}^{(r-2)},\ a_{3,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{3,n}^{(r-2)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n,1}^{(r-1)},\ a_{n,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-1)},\ a_{n,1}^{(0)},\ a_{n,2}^{(0)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(0)},\ \dots\dots\dots,\ a_{n,1}^{(r-2)},\ a_{n,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-2)} \\
a_{1,1}^{(r-2)},\ a_{1,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-2)},\ a_{1,1}^{(r-1)},\ a_{1,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{1,1}^{(r-3)},\ a_{1,2}^{(r-3)},\ \dots,\ a_{1,n}^{(r-3)} \\
a_{2,1}^{(r-2)},\ a_{2,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-2)},\ a_{2,1}^{(r-1)},\ a_{2,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{2,1}^{(r-3)},\ a_{2,2}^{(r-3)},\ \dots,\ a_{2,n}^{(r-3)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n,1}^{(r-2)},\ a_{n,2}^{(r-2)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-2)},\ a_{n,1}^{(r-1)},\ a_{n,2}^{(r-1)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-1)},\ \dots\dots\dots,\ a_{n,1}^{(r-3)},\ a_{n,2}^{(r-3)},\ \dots,\ a_{n,n}^{(r-3)} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right| =$$

$$
\begin{vmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a^{(1)}_{1,1}, & a^{(1)}_{1,2}, & \ldots, a^{(1)}_{1,n}, & a^{(2)}_{1,1}, & a^{(2)}_{1,2}, & \ldots, a^{(2)}_{1,n}, & \ldots\ldots, & a^{(0)}_{1,1}, & a^{(0)}_{1,2}, & \ldots, a^{(0)}_{1,n} \\
a^{(1)}_{2,1}, & a^{(1)}_{2,2}, & \ldots, a^{(1)}_{2,n}, & a^{(2)}_{2,1}, & a^{(2)}_{2,2}, & \ldots, a^{(2)}_{2,n}, & \ldots\ldots, & a^{(0)}_{2,1}, & a^{(0)}_{2,2}, & \ldots, a^{(0)}_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a^{(1)}_{n,1}, & a^{(1)}_{n,2}, & \ldots, a^{(1)}_{n,n}, & a^{(2)}_{n,1}, & a^{(2)}_{n,2}, & \ldots, a^{(2)}_{n,n}, & \ldots\ldots, & a^{(0)}_{n,1}, & a^{(0)}_{n,2}, & \ldots, a^{(0)}_{n,n}
\end{vmatrix}
$$

$$= \left| \left(a^{(\mu)}_{i,\varkappa}\right) \right|^{(\mu=0,1,\ldots,r-1)}_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)}$$

mit $\omega_r^{r-\varkappa}$ und addirt sie zu den Elementen der λ^{ten} für $k=1, 2, \ldots, r-1$, subtrahirt sodann in der neuen Determinante von den Elementen der $(kn+\lambda)^{\text{ten}}$ Verticalreihe die mit $\omega_r^{\varkappa}$ multiplicirten entsprechenden Elemente der λ^{ten}, so erkennt man, dass die ursprüngliche Determinante den Factor

$$\left| a^{(0)}_{i,\varkappa} + \omega_r a^{(1)}_{i,\varkappa} + \omega_r^2 a^{(2)}_{i,\varkappa} + \ldots + \omega_r^{(r-1)} a^{(r-1)}_{i,\varkappa} \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)}$$

besitzt, und daher hat man nach bekannter Schlussweise die Relation

$$\left| \left(a^{(\mu)}_{i,\varkappa}\right) \right|^{(\mu=0,1,2,\ldots,(r-1)}_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)} = \prod_{\lambda=0}^{r-1} \left| a^{(0)}_{i,\varkappa} + \omega_r^{\lambda} a^{(1)}_{i,\varkappa} + \omega_r^{2\lambda} a^{(2)}_{i,\varkappa} + \ldots + \omega_r^{(r-1)\lambda} a^{(r-1)}_{i,\varkappa} \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)}.$$

Es mag hervorgehoben werden, dass für die Functionen

$$\pi_{h,k} = \left| \sum_{\mu=0}^{\mu=r-1} \omega_r^{\mu k} a_{i,\varkappa}^{(\mu+h)} \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)}$$

die Gleichung

$$\pi_{h,k} = \omega_r^{-hkn} \left| \sum_{\mu=0}^{\mu=r-1} \omega_r^{\mu k} a_{i,\varkappa}^{(\mu)} \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n)}$$
$$= \omega_r^{-hkn} \pi_{0,k}$$

besteht.

Ist $n = r_1 n_1$, und bilden die Grössen $a_{i,\varkappa}^{(\mu)} (\mu = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$ ein in derselben Weise, wie das obige, gebildetes System, dessen verschiedene Elemente die Werthe $a_{i_1,\varkappa_1}^{(\mu,\nu)}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots, r_1-1;\ i_1, \varkappa_1 = 1, 2, 3, \ldots, n_1)$ haben, so lässt sich mit Hilfe der eben entwickelten Gleichung jede Determinante n^{ter} Ordnung auf der rechten Seite derselben unter Adjunction von r_1^{ten} Einheitswurzeln als ein Product von r_1 Determinanten der Ordnung n_1 darstellen, und man hat daher für die aus den Elementen $a_{i_1,\varkappa_1}^{(\mu,\nu)}$ in der angegebenen Weise gebildete Determinante der Ordnung rn (bei leicht verständlicher Bezeichnungsweise) die Beziehung

$$\left| \left(\left(a_{i,\varkappa}^{(\mu,\nu)} \right) \right) \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n_1)}^{(\mu=0,1,2,\ldots,r-1;\ \nu=0,1,2,\ldots,r_1-1)} = \prod_{\mu=0}^{r-1} \prod_{\mu_1=0}^{r_1-1} \left| \sum_{\lambda,\lambda_1=0}^{\lambda,\lambda_1=r-1,r_1-1} a_{i,\varkappa}^{(\lambda,\lambda_1)} \omega_r^{\lambda\mu} \omega_{r_1}^{\lambda_1\mu_1} \right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,n_1)}.$$

Man sieht sofort, dass man durch Fortsetzung dieses Verfahrens schliesslich zu der folgenden durch den Schluss von σ auf $\sigma+1$ leicht zu beweisenden Relation gelangt

$$\left|\left(\ldots\left(a_{i,\varkappa}^{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_\sigma)}\right)\ldots\right)\right|_{(i,\varkappa=1,2,3,\ldots,m)}^{(\mu_1=0,1,2,\ldots,r_1-1;\ \mu_2=0,1,2,\ldots,r_2-1;\ \mu_\sigma=0,1,2,\ldots,r_\sigma-1)} =$$

$$= \prod_{1}^{\sigma}\left[\tau\right] \prod_{0}^{r_\sigma-1}\left[\mu_\tau\right] \left| \sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma=0}^{\lambda_1=r_1-1,\lambda_2=r_2-1,\ldots,\lambda_\sigma=r_\sigma-1} a_{i,\varkappa}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\sigma)}\,\omega_{r_1}^{\lambda_1\mu_1}\omega_{r_2}^{\lambda_2\mu_2}\ldots\omega_{r_\sigma}^{\lambda_\sigma\mu_\sigma}\right|_{(i,\varkappa=1,2,\ldots,m)}.$$

§. 3. Betrachtet man die ganze Function

$$\sum_{\lambda_1\lambda_2,\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}$$

der n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ als ganze Function von x_σ allein, so erkennt man auf Grund der in der Einleitung angeführten Sätze, dass die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass ein bestimmtes Werthsystem $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\sigma-1}, \mu_{\sigma+1}, \ldots, \mu_n$ der Grössen $x_1, x_2, \ldots x_{\sigma-1}, x_{\sigma+1}, \ldots, x_n$, dessen sämmtliche Glieder ganze, zur Primzahl p theilerfremde Zahlen sind, genau $p-1-m$ verschiedenen Lösungssystemen der Congruenz

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

mit zu p theilerfremden Elementen angehört, darin bestehen, dass die Determinante

$$\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\,\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma,i=0,1,2,\ldots,r}$$

oder die Determinante

$$\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma=0,1,2,\ldots,m-1,m;\; i=0,1,2,\ldots,m-1,r)}$$

für $r = m, m+1, \ldots, p-3, p-2$ die Primzahl p als Factor enthalten, während die Determinante

$$\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma,\, i=0,1,2,\ldots,m-1)}$$

zu p theilerfremd ist oder dass die Determinante

$$\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma,\, i=0,1,2,\ldots,p-2)} \quad 5)$$

nebst ihren ersten $p-2-m$ Ableitungen nach $a_{0,0,\ldots,0}$ den Factor p enthält, während die $(p-1-m)^{\text{te}}$ Ableitung zu dieser Primzahl theilerfremd ist, oder endlich, dass sämmtliche Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche aus dem Systeme

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}$$

gebildet werden können, durch p theilbar sind, während die Determinanten m^{ter} Ordnung diese Bedingung nicht mehr erfüllen. Die Indices sind in sämmtlichen Elementensystemen nach dem Modul $p-1$ zu nehmen.

Damit überhaupt irgend ein ganzzahliges Werthsystem der Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_{\sigma-1}, x_{\sigma+1}, \ldots, x_n$, dessen sämmtliche Glieder von Null verschieden sind, zu genau $p-1-m$ verschiedenen Lösungssystemen derselben Beschaffenheit der vorgelegten Congruenz gehört, ist ersichtlich nothwendig und hinreichend, dass das erste, zweite oder vierte von den angeführten äquivalenten Systemen von Bedingungen durch diejenigen Ausdrücke erfüllt wird, welche man erhält, wenn in den betreffenden Determinanten für jede der ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\sigma-1}, \mu_{\sigma+1}, \ldots, \mu_n$ alle nach dem Modul p incongruenten Zahlen (mit Ausschluss der Null) gesetzt und die so entstehenden Determinanten mit einander multiplicirt werden.

Ist die höchste Potenz von p, welche in der Gesammtheit der bezüglichen, durch p theilbaren Determinantenproducte enthalten ist, die σ_1^{te}, so können offenbar nicht mehr als σ_1 verschiedene Zahlensysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{\sigma-1}, x_{\sigma+1}, \ldots, x_n$ der erwähnten Beschaffenheit zu $p-1-m$ Lösungssystemen derselben Art gehören.

Da alle durch p nicht theilbaren ganzen Zahlen der Congruenz

$$x^{p-1}-1 \equiv 0 \pmod{p}$$

genügen, da ferner die elementaren und demnach alle symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Congruenz mit einer Unbekannten, deren Wurzelanzahl mit der Gradzahl übereinstimmt, den analog gebildeten symmetrischen Functionen der Wurzeln jener Gleichung nach dem Modul p congruent sind, welche entsteht, wenn der auf der linken Seite stehende Ausdruck gleich Null gesetzt wird, so hat man die Congruenz

$$\prod_{\tau=1}^{n-1}\prod_{\mu_\tau=1}^{p-1}\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\tau;\ i=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\tau)} \equiv$$

$$\equiv \prod_{\tau=1}^{n-1}\prod_{\mu_\tau=0}^{p-2}\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\,\omega^{\mu_1\lambda_1+\mu_2\lambda_2+\cdots+\mu_{\sigma-1}\lambda_{\sigma-1}+\mu_{\sigma+1}\lambda_{\sigma+1}+\cdots+\mu_n\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\tau;\ i=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\tau)} \pmod{p}$$

wo ω eine primitive $(p-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel ist, oder nach dem im vorigen Paragraphe abgeleiteten Determinantensatze

$$\prod_{\tau=1}^{n-1}\prod_{\mu_\tau=1}^{p-1}\left|\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\mu_1^{\lambda_1}\mu_2^{\lambda_2}\ldots\mu_{\sigma-1}^{\lambda_{\sigma-1}}\mu_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}}\ldots\mu_n^{\lambda_n}\right|_{(\lambda_\sigma=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\tau;\ i=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\tau)} \equiv$$

$$\equiv \left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{\substack{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0,1,2,\ldots,p-2)\\(\lambda_\sigma=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_\tau;\ i=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_\tau)}} \pmod{p}.$$

Man hat daher die Theoreme:

Damit die Congruenz

$$\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n=0}^{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n=p-2} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\ldots x_n^{\lambda_n}\equiv 0 \pmod{p}$$

Lösungssysteme besitzt, deren sämmtliche Elemente von Null verschieden sind, ist nothwendig und hinreichend, dass die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma,\, i=0,1,2,\ldots,p-2)}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=p-2)}$$

wo alle Indices nach dem Modul $p-1$ zu nehmen sind, durch p theilbar ist.

Enthält die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma,\, i=0,1,2,\ldots,r)}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

oder die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma=0,1,2,\ldots,m-1,m;\; i=0,1,2,\ldots,m-1,r)}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

in welcher alle Indices nach dem Modul $p-1$ zu nehmen sind, für $r = m, m+1, \ldots, p-3, p-2$ die Primzahl p in der σ_1^{ten} Potenz, während die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma,\, i=0,1,2,\ldots,m-1)}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

zu p theilerfremd ist, oder enthalten endlich alle Determinanten $(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_\sigma+i,\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m+1};\; i=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{m+1})}^{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{\sigma-1},\lambda_{\sigma+1},\ldots,\lambda_n=0,1,2,\ldots,p-2)}$$

wo die Grössen α_x, ebenso wie die Grössen β_x, irgend welche $m+1$ verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-2$ und alle Indices nach dem Modul $p-1$ zu nehmen sind, den Factor p^{σ_1}, während der grösste gemeinsame

Theiler der ebenso gebildeten Determinanten $m$ter Ordnung zu p theilerfremd ist, so gibt es mindestens ein und höchstens σ_1 Werthsysteme $x_1, x_2, \ldots, x_{\sigma-1}, x_{\sigma+1}, \ldots, x_n$, deren sämmtliche Elemente zu p theilerfremd sind und welche genau $p-1-m$ verschiedenen Lösungssystemen derselben Art der Congruenz

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = p-2} a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

angehören, während es kein Werthsystem der genannten $n-1$ Grössen gibt, welches mehr als $p-1-m$ verschiedenen Lösungssystemen dieser Beschaffenheit angehört.

Enthält die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma+i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma, i = 0, 1, 2, \ldots, r)}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}$$

oder die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma+i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma = 0, 1, 2, \ldots, m_\sigma-1, m_\sigma;\ i = 0, 1, 2, \ldots, m_\sigma-1, r)}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}$$

in welcher alle Indices nach dem Modul $p-1$ zu nehmen sind, für $r = m_\sigma, m_\sigma+1, \ldots, p-3, p-2$ die Primzahl p in der σ_1^τten Potenz als Factor, während die Determinante

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma+i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma, i = 0, 1, 2, \ldots, m_\sigma-1)}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}$$

zu p theilerfremd ist, oder enthalten endlich alle Determinanten $(m_\sigma+1)$ter Ordnung

$$\left|\left(\left(\ldots\left(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma+i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n}\right)\ldots\right)\right)\right|_{(\lambda_\sigma = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m_\sigma+1};\ i = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m_\sigma+1})}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}$$

wo die Grössen α_x ebenso wie die Grössen β_x irgend welche $m_\sigma+1$ verschiedene Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots, p-2$ und alle Indices nach dem Modul $p-1$ zu nehmen sind, den Factor p^{τ_σ}, während der grösste gemeinsame Theiler der ebenso gebildeten Determinanten $m_\sigma$ter Ordnung zu p theilerfremd ist, ist ferner m_ρ die grösste unter den ganzen Zahlen m_σ, so ist die Anzahl derjenigen Wurzelsysteme der Congruenz

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = p-2} a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

deren sämmtliche Elemente zu p theilerfremd sind, sicher nicht grösser als $(p-1)^n + \tau_\rho - (m_\rho+1)(p-1)^{n-1}$.

Setzt man für die $(p-1)^{n-1}$ verschiedenen, oft erwähnten Werthsysteme der ganzen Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\sigma-1}, \mu_{\sigma+1}, \ldots, \mu_n$ eine bestimmte Reihenfolge fest, bezeichnet die zu dem $x$ten Gliede dieser Reihe gehörige Determinante 5) mit $\Delta_x^{(\sigma)}$ und die Anzahl derjenigen Lösungssysteme der betrachteten Congruenz mit zu p theilerfremden Elementen, zu welchen das betreffende System gehört, mit $p-1-m_x^{(\sigma)}$, so ist

$$A = \frac{d^{(p-1)^{n-1}-(m_1^{(\sigma)}+m_2^{(\sigma)}+\ldots+m_{(p-1)^{n-1}}^{(\sigma)}+1)} \,\Big|\, ((\ldots(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma+i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n})\ldots)) \Big|_{(\lambda_\sigma, i = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}}{d a_{0, 0, \ldots, 0}^{(p-1)^{n-1}-(m_1^{(\sigma)}+m_2^{(\sigma)}+\ldots+m_{(p-1)^{n}+1}^{(\sigma)}+1)}}$$

sicher durch p theilbar; denn nach dem im Anfange dieses Paragraphen Bemerkten enthält jedes Glied auf der rechten Seite der Gleichung

$$A = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{(p-1)^{n-1}}} \frac{\{(p-1)^{n-1} - (m_1^{(\sigma)} + m_2^{(\sigma)} + \ldots + m_{(p-1)^{n-1}}^{(\sigma)} + 1)\}!}{\mu_1!\, \mu_2! \ldots \mu_{(p-1)^{n-1}}!} \frac{d^{\mu_1} \Delta_1}{d a_{0,0,\ldots,0}^{\mu_1}} \frac{d^{\mu_2} \Delta_2}{d a_{0,0,\ldots,0}^{\mu_2}} \cdots \frac{d^{\mu_{(p-1)^{n-1}}} \Delta_{(p-1)^{n-1}}}{d a_{0,0,\ldots,0}^{\mu_{(p-1)^{n-1}}}}$$

$$\left[\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{(p-1)^{n-1}} = 0, 1, 2, \ldots, (p-1)^{n-1} - (m_1^{(\sigma)} + m_2^{(\sigma)} + \ldots + m_{(p-1)^{n-1}}^{(\sigma)} + 1);\right.$$

$$\left.\sum_{\lambda=1}^{\lambda=(p-1)^{n-1}} \mu_\lambda = (p-1)^{n-1} - (m_1^{(\sigma)} + m_2^{(\sigma)} + \ldots + m_{(p-1)^{n-1}}^{(\sigma)} + 1)\right]$$

abgesehen von dem zugehörigen Polynomialcoëfficienten den Factor p.

Man hat daher den Satz:

Ist die $\alpha^{(\sigma)}$te $(\sigma = 1, 2, \ldots, n)$ Ableitung der Determinante

$$\left|((\ldots(a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_\sigma + i, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n})\ldots))\right|_{(\lambda_\sigma,\, i = 0, 1, 2, \ldots, p-2)}^{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\sigma-1}, \lambda_{\sigma+1}, \ldots, \lambda_n = 0, 1, 2, \ldots, p-2)} \quad \text{nach } a_{0,0,\ldots,0}$$

zur Primzahl p theilerfremd, während alle Ableitungen niedrigerer Ordnung dieselbe als Factor enthalten, ist ferner $\alpha^{(\rho)}$ die kleinste unter den ganzen Zahlen $\alpha^{(\sigma)}$, so ist die Anzahl derjenigen Lösungssysteme der Congruenz

$$\sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0}^{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = p-2} a_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_n^{\lambda_n} \equiv 0 \pmod{p}$$

deren sämmtliche Elemente zu p theilerfremd sind, sicher nicht grösser als $\alpha^{(\rho)}$.

XX. SITZUNG VOM 16. OCTOBER 1890.

Der Secretär legt vor das im Auftrage Sr. k. u. k. Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzogs Ludwig Salvator, Ehrenmitgliedes der kaiserl. Akademie, von der Verlagshandlung F. A. Brockhaus in Leipzig übersendete Werk: Die Insel Menorca. I. Allgemeiner Theil. Sonderabdruck aus dem Werke: Die Balearen. In Wort und Schrift geschildert. 1890.

Ferner vom königlich italienischen Ministerium für öffentlichen Unterricht: Le opere di Galileo Galilei, Edizione nazionale sotto gli auspicii de Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. I. Firenze 1890.

Von der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig: Monographie der Baltischen Bernsteinbäume. Vergleichende Untersuchungen über die Vegetationsorgane und Blüthen, sowie über das Harz und die Krankheiten der baltischen Bernsteinbäume, von H. Conwentz. Mit 18 lithographischen Tafeln in Farbendruck. Danzig, 1890.

Das c. M. Herr Prof. H. Weidel übersendet eine Abhandlung: „Studien über stickstofffreie, aus den Pyridincarbonsäuren entstehende Säuren." (I. Mittheilung.)

Der Secretär legt zwei von Prof. E. Kobald an der k. k. Bergakademie in Leoben ausgeführte Arbeiten vor, u. zw.:

1. „Über eine allgemeine Form der Zustandsgleichung."
2. „Über Mac-Cullagh's Differentialgleichungen in zweiaxigen Krystallen und deren Verallgemeinerung."

Herr Dr. Alfred Nalepa, Professor an der k. k. Lehrerbildungsanstalt in Linz a. D., übersendet folgende vorläufige Mittheilung über „Neue Phytoptiden."

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von Herrn Alfred Ritter v. Dutczyński in Wien vor, mit der Inhaltsangabe: „Die wesentlichen Angaben über ein vom Einsender gefundenes Mittel, die *Phylloxera vastatrix*, *Peronospora* und andere Parasiten zu bekämpfen, welches gleichzeitig als Düngung gilt."

Das w. M. Herr Director E. Weiss berichtet über die Entdeckung eines Kometen am 28. Juli durch Herrn Coggia in Marseille, dessen Elemente und Ephemeriden von Dr. Friedrich Bidschof an der Wiener Sternwarte berechnet wurden.

Herr Dr. Fritz Langer in Wien überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur normalen Anatomie des menschlichen Auges".

Selbständige Werke, oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

Die Insel Menorca. I. Allgemeiner Theil. Sonderabdruck aus dem Werke: Die Balearen. In Wort und Schrift geschildert. Leipzig, 1890; gr. Folio.

Le opere di Galileo Galilei, Edizione nazionale sotto gli auspicii de Sua Maestà il Re d'Italia. Vol. I. Firenze, 1890; 4°.

Monographie der baltischen Bernsteinbäume. Vergleichende Untersuchungen über die Vegetationsorgane und Blüthen, sowie über das Harz und die Krankheiten der baltischen Bernsteinbäume, von H. Conwentz. Mit 18 lithographischen Tafeln in Farbendruck. Danzig, 1890; 4°.

Dr. C. Remigius und Dr. H. Fresenius, chemische Analyse der:
1. Soolquelle „Louise" im „Bad Oranienplatz", 1889; 8°.
2. Soolquelle „Paul I." 1889; 8°.
3. Soolquelle „Martha" in der Badeanstalt „Martha". 1890; 8°.
4. Soolquelle „Bonifacius" in der Soolquelle „Bonifacius". 1890; 8°.
5. Antonienquelle zu Warmbrunn in Schlesien, Wiesbaden 1890; 8°.

XXI. SITZUNG VOM 23. OCTOBER 1890.

Der Secretär legt das erschienene Heft IV—VII (April bis Juli) des 99. Bandes, Abtheilung III. der Sitzungsberichte vor.

Es gelangt ein Schreiben des w. M. Herrn Hofrathes Dr. Ludwig Boltzmann zur Verlesung, worin derselbe anzeigt, dass er einem Rufe der Universität München Folge geleistet und in das Ausland übergetreten sei.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Dr. Gustav Jäger in Wien, betitelt: „Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln".

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben von Herrn J. Richard Harkup in Krems a. D. behufs Wahrung der Priorität vor, welches nach der Angabe des Übersenders die Beschreibung einer von ihm gemachten Erfindung hinsichtlich der Patronenhülsen für Hinterladerwaffen enthält.

Das w. M. Herr Prof. Lieben überreicht eine Abhandlung des Dr. Bohuslav Brauner in Prag, betitelt: „Volumetrische Bestimmung des Tellurs." I. Theil. Eine maassanalytische Studie.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Dr. Constantin Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Über fossile *Banksia*-Arten und ihre Beziehung zu den lebenden".

Über eine allgemeine Form der Zustandsgleichung

von

E. Kobald in Leoben.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1890.)

Der Zustand des betrachteten Körpers sei durch die absolute Temperatur T und das Volumen v bestimmt. Bezeichnet man ferner mit p den auf ihm lastenden specifischen Druck, mit S die Entropie und mit A das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit, so besteht die Relation:

$$A\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{\partial S}{\partial v}. \tag{1}$$

Denkt man sich zu p noch eine willkürliche Function von v: $\psi(v)$ hinzugefügt, so können nach dieser Gleichung S und $p+\psi(v)$ als die partiellen Ableitungen einer und derselben Function, welche mit H bezeichnet werden möge, dargestellt werden:

$$\left.\begin{aligned} A\left\{p+\psi(v)\right\} &= \frac{\partial H}{\partial v} \\ S &= \frac{\partial H}{\partial T} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Denkt man sich nun die Entropie S als Function von T und v gegeben, so ist nach der zweiten der Gleichungen 2) die Function H und daher nach der ersten von ihnen auch p als Function von T und v bestimmt, d. h. die Zustandsgleichung gefunden.

Eine ziemlich allgemeine Annahme, welche ausserdem eine einfache Rechnung zulässt, ist nun folgende:

$$S = A.F(\tau+u), \tag{3}$$

wo F eine beliebige Function bedeutet und die Grössen τ und u durch die Gleichungen:

$$\tau = \int \frac{dT}{\theta}$$

$$u = \int \frac{dv}{w} \qquad 3a)$$

definirt sind; hierin ist mit θ eine Function von T allein und mit w eine solche von v allein bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial T \partial v} = \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{A}{w} \,.\, F'(\tau + u),$$

wo F' die Ableitung von F bedeutet, erhält man aus der ersten der Gleichungen 2):

$$\frac{\partial \{p + \psi(v)\}}{\partial T} = \frac{1}{w} \cdot F'(\tau + u),^{1} \qquad 4)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich durch Integration in Bezug auf die Variable T die gesuchte Zustandsgleichung:

$$\{p + \psi(v)\} w = \int F'(\tau + u) dT. \qquad 5)$$

Da bereits an geeigneter Stelle eine willkürliche Function von v eingefügt wurde, so entfällt eine solche auf der rechten Seite dieser Gleichung. Um die innere Energie U zu bestimmen, beachte man die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T} &= \frac{c_v}{A} = \frac{T}{A} \cdot \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{T}{\theta} \cdot F'(\tau + u) \\ \frac{\partial U}{\partial v} + p &= \frac{T}{A} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{T}{w} \cdot F'(\tau + u). \end{aligned}\right\} \qquad 6)$$

---

[1] Wegen einer später zu machenden Bemerkung sei hier schon darauf aufmerksam gemacht, dass die Gleichung:

$$w \,.\, \frac{\partial p}{\partial T} = \varphi(\tau + u), \qquad 4a)$$

in welcher mit φ eine willkürliche Function bezeichnet ist, das allgemeine Integral der linearen partiellen Differentialgleichung:

$$\theta \frac{\partial \frac{\partial p}{\partial T}}{\partial T} - w \frac{\partial \frac{\partial p}{\partial T}}{\partial v} = \frac{\partial p}{\partial T} \cdot \frac{dw}{dv} \qquad 4b)$$

ist.

Man erhält also:

$$U = \int \frac{T}{\theta} \cdot F'(\tau + u) dT + \int \psi(v) dv. \qquad 7)$$

Bildet man nämlich:

$$\frac{\partial U}{\partial v} = \frac{1}{w} \int \frac{T}{\theta} F''(\tau + u) dT + \psi(v)$$

und integrirt auf der rechten Seite partiell, so erhält man mit Rücksicht auf die bereits gefundene Zustandsgleichung eine Identität. Dass die Gleichung 7) keine weitere willkürliche Function von v enthält, trotzdem die erste der Gleichungen 6) eine solche zulassen würde, steht im Einklange mit der physikalischen Bedeutung der Function U; anderseits erhellt aus dieser aber auch die Nothwendigkeit, dass in dem Ausdrucke der inneren Energie das Integral $\int \psi(v) dv$ vorkommt. Die Function $\psi(v)$ ist nämlich ihrer Natur nach einem Drucke gleichwerthig und könnte nach Hirn[1] als innere Pressung, nach van der Waals[2] als molekularer Druck bezeichnet werden; dass aber der Arbeitswerth des molecularen Druckes in dem Ausdrucke der inneren Energie erscheinen muss, ist von selbst klar. Aus der zweiten der Gleichungen 2) ergibt sich weiter:

$$H = A \int F(\tau + u) dT; \qquad 8)$$

auf der rechten Seite dieser Gleichung darf keine Function von v hinzugefügt werden, damit unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung die erste der Gleichungen 2) erfüllt werde. Die Gleichung 8) nimmt durch theilweise Integration die Form an:

$$H = A \left\{ T . F(\tau + u) - \int \frac{T}{\theta} \cdot F'(\tau + u) dT \right\}$$

oder

$$H = ST - AU + A \int \psi(v) dv. \qquad 8)$$

Die Function H ist also, abgesehen von dem letzten Gliede auf der rechten Seite dieser Gleichung Massieu's, „charakteristische Function."

[1] Annales de chimie et physique, Tom. XI., 1867.

[2] Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes, übers. von Dr. Roth. VII. Cap.

Bezeichnet man die specifischen Wärmen bei constantem Volumen und constantem Druck beziehungsweise mit c_v und c_p, so hat man zunächst nach der ersten der Gleichungen 6):

$$c_v = A \cdot \frac{T}{\theta} \cdot F'(\tau + u). \tag{9a}$$

Ferner ist allgemein:

$$c_p - c_v = -AT . \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)^2}{\frac{\partial p}{\partial v}};$$

beachtet man aber die Relationen:

$$AT\frac{\partial p}{\partial T} = T\frac{\partial S}{\partial v} = \frac{\theta}{w} \cdot T\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{\theta}{w} \cdot c_v,$$

so ergibt sich:

$$\frac{c_p - c_v}{c_v} = -\frac{\theta}{w} \cdot \frac{\frac{\partial p}{\partial T}}{\frac{\partial p}{\partial v}} \tag{9b}$$

oder

$$\frac{c_p - c_v}{c_v} = -\frac{\frac{\partial p}{\partial \tau}}{\frac{\partial p}{\partial w}}.$$

Herr Bertrand hat in seiner „Thermodynamique"[1] zwei Aufgaben gelöst, deren Fassung mit der unserigen im Wesentlichen dieselbe ist. Daselbst wird nämlich nach den Bedingungen gefragt, welche zu erfüllen sind, damit die adiabatischen Linien eines Körpers die Gleichung haben:

$$p^m v^n = \text{Const.},$$

wenn m und n zwei Constanten bedeuten.

Die Lösung des Problems wird von der Integration einer partiellen Differentialgleichung, welche der in der Anmerkung zu

[1] Chap. VIII, Probl. VII et VIII.

Gleichung 4) vorkommenden 4*b*) analog ist, abhängig gemacht. Im Schlussresultate, welches nichts Anderes als die Zustandsgleichung ist, erscheinen dann zwei Functionen F und φ des Argumentes $p^m . v^n$, welche beide als willkürlich bezeichnet werden. Dass diese Behauptung jedoch nicht richtig ist, geht aus der Gleichung hervor, durch welche — p und v als unabhängige Variablen gedacht — die beiden specifischen Wärmen mit einander verknüpft sind. In völlig analoger Weise kann in der Gleichung 4*a*), welche als das Integral der oben erwähnten partiellen Differentialgleichung 4*b*) aufgefasst werden kann, die Function φ nicht willkürlich gewählt werden, wenn F eine gegebene Function ist.

Es soll nun gezeigt werden, wie aus der Gleichung 5) durch Specialisirung der in ihr vorkommenden Functionen mehrere der bekannten Zustandsgleichungen hervorgehen.

Um dem von den Theilchen des betrachteten Körpers erfüllten Raume Rechnung zu tragen, sei zunächst, wenn mit b eine Constante bezeichnet wird, gesetzt:

$$w = v - b,$$

so wird:

$$u = l(v - b).$$

Die Function τ lasse man vorläufig beliebig, treffe aber für die Function F die Wahl:

$$F(z) = Bz + \frac{C}{\mu} e^{-\mu z},$$

wo B, C und μ Constanten bedeuten. Dann ist:

$$F'(\tau + u) = B - \frac{C}{(v-b)^{\mu}} \cdot e^{-\mu\tau}.$$

Setzt man noch:

$$\frac{1}{\vartheta} = \int e^{-\mu\tau} . dT.$$

so erhält man als Gleichung der Temperaturfläche:

$$\{p + \psi(v)\}(v - b) = BT - \frac{C}{\vartheta (v-b)^{\mu}} \qquad 10)$$

Setzt man in dieser Gleichung:

$$\psi(v) = \frac{a}{v^2} \text{ und ausserdem } C = 0,$$

so erhält man das Gesetz von van der Waals.[1]

Nimmt man auf die innere Pressung keine Rücksicht, setzt also $\psi(v) = 0$ und gleichzeitig $\mu = 1$, so hat man eine Verallgemeinerung der Rankine'schen Gleichung:

$$pv = BT - \frac{C}{Tv};$$

der so entstehenden Gleichung kann man die Form geben:

$$\frac{p}{BT} = \frac{1}{v-b} - \frac{C}{\vartheta.(v-b)^2} \qquad 10a)$$

wo ϑ wieder eine Temperaturfunction bedeutet. Setzt man im zweiten Gliede rechter Hand der Gleichung 10a) an Stelle der Constanten b eine andere, z. B. $-\beta$, so ergibt sich der Clausius'sche Typus:

$$\frac{p}{BT} = \frac{1}{v-b} - \frac{C}{\vartheta(v+\beta)^2}.$$ [2]

Um einige ältere Formen der Zustandsgleichung, welche insbesondere zur Darstellung des Verhaltens des Wasserdampfes aufgestellt wurden, zu erhalten, werde, wenn man mit n eine Constante bezeichnet,

$$\tau = \frac{1}{n-1} l(T)$$

angenommen, während die Function F vorläufig beliebig bleibe.

Setzt man der Einfachheit halber $b = 0$ und $\psi(v) = 0$, so gelangt man durch Umkehrung der Functionalbeziehung zu einer Gleichung von der Form:

$$Tv^{n-1} = \Phi(pv^n), \qquad 11)$$

welche, von unwesentlichen Änderungen abgesehen, bereits von Herrn Grashof[3] aufgestellt wurde. Denkt man sich in der

[1] A. a. O. S. 62.

[2] Wied. Ann., Bd. IX und XIV.

[3] Theoretische Maschinenlehre, Bd. I, §. 39.

Gleichung 11) die Function Φ als gegeben, so sind die oben entwickelten Formeln dem entsprechend umzugestalten.

Setzt man nämlich die Ableitung von Φ:

$$\Phi'(pv^n) = \Phi',$$

so wird:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial S}{\partial v} = \frac{1}{v \, . \, \Phi'}. \tag{11a}$$

Sieht man, wie schon bemerkt wurde, von dem molecularen Drucke ab, so kann wie in 2) gesetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} Ap &= \frac{\partial H}{\partial v} \\ S &= \frac{\partial H}{\partial T} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Die Function H kann dann nach 11a) unter der Form dargestellt werden:

$$H = A \iint \frac{dv dT}{v \cdot \Phi'} + F(T) + \Psi(v), \tag{12a}$$

wo F eine Function von T, und Ψ eine solche von v allein ist. Nach der ersten der Gleichungen 12) entspricht aber das letztere Glied nur der zu vernachlässigenden inneren Pressung und möge daher in der Rechnung nicht weiter mitgeführt werden.

Es ergibt sich somit:

$$S = A \int \frac{dv}{v \, . \, \Phi'} + F'(T) \tag{13}$$

und daher weiter:

$$A \frac{\partial U}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} = A \int \frac{T}{v} \frac{\partial (1/\Phi')}{\partial T} dv + T . F''(T).$$

Beachtet man aber die Relation:

$$\frac{T}{v} \frac{\partial (1/\Phi')}{\partial T} = \frac{1}{n-1} \frac{\partial (1/\Phi')}{\partial v},$$

welche aus der Gleichung:

$$(n-1)T\frac{\partial p}{\partial T}=np+v\frac{\partial p}{\partial v}$$

folgt, so wird:

$$A\frac{\partial U}{\partial T}=c_v=\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{\Phi'}+T.F''(T). \tag{14}$$

Aus dieser Gleichung erhält man durch Integration:

$$AU=\frac{A}{n-1}\int\frac{dT}{\Phi'}+\int T.F''(T)\,dT. \tag{15}$$

Eine Function von v wurde hiebei nicht hinzugefügt; denn bildet man:

$$\frac{\partial U}{\partial v}=\frac{1}{n-1}\int\frac{\partial(1/\Phi')}{\partial v}dT=\int\frac{T}{v}\frac{\partial(1/\Phi')}{\partial T}dT,$$

so erhält man durch theilweise Integration:

$$\frac{\partial U}{\partial v}=\frac{T}{v.\Phi}-\int\frac{dT}{v\Phi'}=\frac{T}{v.\Phi'}-p,$$

oder

$$A\left(\frac{\partial U}{\partial v}+p\right)=\frac{A.T}{v.\Phi'}=T\frac{\partial S}{\partial v},$$

d. h., es folgt aus 15) eine richtige Gleichung.

Die Function H ist wieder die „charakteristische Function".

In der That ist:

$$\iint\frac{dv\,dT}{v.\Phi'}=\int\left\{\frac{T}{v\Phi'}-\int\frac{T}{v}\cdot\frac{\partial(1/\Phi')}{dT}dT\right\}dv$$

$$=T\int\frac{dv}{v\Phi'}-\frac{1}{n-1}\iint\frac{\partial(1/\Phi')}{\partial v}dv\,dT$$

$$=T.\frac{S-F'(T)}{A}-\frac{1}{n-1}\int\frac{dT}{\Phi'}$$

$$=\frac{S.T-AU}{A}+\frac{1}{A}\left\{\int TF''(T)dT-T.F'T\right\}$$

d. h. man hat:

$$H=ST-AU \tag{16}$$

Bezeichnet man mit B und C zwei Constanten, so sei für $\Phi(z)$ gesetzt:

$$\Phi(z) = \frac{z}{B}\left\{1 + \frac{C}{z^m}\right\};$$

dadurch nimmt die Zustandsgleichung 11) die Form an:

$$p.v = BT - \frac{C}{p^{m-1}v^{mn-1}}. \qquad 17)$$

Wählt man in dieser Gleichung $m = 1$, so wird $\Phi(z)$ eine lineare Function ihres Argumentes, d. h. Φ' ist eine Constante; also sind nach Gleichung 14) und 15) die specifische Wärme bei constantem Volumen und die innere Energie Functionen von t allein. Man erhält dann die Gleichung:

$$pv = BT - \frac{C}{v^{n-1}}.$$ [1]

Für $m = \frac{1}{n}$ wird:

$$pv = BT - C.p^{\frac{n-1}{n}}$$ [2]

und endlich für $m = 2$ und $2n - 1 = \varepsilon$

$$pv = BT - \frac{C}{pv^{\varepsilon}}.$$ [3]

---

[1] Hirn, Annales de Chim. et Phys. 4e série, tome X. G. Schmidt, Zeitschr. d. Ver. deutscher Ing., Bd. XI.

[2] Zeuner, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing., Bd. XI.

[3] Ritter, Wied. Annalen, Bd. III. Speciell für Wasserdampf wird daselbst $\varepsilon = \frac{3}{2}$ genommen.

Über Mac-Cullagh's Differentialgleichungen für Lichtschwingungen in zweiaxigen Krystallen und deren Verallgemeinerung

von

E. Kobald in Leoben.

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. October 1890.)

In dem berühmten Werke von Lamé „Théorie mathématique de l'élasticité" wird die Theorie der Elasticität auf die Doppelbrechung des Lichtes angewendet. Die Gesetze der Doppelbrechung in zweiaxigen Medien werden mittelst particulärer Integrale eines gewissen Systems simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung[1] hergeleitet. Da bei Lamé überhaupt keinerlei Literaturnachweise vorkommen und dies auch bezüglich des obigen Gleichungssystems der Fall ist, so werden dieselben, wie es scheint, allgemein ihm zugeschrieben und nach ihm[2] benannt. Die Priorität bezüglich desselben gebührt jedoch Mac-Cullagh, der die erste Mittheilung hierüber in einem an Brewster gerichteten Briefe[3] machte. Daselbst werden allerdings nur die Ausdrücke für die in der Theorie der Elasticität betrachteten Druckcomponenten angegeben; dass er aber die aus ihnen sich ergebenden Differentialgleichungen, welche mit denen von Lamé identisch sind, thatsächlich bildete, geht aus der daselbst gemachten Bemerkung hervor, dass nach seinem Ansatze die in der Cauchy'schen Theorie bestehende Schwierigkeit bezüglich quasitransversaler Schwingungen und

[1] Deuxième Edition. XVII. Leçon.

[2] Man vergl. z. B. die Werke: Neumann, Théorie der Elasticität, §. 120, oder Poincaré, Théorie math. de la lumière, §. 166.

[3] Phil. Mag. Vol. VIII. 1835.

der Existenz einer longitudinalen Welle entfalle. Während Poisson im allgemeinsten Falle eines anisotropen Mediums Gleichungen mit 36 unabhängigen Coëfficienten aufstellte, zeigte Green[1] mehrere Jahre später, dass deren Anzahl sich auf 21 reducire, wenn den Kräften, welche aus der Änderung der relativen Lage der Äthertheilchen resultiren, ein Potential zukommt; dieses ist dann als quadratische Form der sechs Grössen, welche nach Saint-Venant[2] als die drei Dilatationen und die drei Gleitungen bezeichnet werden, dargestellt. Green vereinfachte den Ausdruck der von ihm eingeführten Kräftefunction unter der Annahme, dass es drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen im Krystalle gebe, um schliesslich zu isotropen Medien zu übergehen. In einem weiteren Aufsatze,[3] welcher etwa $1^1/_2$ Jahre nach dem obigen erschien, suchte Green den allgemeinen Ausdruck des Potentials durch die Annahme zu vereinfachen, dass eine im Medium fortgepflanzte Welle genau transversal sei; die Anzahl der willkürlichen Constanten reducirt sich dann auf sieben.[4] Wie Kirchhoff[5] gezeigt hat, bedingt eine dieser Constanten das Auftreten einer in jeder Richtung longitudinalen Welle, während die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Polarisationszustand der transversalen Wellen mit den sechs übrigen im Zusammenhange stehen. Ungefähr ein halbes Jahr nach der Veröffentlichung von Green's zweiter Arbeit leitete Mac-Cullagh in einer denkwürdigen Abhandlung[6] die von ihm schon früher gefundenen, aber ohne Rechnung mitgetheilten Differentialgleichungen ausführlich her. Während jedoch in seiner ersten Mittheilung eine gewisse Annahme über die Werthe der Druckcomponenten das Resultat lieferte, bildete nun wie bei Green die Annahme der Existenz eines Potentials den Ausgangspunkt.

[1] Mathematical papers. On the reflexion and refraction of light. Cambr. Transact. 1838.

[2] Mémoire sur la torsion des prismes. Mém. sav. étr. 1855.

[3] Math. papers. On the propagation of light in crystallized media. Cambr. Transact. 1839.

[4] A. a. O. S. 309.

[5] Abhandlungen d. Berl. Akad. 1876.

[6] The collected works. An essay towards a dynamical theory of crystalline reflexion and refraction.

Die Elemente, durch welche dieses ausgedrückt wurde, waren aber wesentlich andere als bei Green und andere als bei seiner früheren Darstellung der Druckcomponenten. Die Kräftefunction, bezogen auf die Volumeneinheit, wurde nämlich als quadratische Form der drei Componenten der Elementarrotation, deren analytische Ausdrücke bis dahin, wie es scheint, noch nicht die entsprechende mechanische Interpretation erfahren hatten, dargestellt. Sieht man bei dem speciellen, nur sieben willkürliche Constanten enthaltenden Green'schen Potential von dem Gliede, welches die longitudinale Welle bedingt, ab, so führt, wie Kirchhoff[1] in sehr eleganter Weise gezeigt hat, die Green'sche Kräftefunction zu denselben Differentialgleichungen wie die Mac-Cullagh'sche. Erwägt man, dass bei der Green'schen Darstellung nur solche Grössen, von denen die Deformation des Raumelementes abhängt, eingeführt werden, bei der Mac-Cullagh'schen dagegen auf die Deformation gar keine Rücksicht genommen ist, so wird man das angeführte Rechnungsergebniss gewiss als höchst auffällig bezeichnen. Die Kirchhoff'sche Beweisführung dürfte übrigens in folgender Weise noch vereinfacht werden. Bezeichnet man das auf die Volumeneinheit bezogene Green'sche und Mac-Cullagh'sche Potential, respective mit F und G, so kann nach Kirchhoff's Darstellung gesetzt werden:

$$F = G + \sum_{i,k} 2a_{i_k} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right\},$$

wo x_i und x_k jede der drei Grössen (x, y, z) und die Functionen (φ, ψ) je zwei von einander verschiedene Vorrückungscomponenten bedeuten. Die rechten Seiten der gesuchten Differentialgleichungen erhält man nun durch Variation der über den ganzen Raum des elastischen Mediums erstreckten Integrale:

$$\int\int\int F dx dy dz \text{ und } \int\int\int G dx dy dz.$$

Die oben unter dem Summenzeichen stehende Functionaldeterminante kann aber auch in der Form:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{x_k}\left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)$$

[1] Gesammelte Abhandlungen. S. 365.

dargestellt werden. Das Raumintegral $\int\int\int F dx dy dz$ ist also ausgedrückt durch eine Summe von der Form:

$$\int\int\int G dx dy dz + \sum \int\int\int \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\Phi \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}\right) dx dy dz.$$

Da eine Integration in jedem der Glieder der Summe Σ ausführbar ist, so stellt sich die Letztere als eine Summe von Oberflächenintegralen, welche für die Bildung der Differentialgleichungen im Innern des Krystalles belanglos sind, dar. Es liefert also thatsächlich die Variation von $\int\int\int F dx dy dz$ dieselben Glieder für die gesuchten Differentialgleichungen wie die von $\int\int\int G dx dy dz$.

In dem oben citirten Werke von Lamé bildet den Ausgangspunkt für die Herleitung der Differentialgleichungen die von Poisson zuerst gemachte Annahme, dass die sechs Druckcomponenten lineare Functionen der Dilatationen und Gleitungen mit je sechs von einander unabhängigen Coëfficienten seien, wodurch in die Rechnung 36 unabhängige Constanten eingeführt werden. Nun werden die Bedingungsgleichungen für die Möglichkeit der Fortpflanzung transversaler Wellen aufgestellt, wodurch sich die Anzahl der Constanten auf 12 reducirt. Bei dieser Rechnung nun scheint sich ein Resultat herauszustellen, das mit der Erfahrung im Widerspruche steht. Es scheint sich nämlich die Folgerung zu ergeben, dass den ebenen Wellen, die sich durch das Medium fortpflanzen, im Allgemeinen nur eine ganz bestimmte Polarisationsrichtung entspricht. In den „Vorlesungen über die Theorie der Elasticität", gehalten von F. Neumann, herausgegeben von O. E. Meyer, in welchen die Analyse von Lamé reproducirt wird, ist an die Auseinandersetzung dieses der Erfahrung scheinbar widersprechenden Rechnungsergebnisses[1] die Bemerkung geknüpft: „Um eine Anschauung zu gewinnen, vergleichen wir dieses Verhalten mit der Eigenschaft des Turmalins, dass eine parallel der Axe geschnittene Platte von gewisser Dicke ebene Lichtwellen nur dann durchlässt, wenn dieselben senkrecht zur Axe polarisirt sind.[2] Dieses Verhalten

---

[1] S. 259.

[2] Bei Lamé heisst es: „De là résulte que l'onde plane donnée ne pourra propager, dans le milieu crystallisé, que des vibrations d'une seule

tritt erst ein, wenn die Platte eine gewisse Dicke erreicht hat. Das oben bezeichnete Medium müsste dieselbe Eigenschaft bei jeder beliebigen Dicke besitzen. Ein solches Medium kennen wir nicht, obwohl es nicht gerade unmöglich erscheint, dass ein solches existiren könnte. Es finden sich vielmehr bei allen bekannten Krystallen zwei mögliche Lagen der Polarisationsebene für jede Richtung der Wellenbewegung."

Es lässt sich jedoch zeigen, dass die auseinander gesetzte Schwierigkeit nicht besteht, wenn man annimmt, dass den inneren Kräften des betrachteten Mediums ein Potential zukommt.

Bei Annahme der Neumann'schen Bezeichnungsweise (a. a. O., S. 165) sind die Druckcomponenten ausgedrückt durch:

$$X_x = A \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial v}{\partial y} + C \frac{\partial w}{\partial z} + D\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \\ + E\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + F\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

für die analogen Grössen Y_y, Z_z sind die Coëfficienten der Dilatationen und Gleitungen, respective:

$$A', B', C', D', E', F'$$
$$A'', B'', C'', D'', E'', F''.$$

$$X_y = \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \delta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \\ + \vartheta\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right);$$

für die Grössen Y_z und Z_x sind die Elasticitätsconstanten, beziehungsweise:

$$\alpha', \beta', \gamma', \delta', \eta', \vartheta'$$
$$\alpha'', \beta'', \gamma'', \delta'', \eta'', \vartheta''.$$

Im Falle der Existenz eines Potentials bestehen aber die Beziehungen:

---

direction; c'est ce qui a lieu, comme on le sait, pour certaines tourmalines." A. a. O. S. 229 u. 230. Ähnlich drückt sich Resal (Traité de physique-mathématique I, S. 240 aus.

$$
\begin{array}{lll}
A' = B, & A'' = C, & B'' = C', \\
\alpha = D, & \alpha' = E, & \alpha'' = F, \\
\beta = D', & \beta' = E', & \beta'' = F', \\
\gamma = D'', & \gamma' = E'', & \gamma'' = F'', \\
\vartheta = \delta'', & \vartheta' = \eta'', & \eta = \delta'.
\end{array}
$$

Wir suchen nun die Bedingungen für die Existenz einer longitudinalen Welle auf. Sind p, q, r die Cos. der Winkel, welche die Wellennormale mit den Coordinatenaxen einschliesst und setzt man:

$$s = px + qy + rz,$$

so seien die Componenten der Vorrückung dargestellt durch die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
u &= M\varphi(s - \omega t) \\
v &= N\varphi(s - \omega t) \\
w &= P\varphi(s - \omega t),
\end{aligned}
$$

wo φ eine willkürliche Function und ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Welle bedeutet. Offenbar ist nun:

$$\frac{M}{p} = \frac{N}{q} = \frac{P}{r}.$$

Unter Berücksichtigung dieser Doppelgleichung erhält man nun drei Gleichungen, von welchen nur ein Repräsentant hingeschrieben werden möge:

$$
\left.
\begin{aligned}
p\omega^2 = (\mathfrak{A}p + \mathfrak{a}q + \mathfrak{a}''r)p \\
+ (\mathfrak{B}p + \mathfrak{b}q + \mathfrak{b}''r)q \\
+ (\mathfrak{C}p + \mathfrak{c}q + \mathfrak{c}''r)r,
\end{aligned}
\right\} \qquad 1)
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
\begin{array}{ll}
\mathfrak{A} = pA + qD + rF & \mathfrak{a} = p\alpha + q\delta + r\vartheta \\
\mathfrak{B} = pD + qB + rE & \mathfrak{b} = p\delta + q\beta + r\eta \\
\mathfrak{C} = pF + qE + rC & \mathfrak{c} = p\vartheta + q\eta + r\gamma \\
\mathfrak{A}' = pA' + qD' + rF' & \mathfrak{a}' = p\alpha' + q\delta' + r\vartheta' \\
\text{u. s. w.} & \text{u. s. w.}
\end{array}
$$

Unter Berücksichtigung der oben aufgestellten Relationen zwischen den Elasticitätscoëfficienten erhält man aber:

$$\mathfrak{B}p+\mathfrak{b}q+\mathfrak{b}''r = \mathfrak{a}p+\mathfrak{A}'q+\mathfrak{a}'r$$
$$\mathfrak{C}p+\mathfrak{c}q+\mathfrak{c}''r = \mathfrak{a}''p+\mathfrak{a}'q+\mathfrak{A}''r.$$

Dadurch übergeht die Gleichung 1) in:

$$\begin{aligned} p\omega^2 &= (\mathfrak{A}p+\mathfrak{a}q+\mathfrak{a}''r)p \\ &+ (\mathfrak{a}p+\mathfrak{A}'q+\mathfrak{a}'r)q \\ &+ (\mathfrak{a}''p+\mathfrak{a}'q+\mathfrak{A}''r)r \\ &= \mathfrak{A}p^2+\mathfrak{A}'q^2+\mathfrak{A}''.r^2+2\mathfrak{a}pq+2\mathfrak{a}'qr+2\mathfrak{a}''rp. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber a. a. O. (S. 259, Gleichung 6) mit A bezeichnet. Man erhält also schliesslich:

$$\frac{A}{p} = \omega^2.$$

Ist ferner:

$$B = \mathfrak{B}p^2+\mathfrak{B}'q^2+\mathfrak{B}''r^2+2\mathfrak{b}pq+2\mathfrak{b}'qr+2\mathfrak{b}''rp$$
$$\Gamma = \mathfrak{C}p^2+\mathfrak{C}'q^2+\mathfrak{C}''r^2+2\mathfrak{c}pq+2\mathfrak{c}'qr+2\mathfrak{c}''rp,$$

so beweist man analog die Gleichungen:

$$\frac{B}{q} = \omega^2, \quad \frac{\Gamma}{r} = \omega^2,$$

woraus folgt:

$$\frac{A}{p} = \frac{B}{q} = \frac{\Gamma}{r};$$

dies sind aber genau dieselben Gleichungen, welche Lamé und Neumann annehmen und der weiteren Rechnung zu Grunde legen, um nicht ein mit der Erfahrung im Widerspruche stehendes Resultat zu erhalten.

Umgekehrt ist also die Thatsache, dass es für jede Fortpflanzungsrichtung ebener Wellen zwei Lagen der Polarisationsebene gibt, ein Beweis dafür, dass den durch die Änderung der relativen Lage der Äthertheilchen geweckten Elasticitätskräften ein Potential entspricht, wodurch der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft in eine merkwürdige Beziehung zu dem Polarisationszustande fortgepflanzter ebener Wellen gebracht ist.

Die so auf verschiedene Weise herzuleitenden, in ihrer einfachsten Form von Mac-Cullagh zuerst aufgestellten Differentialgleichungen sind nun:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial y} - b^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial z} - c^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} \qquad 2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial x} - a^2 \frac{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)}{\partial y}$$

$$o = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

hierin bedeuten u, v, w zur Zeit t die Componenten der Verrückung des Punktes (x, y, z).

Bildet man den symmetrisch gebauten Ausdruck:

$$\sigma = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial z},$$

so kann man für denselben folgende bemerkenswerthe partielle Differentialgleichung herleiten:

$$o = \frac{\partial^4 \sigma}{\partial t^4} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{(b^2+c^2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x} + (c^2+a^2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + (a^2+b^2)\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\}$$

$$+ \Delta \left\{b^2 c^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + c^2 a^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + a^2 b^3 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\}, \qquad 3)$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist.

Diese Gleichung wird befriedigt durch eine particuläre Lösung von der Form:

$$\sigma = f(px + qy + rz \pm \omega t),$$

wo f eine willkürliche Function ihres Argumentes ist, p, q, r Constanten bedeuten, welche der Bedingung:

$$p^2+q^2+r^2 = 1$$

genügen und ω eine Wurzel der Gleichung

$$o = \omega^4-\omega^2\{(b^2+c^2)p^2+(c^2+a^2)q^2+(a^2+b^2)r^2\} \\ +b^2c^2p^2+c^2a^2q^2+a^2b^2r^2 \qquad 3a)$$

ist. Bezeichnet man mit ω, p, q, r, beziehungsweise die Operationssymbole $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$, angewandt auf die Function σ, so ist die Gleichung $3a$) offenbar eine symbolische Darstellung der Differentialgleichung 4. Ordnung 3). Führt man nun in die Gleichungen 2) drei neue Functionen F, G, H mittelst der Substitutionen ein:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial z} \\ w &= \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad 4a)$$

und setzt zur Abkürzung:

$$Q = \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z},$$

so werden dieselben befriedigt, wenn man setzt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= a^2(\Delta F-\frac{\partial Q}{\partial x}) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} &= b^2(\Delta G-\frac{\partial Q}{\partial y}) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= c^2(\Delta H-\frac{\partial Q}{\partial z}) \end{aligned}\right\}. \qquad 4b)$$

Aus $4b$) folgt:

$$\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial H}{\partial z} = A+B.t,$$

wo A und B Functionen von x, y, z allein sind. Auf Gleichungen von der Form 4b) führt bekanntlich, u. zw. direct, auch die elektromagnetische Theorie des Lichtes, indem man die Fortpflanzung periodischer Störungen in einem anisotropen Diëlektricum mit drei zu einander senkrechten Richtungen, in welchen allein die elektrische Verschiebung in der Richtung der elektromotorischen Kraft vor sich geht, der Betrachtung unterwirft.[1]

Wenn das Medium einaxig ist, so dass z. B.

$$b = c$$

wird, nehmen die Gleichungen 2) mit Rücksicht auf die vierte von ihnen die Form an:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \Delta u \qquad 5a)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \Delta v + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \Delta w - (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right). \end{aligned}\right\} \qquad 5b)$$

Setzt man zur Abkürzung:

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},$$

so erhält man aus 5b) mit Leichtigkeit:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) \qquad 5c)$$

Um zu zeigen, dass in diesem Falle die Gleichung 3) befriedigt wird, beachte man, dass die Verbindung:

$$\eta = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

ebenfalls der Gleichung 5a) genügt. Bedient man sich nun des Operationssymbols:

---

[1] Man vergl. z. B. Maxwell, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, übers. von Weinstein, Bd. II, S. 549 ff.; oder L'Électricité et le magnétisme par Mascart et Joubert. Tome I, p. 698.

$$\nabla = b^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

so kann der Gleichung 3) die Form ertheilt werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - b^2 \Delta \eta \right) - \nabla \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - b^2 \Delta \eta \right) = 0,$$

welche von selbst erfüllt ist. Die Gleichungen 5*a*) und 5*c*), in welchen die Variablen gesondert erscheinen, entsprechen beziehungsweise der ordinären und extraordinären Welle. Denkt man sich von einem Erregungscentrum ausgehende fortschreitende Wellen, so erhält man das Integral von 5*c*) in der Form:

$$\xi = \frac{f(t \pm \lambda)}{\lambda},$$

wo

$$\lambda^2 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2}$$

ist. Bei Annahme ebener Wellen integrirt man das Gleichungssystem 5*a*) und 5*b*) durch den Ansatz:

$$u = u_0 + u_\varepsilon, \qquad v = v_0 + v_\varepsilon, \qquad w = w_0 + w_\varepsilon$$

$$u_0 = f_0 \left(t \pm \frac{s}{b} \right)$$

$$v_0 = -\frac{pq}{q^2 + r^2} f_0 \left(t \pm \frac{s}{b} \right)$$

$$w_0 = -\frac{pr}{q^2 + r^2} f_0 \left(t \pm \frac{s}{b} \right);$$

$$u_\varepsilon = 0$$

$$v_\varepsilon = f_\varepsilon \left(t \pm \frac{s}{\omega} \right)$$

$$w_\varepsilon = -\frac{q}{r} f_\varepsilon \left(t \pm \frac{s}{\omega} \right);$$

hierin ist, wenn mit p, q, r die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die Coordinatenaxen bezeichnet werden,

$$s = px + qy + rz$$

und

$$\omega^2 = b^2p^2 + a^2(q^2 + r^2),$$

während f_0 und f_ϵ willkürliche Functionen bedeuten. Der particulären Lösung (u_0, v_0, w_0) entspricht offenbar die ordinäre Welle mit der constanten Fortpflanzungsgeschwindigkeit b; ihre Schwingungen erfolgen im Hauptschnitt. Der particulären Lösung $(u_\epsilon, v_\epsilon, w_\epsilon)$ entspricht die extraordinäre Welle, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω ist; ihre Schwingungen erfolgen offenbar senkrecht zum Hauptschnitt. Wegen des Doppelzeichens in den beiden particulären Lösungen kann jede von ihnen zwei willkürliche Functionen, die allgemeine also deren vier enthalten.

Was die Integration der Differentialgleichungen für ein zweiaxiges Medium betrifft, so wird dieselbe am einfachsten, wenn man ebene Wellen als eine mögliche Ätherbewegung betrachtet. Die allgemeine Lösung enthält vier willkürliche Functionen, entsprechend den vier Wurzeln der Gleichung 3a), welche in diesem Falle als verschwindende Determinante eines Systems von drei linearen Gleichungen erscheint. Viel schwieriger wird das Problem, wenn man die Möglichkeit fortschreitender Wellen, welche von einem Erregungscentrum continuirlich nach allen Richtungen hin ausgesendet werden, untersucht. Die Lösung desselben verdankt man Lamé, welcher in der 22. und 23. Vorlesung seines bereits citirten Werkes die diesbezügliche Rechnung durchführte. Bei beiden Arten von Lösungen, welchen gemeinsam die Annahme von permanent ausgestrahltem Lichte zu Grunde liegt, ist der Polarisationszustand des betrachteten Mediums und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und im letzteren Falle ausserdem noch die Intensität des Lichtes durch Rechnung darzustellen. Als allgemein ist eine Lösung zu bezeichnen, wenn sie die mit der Art der Erregung und der Natur und Anzahl der fortgepflanzten Wellen verträgliche Anzahl willkürlicher Functionen enthält; in den oben gedachten Fällen ist dieselbe mit Rücksicht auf das Verschwinden der Volumendilatation gleich vier. Da Lamé nur particuläre Lösungen betrachtet, so möge für den Fall, wo fortschreitende Wellen von einem Erregungscentrum in stetiger Folge ausgehen, die allgemeine Lösung angegeben werden.

Bezeichnet man mit λ_1 und λ_2 die positiven Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{a^2x^2}{a^2\lambda^2-(x^2+y^2+z^2)}+\frac{b^2q^2}{b^2\lambda^2-(x^2+y^2+z^2)}+\frac{c^2z^2}{c^2\lambda^2-(x^2+y^2+z^2)}=0,$$

ferner mit f_1, F_1, f_2, F_2 willkürliche Functionen ihrer Argumente, so ist:

$$\begin{aligned}
u &= X_1\{f_1(t-\lambda_1)+F_1(t+\lambda_1)\}+X_2\{f_2(t-\lambda_2)+F_2(t+\lambda_2)\}\\
v &= Y_1\{f_1(t-\lambda_1)+F_1(t+\lambda_1)\}+Y_2\{f_2(t-\lambda_2)+F_1(t+\lambda_2)\}\\
w &= Z_1\{f_1(t-\lambda_1)+F_1(t+\lambda_1)\}+Z_2\{f_2(t-\lambda_2)+F_2(t+\lambda_2)\}.
\end{aligned}$$

Die Grössen X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2 sind dieselben, welche bei Lamé a. a. O. vorkommen und daselbst nachgesehen werden müssen. Die hiefür berechneten Ausdrücke haben für alle Punkte des Raumes bestimmte endliche Werthe mit Ausnahme des Erregungscentrums und der auf den Strahlenaxen gelegenen Punkte. In diesen erscheinen die Grössen X, Y, Z unter der Form $\frac{0}{0}$ und bleiben unbestimmt. In Folge dessen hielt sich Frau v. Kowalevski zum Schlusse berechtigt, dass die Lamé'schen Lösungen eine physikalisch unmögliche Bewegung darstellen.[1] Da dieser Behauptung meines Wissens bisher noch nie[2] widersprochen wurde, kann ich nicht umhin, dieselbe als nicht gerechtfertigt zu bezeichnen. Zunächst will ich bemerken, dass auch bei jenen Lösungen, welche ebene Wellen repräsentiren, eine analoge Unbestimmtheit für die Punkte der optischen Axen[3] eintritt. Also jenen Lösungen, welchen die Eigenschaft zukommt, den Polarisationszustand des krystallinischen Mediums zu „beschreiben", müssen eben desshalb entweder für die Punkte der optischen Axen oder der Strahlenaxen, je nachdem die Wellennormale oder der Strahl als gegebenes Element aufgefasst wird, bezüglich der Richtungscosinus der Verschiebung unbestimmt werden. Die etwa noch obwaltende

---

[1] Acta math., Bd. VI, S. 253.

[2] Man vergl. z. B. die bezüglichen Referate in den Beibl. zu Wied. Ann., Bd. VIII und IX, oder im Jahrbuche über die Fortschritte der Math. Bd. XVII.

[3] Lamé, Elasticité. S. 241, Gleichungen 6).

Schwierigkeit verschwindet, wenn man sich vergegenwärtigt, dass die Wellenfläche in der Umgebung des singulären Punktes sich wie eine Kegelfläche verhält; die Schwingungen erfolgen daselbst parallel zur Tangentialebene des Kegels und senkrecht zum Strahle, welcher zum betrachteten Punkte gezogen werden kann. Da nun an der Spitze des Kegels die Lage der Tangentialebene völlig unbestimmt ist, so ist dies auch bezüglich der Schwingungsrichtung der Fall Dass die in solcher Weise aus den Lösungen hergeleitete Unbestimmtheit mit der Erfahrung im Einklange steht, dafür bildet die Gesammtheit der Erscheinungen der äusseren conischen Refraction, einschliesslich der hiebei auftretenden Polarisationsverhältnisse, den eclatantesten Beweis. Umgekehrt wäre es unmöglich, mittelst einer Lösung, welche für alle Punkte des Raumes den thatsächlich beobachteten Polarisationszustand darzustellen geeignet wäre, aber für die singulären Punkte bestimmte Werthe von X, Y, Z ergeben würde, solche Ätherbewegungen darzustellen, aus welchen die Erscheinungen der äusseren conischen Refraction gefolgert werden könnten.

Man erhält Lösungen von wesentlich anderem Charakter als dem der bisher betrachteten, wenn man den Verlauf einer Gleichgewichtsstörung, welche zu einer bestimmten Zeit in den verschiedenen Punkten des als unbegrenzt gedachten elastischen Mediums erregt wird, der Betrachtung unterwirft.

Für den allgemeinsten Fall der Anisotropie mit 36 Elasticitätscoëfficienten hat zuerst Blanchet[1] nach einer für specielle Fälle vorher schon von Cauchy und Poisson gelehrten Methode, nämlich unter Anwendung Fourier'scher Integrale, deren Angebbarkeit jedoch durch Nichts bewiesen wurde, die Differentialgleichungen so integrirt, dass für den Initialzustand die Verschiebungs- und Geschwindigkeitscomponenten gegebene Functionen des Ortes werden. Für die speciellen Mac Cullagh'schen Gleichungen hat Frau v. Kowalevski[2] die entsprechende Integration nach einer für isotrope Medien von Herrn Weierstrass ausgearbeiteten Methode in strenger und eleganter Weise durchgeführt. Die letztgenannten Lösungen enthalten vier willkürliche

[1] Liouville's Journal, V, 1840.

[2] A. a. O.

Functionen sind also für diesen Fall der Erregung als die allgemeinen zu bezeichnen. Da der Begriff der optischen Axe sich nur auf eine bestimmte Richtung im Krystalle bezieht und der der Strahlenaxe nur ein Erregungscentrum voraussetzt, so ist ohne weiters klar, dass in diesem Falle eine Unbestimmtheit der früher bezeichneten Art nicht eintreten kann.

Für den Physiker ist es aber von grösster Wichtigkeit, den erfahrungsgemäss festgestellten Polarisationszustand, welcher sich bei stetig ausgestrahltem Lichte dauernd herstellt, darzustellen. Da in dem oben zuletzt betrachteten Falle die Bedingungen des Problems andere sind und da ausserdem hiebei eine einfache Beschreibung des Polarisationszustandes eine Unmöglichkeit zu sein scheint, so sind die diesbezüglichen Lösungen fast nur vom Standpunkte des Mathematikers aus von Wichtigkeit.

Das Problem, zu dessen Behandlung ich mich nun wende, lässt in seiner Allgemeinheit eine physikalische Deutung zwar nicht zu, dürfte aber in mathematischer Hinsicht nicht ohne Interesse sein. Es handelt sich nämlich darum, die Gleichungen von Mac-Cullagh für n Variable so zu verallgemeinern, dass man für $n = 3$ die im Vorhergehenden behandelten Gleichungen erhält. Es seien $(u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)$ die durch das System simultaner partieller Differentialgleichungen definirten Functionen, $(t, x_1, \ldots\ldots\ldots x_n)$ die unabhängigen Variablen, $c_{1,2} = c_{2,1}$, $c_{1,3} = c_{3,1}, \ldots\ldots c_{n-1,n} = c_{n,n-1}$ constante Grössen und endlich sei zur Abkürzung gesetzt:

$$\xi_{r,s} = -\xi_{s,r} = \frac{\partial u_r}{\partial x_s} - \frac{\partial u_s}{\partial x_r} \qquad \begin{cases} r = 1, \ldots\ldots, n \\ s = 1, \ldots\ldots, n, \end{cases}$$

so hat man die gesuchte Verallgemeinerung in dem Systeme:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \sum_1^n c_{1,r} \cdot \frac{\partial \xi_{1,r}}{\partial x_r} \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= \sum_1^n c_{2,r} \cdot \frac{\partial \xi_{2,r}}{\partial x_r} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} &= \sum_1^n c_{n,r} \cdot \frac{\partial \xi_{n,r}}{\partial x_r}, \end{aligned}\right\} \qquad A)$$

welches an die Bedingung:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots\ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} = 0 \qquad B)$$

geknüpft sei. Da $\xi_{r,r}$ identisch verschwindet, so fallen die Glieder, welche $c_{1,1} \ldots\ldots\ldots c_{n,n}$ enthalten, von selbst aus der Rechnung; man setze daher:

$$c_{1,1} = c_{2,2} = \qquad\qquad = c_{n,n} = 0,$$

Eine particuläre Lösung sei nun von der Form:

$$u_1 = M_1 f(t-\lambda),\ u_2 = M_2 f(t-\lambda), \ldots\ldots u_n = M_n f(t-\lambda),$$

wobei zur Abkürzung:

$$\lambda = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots\ldots m_n x_n}{v}$$

gesetzt wurde; $m_1, \ldots . m_n, v, M_1, \ldots . M_n$ sind Constanten, welche den Bedingungen:

$$m_1^2 + m_2^2 + \ldots . + m_n^2 = 1, \qquad M_1^2 + M_2^2 + \ldots . + M_n^2 = 1$$

genügen, und f eine willkürliche Function. Aus B) ergibt sich:

$$m_1 M_1 + m_2 M_2 + \ldots . + m_n M_n = 0 \qquad C)$$

und aus A):

$$\left.\begin{array}{l}
M_1 \left\{ -\sum\limits_1^n c_{1,r} m_r^2 + v^2 \right\} + M_2 . c_{1,2} . m_1 m_2 + \ldots . + M_n . c_{1,n} . m_1 m_n = 0 \\
M_1 . c_{2,1} . m_2 m_1 + \left\{ -\sum\limits_1^n c_{2,r} . m_r^2 + v^2 \right\} + \ldots . + M_n c_{2,n} m_2 m_n = 0 \\
\vdots \\
M_1 . c_{n,1} . m_n m_1 + M_2 c_{n,2} m_n m_2 + \ldots . + M_n \left\{ -\sum\limits_1^n c_{n,r} m_r^2 + v^2 \right\} = 0.
\end{array}\right\} \quad D)$$

Die Grösse v ist also eine Wurzel der Gleichung:

$$\left.\begin{vmatrix}
v^2 - \Sigma c_{1,r} . m_r^2, & c_{1,2} m_1 m_2 \ldots . c_{1,n} m_1 m_n \\
c_{2,1} . m_2 m_1, & v^2 - \Sigma c_{2,r} m_r^2 \ldots . c_{2,n} m_2 m_n \\
\vdots & \\
c_{n,1} m_n m_1, & c_{n,2} . m_n . m_2 \ldots v^2 - \Sigma c_{n,r} . m_r^2
\end{vmatrix} = 0 \right\} \quad E)$$

Diese Gleichung ist ein specieller Fall derjenigen, auf welche man bei der Transformation einer quadratischen Form mittelst

einer orthogonalen Substitution in eine Summe von Quadraten stösst. Jacobi[1] hat bekanntlich einige specielle Fälle angegeben, in welchen dieser charakteristischen Gleichung eine wesentlich vereinfachte Form ertheilt werden kann. Etwas Ähnliches findet auch hier statt, wenn man an Stelle der $\frac{n(n-1)}{2}$ Constanten:

$$c_{1,2},\ c_{1,3},\ldots\ldots c_{n-1,n}$$

deren nur n mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} c_{1,2} &= c_1 . c_2 \\ c_{1,3} &= c_1 . c_3 \\ &\vdots \\ c_{n-1,n} &= c_{n-1} . c_n \end{aligned}$$

einführt. Dann nehmen nämlich die Gleichungen D) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m_1 c_1}{\sum\limits_1^n c_1 c_r m_r^2 - v^2} &= \frac{M_1}{c_1 m_1 M_1 + c_2 m_2 M_2 + \ldots + c_n m_n M_n} \\ \frac{m_n c_n}{\sum\limits_1^n c_n c_r m_r^2 - v^2} &= \frac{M_n}{c_1 m_1 M_1 + c_2 m_2 M_2 + \ldots + c_n m_n M_n} \end{aligned}\right\} F)$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$k = \sum_1^n c_r m_r^2,$$

multiplicirt die Gleichungen F) nacheinander, respective mit den Factoren $c_1 m_1,\ c_2 m_2,\ldots\ldots c_n m_n$ und addirt sie sodann zu einander, so ergibt sich:

$$\frac{c_1^2 m_1^2}{c_1 k - v^2} + \frac{c_2^2 m_2^2}{c_2 k - v^2} + \ldots + \frac{c_n m_n^2}{c_n k - v^2} - 1 = 0. \qquad G)$$

Zunächst ist leicht einzusehen, dass diese Gleichung die Wurzel:

[1] Gesammelte Werke, Bd. III. De binis quibuslibet etc., art. 12—16.

$$v = 0$$

hat, welche für uns (wegen $\lambda = \infty$) bedeutungslos ist. Nimmt man an, dass die Grössen $c_1, c_2, \ldots . c$ alle positiv und ihrer Grösse nach geordnet seien, so kann man durch ein von Jacobi[1] angewandtes Schlussverfahren beweisen, dass die übrigen Wurzeln alle reell und zwischen den Grenzen:

$$c_1 k > v_1^2 > c_2 k > v_2^2 > \ldots . > v_{n-1}^2 > c_n k$$

gelegen sind. Zieht man von der Gleichung G) die Identität:

$$\frac{c_1 m_1^2}{k} + \ldots . + \frac{c_n m_n^2}{k} - 1 = 0$$

ab, so erhält man durch Ausscheidung der schon bekannten Wurzel $v = 0$ die Gleichung:

$$\frac{c_1 m_1^2}{c_1 k - v^2} + \frac{c_2 m_2^2}{c_2 k - v^2} + \ldots . + \frac{c_n . m_n^2}{c_n k - v^2} = 0, \qquad H)$$

welche in Bezug auf v^2 nur mehr vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist. Diese Gleichung hätte man aus F) unter Berücksichtigung von C) auch direct erhalten können, wenn man jene Gleichungen nach einander mit $m_1, m_2, \ldots . m_n$ multiplicirt und zu einander addirt hätte.

Setzt man für $n = 3$:

$$c_2 c_3 = a^2, \quad c_3 c_1 = b^2, \quad c_1 c_2 = c^2$$
$$m_1 = p \qquad m_2 = q \qquad m_3 = r,$$

so übergeht die Gleichung H) in:

$$\frac{p^2}{E - a^2 v^2} + \frac{q^2}{E - b^2 v^2} + \frac{r^2}{E - c^2 v^2} = 0,$$

wo gesetzt ist:

$$E = b^2 c^2 p^2 + c^2 a^2 q^2 + a^2 b^2 r^2.$$

Obige Gleichung ist äquivalent mit der Fresnel'schen:

$$\frac{p^2}{a^2 - v^2} + \frac{q^2}{b^2 - v^2} + \frac{r^2}{c^2 - v^2} = 0.$$

---

[1] A. a. O. S. 219.

Es scheint eine specielle Eigenschaft des dreidimensionalen Raumes zu sein, dass die charakteristische Gleichung H) sich in der angegebenen Doppelform darstellen lässt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$c_1 m_1 M_1 + c_2 m_2 M_2 + \ldots . + c_n m_n M_n = N,$$

so erhält man aus F), wenn man alle Gleichungen quadrirt und zu einander addirt:

$$\frac{1}{N^2} = \frac{c_1^2 m_1^2}{(c_1 k - v^2)^2} + \ldots . + \frac{c_n^2 m_n^2}{(c_n k - v^2)^2}. \qquad J)$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= N. \frac{m_1 c_1}{c_1 k - v^2} \\ &\vdots \\ M_n &= N. \frac{m_n c_n}{c_n k - v^2}. \end{aligned}\right\} \qquad J')$$

Durch die Gleichungen J) und J') ist die Aufgabe gelöst, die Grössen $M_1 \ldots . . M_n$ als Functionen der gegebenen Werthe von $m_1, \ldots . m_n$ auszudrücken.

Bezieht man das Gleichungssystem J') auf zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung in v^2, welche durch die Indices r und s von einander unterschieden werden mögen, so ist:

$$M_i^{(r)} = N^{(r)} \cdot \frac{m_i c_i}{c_i k - v_r^2}$$

$$M_i^{(s)} = N^{(s)} \frac{m_i c_i}{c_i k - v_s^2}.$$

Es wird daher:

$$M_1^{(r)} . M_1^{(s)} + M_2^{(r)} . M_2^{(s)} + \ldots . + M_n^{(r)} . M_n^{(s)} =$$
$$= \frac{c_1^2 m_1^2}{(c_1 k - v_r^2)(c_1 k - v_s^2)} + \ldots . + \frac{c_n^2 m_n^2}{(c_n k - v_r^2)(c_n k - v_s^2)}.$$

Bezieht man aber die Gleichung G) auf zwei von einander verschiedene Werthe von v^2 und zieht die bezüglichen Gleichungen von einander ab, so erhält man:

$$\frac{c_1^2 m_1^2}{(c_1 k - v_r^2)(c_1 k - v_s^2)} + \ldots . + \frac{c_n^2 m_n^2}{(c_n k - v_r^2)(c_n k - v_s^2)} = 0$$
$$v_r \gtrless v_s.$$

Somit ergibt sich:

$$M_1^{(r)} M_1^{(s)} + M_2^{(r)} M_2^{(s)} + \ldots + M_n^{(r)} M_n^{(s)} = 0 \qquad K)$$
$$r \gtrless s.$$

Entsprechend den $(n-1)$ verschiedenen Werthen der Grösse v^2 erhält man nach J' auch $(n-1)$-Werthesysteme der Grössen $M_1 \ldots M_n$. Die allgemeine Lösung ist also dargestellt durch das Gleichungssystem:

$$u_s = \sum_{i=1}^{i=n-1} M_s^{(i)} \{f^{(i)}(t-\lambda^{(i)}) + F^{(i)}(t+\lambda^{(i)})\} \qquad L)$$
$$s = 1, 2, \ldots n;$$

hierin bedeuten $f^{(1)}, F^{(1)}, \ldots f^{(n-1)}, F^{(n-1)}$ willkürliche Functionen.

Wenn zwei Wurzeln v_r und v_s der Gleichung H) einander gleich werden sollen, so kann dies nur dann der Fall sein, wenn r und s zwei aufeinander folgende Zahlen sind, also etwa:

$$r = s-1,$$

das heisst:

$$v_{s-1} = v_s = c_s . k$$

ist. Nach F) ist dann:

$$m_s = 0,$$

während

$$m_1^2 + \ldots + m_{s-1}^2 + m_{s+1}^2 + \ldots + m_n^2 = 1$$

ist. Dann sind die Grössen $N^{(s-1)}$ u. $N^{(s)}$ und in Folge dessen auch die Werthe von $M_1^{(s-1)} \ldots M_n^{(s-1)}$ und $M_1^{(s)} \ldots M_n^{(s)}$ unbestimmt; dies hat aber auch eine Unbestimmtheit des Werthsystems u_1, $u_2, \ldots u_n$ zur Folge.

Nimmt man den Parameter λ nicht als lineare Function der Variablen $x_1, \ldots, x_n$, sondern betrachtet denselben in ähnlicher Art gebildet, wie dies für den Fall $n=3$ geschehen ist, um fortschreitende Wellen, die von einem Centrum ausgehen, darzustellen, so würde die Rechnung viel verwickelter und würde die aufgewendete Mühe vielleicht in keinem Verhältnisse zum Werthe des erhaltenen Resultates stehen.

Über die zur Ausführung geometrischer Constructionsaufgaben zweiten Grades nothwendigen Hilfsmittel

von

August Adler,

Supplent an der k. k. Staats-Oberrealschule in Klagenfurt.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 9. October 1890.)

Man sagt gewöhnlich, eine geometrische Aufgabe sei constructiv strenge lösbar, wenn zu ihrer Lösung nur das Schlagen von Kreisbögen und das Ziehen von Geraden nothwendig ist, und wenn bei Voraussetzung vollkommener Hilfsmittel die Lösung vollkommen genau erhalten wird; derlei geometrische Aufgaben nennt man auch „geometrische Constructionsaufgaben zweiten Grades".

Nun lehrte bekanntlich L. Mascheroni in seinem berühmten Werke: „La geometria del compasso", Pavia 1797,[1] dass alle diese Constructionsaufgaben (zweiten Grades) nur mit Hilfe des Zirkels allein aufgelöst werden können, dass es also z. B. möglich sei, einen gegebenen Kreis nur mit Hilfe des Zirkels allein in fünf gleiche Theile zu theilen.

Bald darauf zeigte J. Steiner[2] in seinem berühmten Werke: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst

---

[1] Aus dem Französischen ins Deutsche übersetzt von J. P. Gruson unter dem Titel. „L. Mascheroni's Gebrauch des Zirkels", Berlin 1825.

[2] Bemerkt muss werden, dass sehr viele der Constructionen, welche Steiner in obigem Werke lehrt, schon von Lambert in seinem Werke: „Freie Perspective", Zürich 1774 (II. Theil, von S. 161 angefangen), angegeben wurden.

Die Möglichkeit, alle geometrischen Constructionsaufgaben zweiten Grades mit Hilfe der geraden Linie und eines festen Kreises zu lösen, wurde

der geraden Linie und eines festen Kreises", Berlin (1833), dass alle in Rede stehenden Constructionsaufgaben durch blosses Ziehen von geraden Linien gelöst werden können, sobald nur in der Zeichenebene ein einziger Kreis sammt Mittelpunkt zur Benützung gezeichnet vorliegt.[1]

Mascheroni zeigte also, dass man mit dem Zirkel allein (ohne irgend ein anderes Hilfsmittel) alle geometrischen Constructionsaufgaben zweiten Grades durchführen kann, und Steiner, dass man mit der geraden Linie allein dasselbe erreicht, sobald ein gezeichneter Kreis zur Benützung vorliegt.

Ausser dem Zirkel, den Mascheroni allein benützt, sind noch folgende Instrumente ständige Hilfsmittel eines jeden Zeichners:

α) Das Lineal (zwei parallele Linien in constantem Abstande),

β) der rechte Winkel (etwa aus Holz),

γ) der spitze Winkel (etwa ebenfalls aus Holz).

Es liegt nun der Gedanke nahe, zu untersuchen, ob sich nicht mit einem der drei Instrumente α, β oder γ allein, alle geometrischen Constructionsaufgaben zweiten Grades ausführen lassen, analog wie dies für den Zirkel von Mascheroni gezeigt wurde.

Der Ausführung dieses Gedankens ist die vorliegende Arbeit gewidmet. Es ergibt sich hiebei als Resultat, dass mit jedem der drei obigen Zeichenhilfsmitteln α, β oder γ allein jede geometrische Constructionsaufgabe gelöst werden kann, und dass die dabei auftretenden Constructionen durchwegs elementar, mitunter sogar sehr einfach sind.

Ja, am Schlusse unserer Arbeit soll darauf hingewiesen werden, dass der rechte Winkel eigentlich das mächtigste Constructionshilfsmittel ist, da man vermittelst mehrerer rechter Winkel (etwa aus Holz) selbst Aufgaben dritten und damit auch vierten Grades strenge und einfach lösen kann, Aufgaben also,

auch schon vor Steiner allgemein bewiesen, und zwar findet sich ein diesbezüglicher Beweis in Poncelet's „Propriétés etc.", Paris 1822, S. 187—190.

[1] Der wesentlichste Inhalt der obigen Werke von Mascheroni und Steiner ist in der trefflichen Schrift des Herrn Prof. Dr. J. Frischauf: „Die geometrischen Constructionen von L. Mascheroni und J. Steiner" (Graz 1869) dargestellt.

welche mittelst Zirkel und gerader Linie nur näherungsweise gelöst werden können.

1. So complicirt eine geometrische Construction, welche bei unbeschränkter Benützung der geraden Linie und des Zirkels durchgeführt wurde, auch immer sein möge, so lässt sie sich doch jederzeit auf die wiederholte Anwendung einiger weniger Aufgaben der einfachsten Art zurückführen, wie dies ja auch gar nicht anders sein kann:

Nimmt man nämlich ein Lineal (gerade Linie) zur Hand, so kann man mit ihm unmittelbar doch nur eine der folgenden Aufgaben ausführen: „1. Eine gerade Linie ziehen; 2. den Schnittpunkt einer zu zeichnenden geraden Linie mit einer schon gezeichneten bestimmen; 3. die gemeinsamen Punkte einer zu ziehenden Geraden mit einem schon gezeichneten Kreise aufsuchen".

Nimmt man den Zirkel zur Hand, so kann man mit demselben direct nur Eines von dem Folgenden thun: „4. Einen Kreisbogen beschreiben; 5. eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Geraden auftragen; 6. die Schnittpunkte eines zu zeichnenden Kreises mit einer vorliegenden Geraden bestimmen; 7. die Schnittpunkte eines zu zeichnenden Kreises mit einem schon gezeichneten aufsuchen".

2. Sind Gerade und Zirkel zur unbeschränkten Verfügung, so bietet die Ausführung dieser sieben Aufgaben keine Schwierigkeit, und die Schwierigkeit der geometrischen Auflösung eines Problems liegt nur darin, diese sieben Aufgaben passend zu combiniren.

3. Sind dagegen die Hilfsmittel beschränkt, so muss gezeigt werden, dass mittelst derselben sich die obigen sieben Aufgaben überhaupt lösen lassen.

Was unsere Hilfsmittel (das Lineal, der rechte oder spitze Winkel) anbelangt, so sind mit jedem derselben die Aufgaben 1, 2 und 3 ohneweiters durchführbar; Aufgabe 7 lässt sich auf 6 reduciren, wie später gezeigt werden soll, und Aufgaben 5 und 6 lassen sich in folgender vereinigen: [1]

---

[1] Aufgabe 4 lässt sich nur mit Hilfe eines Zirkels lösen; dagegen können auch mit unseren beschränkten Hilfsmitteln beliebig viele Punkte eines Kreises gefunden werden.

(*A*.) „Die Schnittpunkte eines Kreises von gegebenem Mittelpunkte mit einer gegebenen Geraden sind zu finden, wenn der Radius des Kreises durch irgend eine Strecke in der Ebene gegeben ist.“

4. Um zu beweisen, dass alle Constructionen mit einem unserer Hilfsmittel durchführbar seien, hat man daher nur zu zeigen, dass die obige einzige Aufgabe *A* mit eben diesem Hilfsmittel allein lösbar ist. Ist dies einmal geschehen, so könnte man jede beliebige Constructionsaufgabe mit einem unserer Hilfsmittel dadurch lösen, dass man Schritt für Schritt der Lösung folgt, welche man bei dieser Constructionsaufgabe bei uneingeschränktem Gebrauche des Zirkels und der geraden Linie einschlagen würde. Ein derartiger Vorgang wäre aber in vielen Fällen unvortheilhaft, da viele der einfachsten und am häufigst vorkommenden Constructionsaufgaben (sogenannte geometrische Elementaraufgaben) sich auf anderem Wege mit einem unserer vorgesetzten Hilfsmittel leichter lösen lassen.

5. Es ist daher passend (Steiner schlägt auch diesen Weg ein), sich zunächst mit der Auflösung dieser Elementaraufgaben zu befassen, umso mehr, als auf denselben die Lösung der Aufgabe *A* (mit unseren beschränkten Hilfsmitteln) beruht.

Diese Hilfsaufgaben sind nach Steiner („Gesammelte Werke“, I. Band, S. 464) folgende:

a) „parallele Gerade zu ziehen“;

b) „der Grösse nach gegebene Gerade beliebig zu vervielfachen oder in beliebig viele, gleiche Theile zu theilen“;

c) „zu einander recktwinklige Gerade zu ziehen“;

d) „durch einen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, die mit einer gegebenen Geraden einen Winkel einschliesst, welcher einem der Grösse und Lage nach gegebenen Winkel gleich ist“;

e) „einen Winkel zu hälften oder beliebig oft zu vervielfachen“;

f) „an einem gegebenen Punkte nach beliebiger Richtung eine Gerade anzulegen, welche einer der Grösse und Lage nach gegebenen Geraden gleich ist“.

Die Auflösung jeder dieser Aufgaben mit einem unserer Hilfsmittel wird nun in Folgendem gezeigt werden; daran schliesst sich die Hauptaufgabe *A* und die obenerwähnte Aufgabe 7.

6. Bevor wir aber darauf eingehen, müssen wir uns noch eine Bemerkung gestatten.

Schon oben wurde gesagt, was man unter einer strengen, constructiven Lösung einer geometrischen Aufgabe versteht; man sagt dagegen, eine Aufgabe sei näherungsweise gelöst, wenn selbst bei ideal vollkommenen Hilfsmitteln die Lösung der Aufgabe sich nicht mathematisch genau auf dem eingeschlagenen Wege ergibt, oder wenn die Lösung eine unbegrenzte Anzahl von Constructionen erfordern würde. Diese Bemerkungen sind für uns wichtig.

Zur Lösung der Aufgabe: „In einer Geraden G einen Punkt P so zu finden, dass von P aus eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ unter einem rechten Winkel erscheint" könnte man nämlich so vorgehen, dass man einen rechten Winkel durch A und B legt und so lange bewegt, bis gleichzeitig der Scheitel dieses Winkels in G zu liegen kommt. Trotzdem, dass man diese Aufgabe gewöhnlich auf anderem Wege löst, ist P auf diese Art keineswegs näherungsweise gefunden worden; denn P ergibt sich bei vollkommener Beschaffenheit des rechten Winkels mathematisch genau. Dass man einige Zeit lang den rechten Winkel verschieben muss, bis er in die gewünschte Lage kommt, macht die Construction keineswegs zu einer näherungsweisen; man muss ja auch beim Verbinden zweier Punkte durch eine gerade Linie das dazu verwendete Lineal einige Zeit lang verschieben, bis es in die brauchbare Lage kommt.

I. Die geometrischen Constructionen ausgeführt mit Hilfe eines geraden Lineals.

Wir müssen hier gemäss Obigem zeigen, wie mit Hilfe dieses geraden Lineals (zwei parallele Gerade in constantem Abstande a) allein die Aufgaben α bis f, A und 7 gelöst werden können.

Dabei benützen wir wiederholt einen Satz, den auch Steiner in obgenanntem Werke wiederholt anwendet; es ist dies folgender Satz: „Verbindet man in einem Trapez den Schnittpunkt der Diagonalen mit dem Schnittpunkte der beiden nicht parallelen Seiten desselben, so werden die parallelen Seiten des Trapezes durch diese Verbindungslinie halbirt; und umgekehrt."

Aufgabe a (Fig. 1). Ist durch P eine Parallele zu G zu ziehen, so ziehe man H parallel zu G und im Abstande a von G, wähle M und B willkürlich und bestimme P' auf eine Weise, welche aus der Figur wohl ersichtlich ist. PP' ist dann schon die gesuchte Parallele.

Aufgabe b. α) Um die Strecke $\overline{AB}$ (Fig. 2) z. B. zu verdreifachen, ziehe man H und H' parallel AB (Figur), wähle M willkürlich in H', erhalte so die Punkte a und b auf H; aus a und B ergibt sich nun der Punkt M' auf H' und mit Hilfe desselben der Punkt C auf der Verlängerung von $\overline{AB}$; daraus erhält man endlich die Punkte c und D. Es ist nun $\overline{AD} = 3 \times \overline{AB}$ (Steiner).[1]

β) Wie man eine Strecke halbirt mit Hilfe des Lineals allein, ergibt sich aus Fig. 1.

Um dagegen die Strecke $\overline{AB}$ (Fig. 3) z. B. in drei gleiche Theile zu zerlegen, trage man auf H parallel AB drei gleiche, aber sonst beliebig grosse Strecken hinter einander auf[2] und erhält so mit Hilfe des Punktes S die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe (Steiner).[1]

Die folgenden Aufgaben müssen wir in etwas geänderter Reihenfolge vorführen.

Aufgabe e. α) Um den Winkel MSN zu halbiren, ziehe man H und H' parallel zu den Schenkeln des Winkels und erhält damit die gesuchte Halbirungslinie, wie Fig. 4 zeigt.

β) Soll dagegen der Winkel MSN (Fig. 5) verdoppelt werden, so ziehe man zunächst H parallel SM, wodurch Punkt P erhalten wird, nun legt man das Lineal mit einer seiner Kanten durch S, dreht es so lange um S bis seine zweite Kante durch P

---

[1] Die zwei Constructionen, bei denen der „Steiner“ steht, finden sich schon in dem oben erwähnten Werke Steiner's angegeben; sie kommen übrigens auch schon in dem früheren Werke: J. H. Lambert, „Freie Perspective“, Bd. II, S. 161—181, Zürich 1774, vor.

[2] Indem man das unter α) Gesagte berücksichtigt. Im Folgenden kommt es oft vor, dass man bei der Lösung einer Aufgabe eine schon früher gezeigte Construction heranziehen muss; der specielle Hinweis auf die früher gelöste Constructionsaufgabe wurde der Kürze halber aber meist nicht gegeben.

geht und zieht nun SX, welches schon die gesuchte Linie darstellt; denn $SRPQ$ ist ein Rhombus.

Die hiebei verwendete Construction ist keineswegs eine näherungsweise.

Aufgabe *c*. Soll in P (Fig. 6) auf G eine Normale gefällt werden, so ziehe man zunächst H willkürlich durch P und hierauf H' und H'' parallel zu H (und im Abstande a von H); legt man nun das verwendete Lineal so, dass eine seiner Kanten durch P und die andere durch den Schnittpunkt A von H' und G geht, so erhält man Punkt B und daraus die gesuchte Senkrechte BP.

Liegt P nicht auf G, so ziehe man durch ihn eine Parallele zu G, wodurch die Aufgabe auf die soeben gelöste zurückgeführt ist.

Aufgabe *d*. Sind durch P (Fig. 7) gerade Linien PX und PY zu ziehen, welche mit L den Winkel $ASB = \alpha$ einschliessen, so gehe man bei Benützung unseres Lineals so vor: Man ziehe $SL' \parallel L$ und halbire den Winkel ASL', wodurch man die Halbirungslinie h und den Winkel $hSB = \beta$ erhält; macht man nun $\sphericalangle X'Sh = \beta$, so ist $\sphericalangle X'SL' = \alpha$, folglich die gesuchte Gerade $PX \parallel SX'$; macht man $\sphericalangle Y'SL' = L'SX'$, so erhält man in $PY \parallel SY$ die zweite gesuchte Gerade.

Aufgabe *f*. Soll auf G von M aus eine Strecke $\overline{MX}$ gleich $\overline{AB}$ aufgetragen werden (Fig. 8), so construire man zunächst $\overline{A'M}$ parallel und gleich AB, und halbire hierauf den Winkel $A'MG$; die, zur so gefundenen Halbirungslinie h parallele, Gerade durch A' schneidet G in dem gesuchten Punkte X.

Hauptaufgabe A (S. 849). *α)* Wir müssen diese Aufgabe zunächst für einen speciellen Fall lösen. Wir wollen nämlich annehmen, die Gerade G, deren Schnittpunkte X_1 und X_2 mit dem Kreise K wir suchen sollen, habe vom Mittelpunkte M des Kreises K den Abstand a, d. i. den Abstand der parallelen Geraden unseres Lineals; den Radius des Kreises K (welcher Kreis natürlich nicht gezeichnet vorliegt) können wir dabei (mit Rücksicht auf Aufgabe *f*) parallel zu G als Strecke $\overline{MA}$ annehmen (Fig. 9).

Zur Lösung der Aufgabe legen wir nun wieder unser Lineal so durch M und A, dass die eine Kante des Lineals durch M und

die zweite Kante durch A geht; dies ist entweder auf zweierlei Art, nur auf eine Art oder gar nicht möglich und darnach hat K mit G entweder 2, 1 oder gar keinen (reellen) Schnittpunkt gemein.

$\beta)$ Wir wollen nun die Hauptaufgabe allgemein lösen, den Fall also, wo G von M nicht um a absteht; $MA \| G$ sei wieder der Radius r des Kreises K, dessen Schnittpunkte X_1 und X_2 mit G wir suchen. Die allgemeine Aufgabe $\beta)$ lässt sich auf die specielle $\alpha)$ zurückführen, indem man zu K und G eine ähnliche und ähnlich liegende Figur K' und G' mit M als Ähnlichkeitspunkt construirt, wobei G' von M den Abstand a hat (Fig. 10).

Die Durchführung der Aufgabe (A, β) gestaltet sich also folgendermassen: Man ziehe $G' \| MA$ im Abstande a von M, ziehe MB willkürlich und $CD \| BA$; sind X_1' und X_2' die Schnittpunkte des Kreises K' (Mittelpunkt M, Radius $r' = MD$) mit G', so sind X_1 und X_2 die gesuchten Schnittpunkte von K und G.

Aufgabe 7. Die Aufgabe „Die Schnittpunkte X_1 und X_2 zweier Kreise K_1 und K_2 (nicht gezeichnete) mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den irgendwo gegebenen Radien r_1 und r_2 zu finden" kann man auf die eben gelöste Hauptaufgabe A zurückführen.

Aus Fig. 11 ergibt sich nämlich $r_1^2 - x_1^2 = r_2^2 - x_2^2$ oder $r_2^2 + x_1^2 = r_1^2 + x_2^2$; aus letzterer Gleichung ersieht man die Richtigkeit folgender Construction des Punktes C: Man ziehe $M_1A = r_2$ und $M_2B = r_1$ (Fig. 12), beide senkrecht zu $\overline{M_1M_2}$; errichtet man nun im Halbirungspunkte P von $\overline{AB}$ die Senkrechte S auf AB, so erhält man im Schnittpunkte von S und M_1M_2 den Punkt C und damit die gemeinschaftliche Chordale G von K_1 und K_2. Die Schnittpunkte G mit irgend einem der beiden Kreise sind nun die gesuchten Schnittpunkte X_1 und X_2 von K_1 und K_2.

Damit ist gezeigt (wie schon einleitend erwähnt wurde), dass Aufgabe 7 sich auf Aufgabe A zurückführen lässt.[1]

---

[1] Steiner führt in dem wiederholt erwähnten Werke die Aufgabe 7 auch auf Hauptaufgabe A zurück, aber auf einem anderen Wege bei Benützung der Potenzeigenschaften eines Kreises; für seine Zwecke wäre übrigens der von uns eingeschlagene Weg auch brauchbar gewesen.

II. Die geometrischen Constructionen ausgeführt mit Hilfe eines beliebigen Winkels.

Als einziges Hilfsmittel setzen wir in diesem Abschnitte einen beweglichen Winkel α (etwa aus Holz) voraus. Bei den bezüglichen Zeichnungen wurde für α ein Winkel von 30° angenommen; α kann aber jeden Werth, mit Ausnahme von 180° haben.

Wir müssen wieder die Auflösung der Aufgaben *a* bis *f*, *A* und 7 mit Hilfe dieses Winkels zeigen.

Aufgabe *a*. Wie man mit unserem jetzigen Hilfsmittel Parallele zieht, erkennt man aus Fig. 13 wohl ohne Weiteres.

Aufgabe *b*. Wie man eine Strecke $\overline{AB}$ halbirt, zeigt Fig. 14. Fig. 15 zeigt dagegen, wie man eine gegebene Strecke $\overline{AB}$ vervielfältigt, etwa verdreifacht: Aus A, B ergibt sich P; zieht man nun $G \parallel AB$, so erhält man leicht P', C, P'', D; $\overline{AD}$ ist dann gleich $3 \times \overline{AB}$.

Die Aufgabe, eine Strecke in eine bestimmte Anzahl gleicher Theile zu zerlegen, lässt sich bei Benützung des Winkels α ganz so lösen, wie bei Benützung eines Lineals (siehe I, *b*), da man in beiden Fällen ohne Schwierigkeit parallele Linien ziehen kann.

Auch die in Fig. 15 dargestellte Aufgabe hätte ganz nach (I, *b*) gelöst werden können.

Aufgabe *c*. α) Soll durch P ausserhalb G (Fig. 16) auf G eine Normale gefällt werden bei Benützung unseres jetzigen Hilfsmittels, so ziehe man G' und G'' zu G unter dem Winkel α geneigt, hierauf $G'_1 \parallel G'$ und $G''_1 \parallel G''$; PP' ist die gesuchte Senkrechte.

β) Liegt P in G, so ziehe man zunächst eine Parallele zu G; dadurch ist β auf α zurückgeführt.

Aufgabe *f*. Hier sei $\overline{AB}$, G und O (Fig. 17) gegeben; $\overline{OX}$ gleich $\overline{AB}$ ist zu finden. Man mache zu dem Zwecke $\overline{OC}$ parallel und gleich $\overline{AB}$, ziehe hierauf G' und G'' (siehe Fig. 17), endlich $CD \parallel G''$ und $DE \parallel C$.

Legt man nun den Winkel α so in die Zeichenfläche, dass seine Schenkel durch E und C gehen und sein Scheitel auf G

in X zu liegen kommt, so ist schon $\overline{OX} = \overline{OC}$,[1] die Aufgabe also gelöst.

Die Lösung dieser Aufgabe ist mit Rücksicht auf das Obige (ad 6) keineswegs eine näherungsweise, sondern eine strenge.

Aufgabe *e.* *α)* Wie ein Winkel mit unserem jetzigen Hilfsmittel halbirt wird, zeigt Fig. 18; dabei wurde $\overline{SB}$ gleich $\overline{SA}$ gemacht (nach Aufgabe *f*).

β) Fig. 18 zeigt dagegen, wie ein Winkel ASB zu verdoppeln ist: M wurde beliebig auf AS angenommen, daraus ergaben sich der Reihe nach die Punkte N, O und P; Winkel PSB ist dann doppelt so gross als Winkel ASB.

Aufgabe *d.* Die Auflösung dieser Aufgabe kann hier vortheilhaft auf ganz dieselbe Weise gelöst werden, wie bei Benützung eines Lineals (siehe I, Aufgabe *d*).

Hauptaufgabe A. Um die Schnittpunkte X_1 und X_2 einer Geraden G mit einem Kreise K vom Mittelpunkt M und Radius r (Fig. 20) zu finden, geht man so vor:[2] Durch M zieht man G' und G'' bei Benützung des Winkels α (siehe Figur), hierauf $AB \parallel G''$ und $BC \parallel AM$; nun legt man wieder den Winkel α so in die Zeichenfläche, dass seine Schenkel durch A und C gehen und sein Scheitel auf G zu liegen kommt; dies ist entweder gar nicht, auf zweierlei, oder einerlei Art und Weise möglich; die Orte des Scheitels von α sind dann die gesuchten Punkte X_1 und X_2.

Aufgabe 7 wird, wie oben unter I gezeigt wurde, auf die Hauptaufgabe A zurückgeführt.

III. Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mit Hilfe eines rechten Winkels.

Das in diesem Abschnitte einzig verwendete Constructionshilfsmittel ist ein beweglicher rechter Winkel etwa aus Holz.

Der im Abschnitte II verwendete Winkel α war ein beliebiger Winkel, kann also auch insbesondere 90° sein, so dass eigentlich dieser Abschnitt überflüssig erscheinen könnte. Dies ist aber nicht der Fall, denn bei näherer Betrachtung des Abschnittes II

---

[1] Denn E, C, X liegen auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt O ist.

[2] Der Radius r von K wurde dabei als Strecke $\overline{MA}$ parallel zu G angenommen, was ja mit Rücksicht auf oben gelöste Aufgabe *f* erlaubt ist.

ersieht man, dass einige der daselbst gelehrten Constructionen für $\alpha = 90°$ unausführbar werden und dass anderseits sich viele Constructionen für $\alpha = 90°$ sehr vereinfachen. Aus diesen Gründen schien es angezeigt, den Gebrauch des rechten Winkels in einem eigenen Abschnitte zu zeigen.

Aufgabe *a*. Wird hier ganz so wie die entsprechende im Abschnitte II (Fig. 13) gelöst; nur ist hier $\alpha = 90°$.

Aufgabe *b*. α) Wie mit Hilfe eines rechten Winkels[1] eine Strecke $\overline{AB}$ z. B. verdreifacht werden kann, zeigt Fig. 21. G wurde dabei willkürlich durch A gezogen und G' senkrecht zu AB. Es ist $\overline{AD} = 3 \times \overline{AB}$.

β) Wie eine Strecke $\overline{AB}$ halbirt wird mit unserem jetzigen Hilfsmittel, zeigt Fig. 22. G' und G'' wurden dabei senkrecht zu $\overline{AB}$ gezogen.

γ) Die Theilung einer Strecke in mehrere, z. B. drei gleiche Theile, geschieht hier nach Fig. 3, also ganz so wie im Abschnitte I und II.

Aufgabe *c*. Hier ohne Weiteres lösbar.

Aufgabe *f*. Ist $\overline{OX}$ auf G gleich und parallel $\overline{AB}$ zu machen (Fig. 23), so ziehe man zunächst G' parallel AB und mache hierauf $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{AB}$.

Legt man nun den rechten Winkel so in die Zeichenebene, dass seine Schenkel durch C und D gehen und sein Scheitel auf G zu liegen kommt, so ist damit schon der gesuchte Punkt X gefunden.

Aufgaben *d* und *e*. Werden mit Hilfe des rechten Winkels ganz so gelöst, wie bei Benützung unseres anderen Hilfsmittels im Abschnitte II.

Hauptaufgabe *A*. Sind die Schnittpunkte eines Kreises K von gegebenem Mittelpunkte M und dem Radius r (irgendwo in der Zeichenfläche als Strecke gegeben) mit einer Geraden G zu finden, so construire man den zu G parallelen Durchmesser von K und lege durch die Endpunkte des Durchmessers den rechten Winkel so, dass dessen Scheitel auf G zu liegen kommt, womit die Schnittpunkte von K und G gefunden sind.

---

[1] In der Zeichnung immer durch einen kleinen Kreisbogen kenntlich gemacht.

Aufgabe 7 kann wieder in schon gezeigter Weise (Fig. 11 und 12) auf die Hauptaufgabe zurückgeführt werden.

Hiemit ist also bewiesen, dass man mit jedem der vier gebräuchlichsten Zeichenhilfsmittel (dem Zirkel, dem Lineale, dem spitzen Winkel und dem rechten Winkel) allein ausreicht, um alle geometrischen Constructionen strenge durchführen zu können. Man wird dabei im Allgemeinen der gewöhnlichen Auflösungsweise der zu lösenden geometrischen Aufgabe Schritt für Schritt folgen und die Constructionen verwenden, welche man oben gelernt hat.

Zum Schlusse dieser Arbeit möchten wir uns aber noch einige Bemerkungen gestatten, welche zu Obigem in Beziehung stehen.

1. Die wiederholt erwähnte Steiner'sche Arbeit führt den Titel: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises"; von dem Mittelpunkte dieses festen Kreises wird dabei im Titel gar nicht gesprochen; trotzdem ist der Mittelpunkt des festen Kreises bei den Steiner'schen Constructionen ungemein wichtig, da ohne ihn nicht eine einzige der Aufgaben a bis f, ebenso A, mit alleiniger Hilfe der geraden Linie gelöst werden kann; so ist es insbesondere nicht möglich, den Mittelpunkt eines gezeichneten Kreises mit alleiniger Hilfe der geraden Linie zu finden.

Statt des Mittelpunktes des festen Kreises könnte auch ein Parallelogramm gegeben sein; denn mit Hilfe dieses Parallelogramms lassen sich, mit Zuhilfenahme der geraden Linie allein, Strecken halbiren und Parallele ziehen, also auch der nichtgegebene Mittelpunkt finden, wie Steiner in dem mehrfach erwähnten Werke gelehrt hat.

2. An Stelle des Steiner'schen Kreises könnte auch ein fester Kegelschnitt treten; von demselben müssten aber ausser dem Mittelpunkte noch einer seiner Brennpunkte gegeben sein; der Mittelpunkt zum Streckenhalbiren und zum Parallelenziehen, der Brennpunkt zum Fällen von Normalen.

Steiner zeigt in seinem Werke, dass man mit alleiniger Hilfe der geraden Linie sowohl Parallele als auch Senkrechte ziehen

kann, sobald ein Quadrat gezeichnet vorliegt und benützt werde[n] kann. Ist daher ausser der Contour eines beliebigen Kege[l]schnittes noch ein Quadrat gegeben, so kann man auch al[le] geometrischen Constructionen mit alleiniger Zuhilfenahme d[er] geraden Linie durchführen.

3. Hat man mehrere rechtwinklige Dreiecke zur Verfügun[g] so kann man nach Lill[1] leicht jede Gleichung dritten Grades

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

lösen. Man geht dabei so vor:

Man zeichnet einen rechtwinklig gebrochenen Linienzu[g] 0 1 2 3 4 (Fig. 24), dessen Seiten der Reihe nach den Coëfficiente[n] der zur Auflösung vorgelegten Gleichung proportional sind, un[d] wobei je zwei parallele Seiten des Linienzuges gleich oder en[t]gegengesetzt gerichtet sind, je nachdem die ihnen entsprechende[n] Coëfficienten ungleiches oder gleiches Vorzeichen haben.

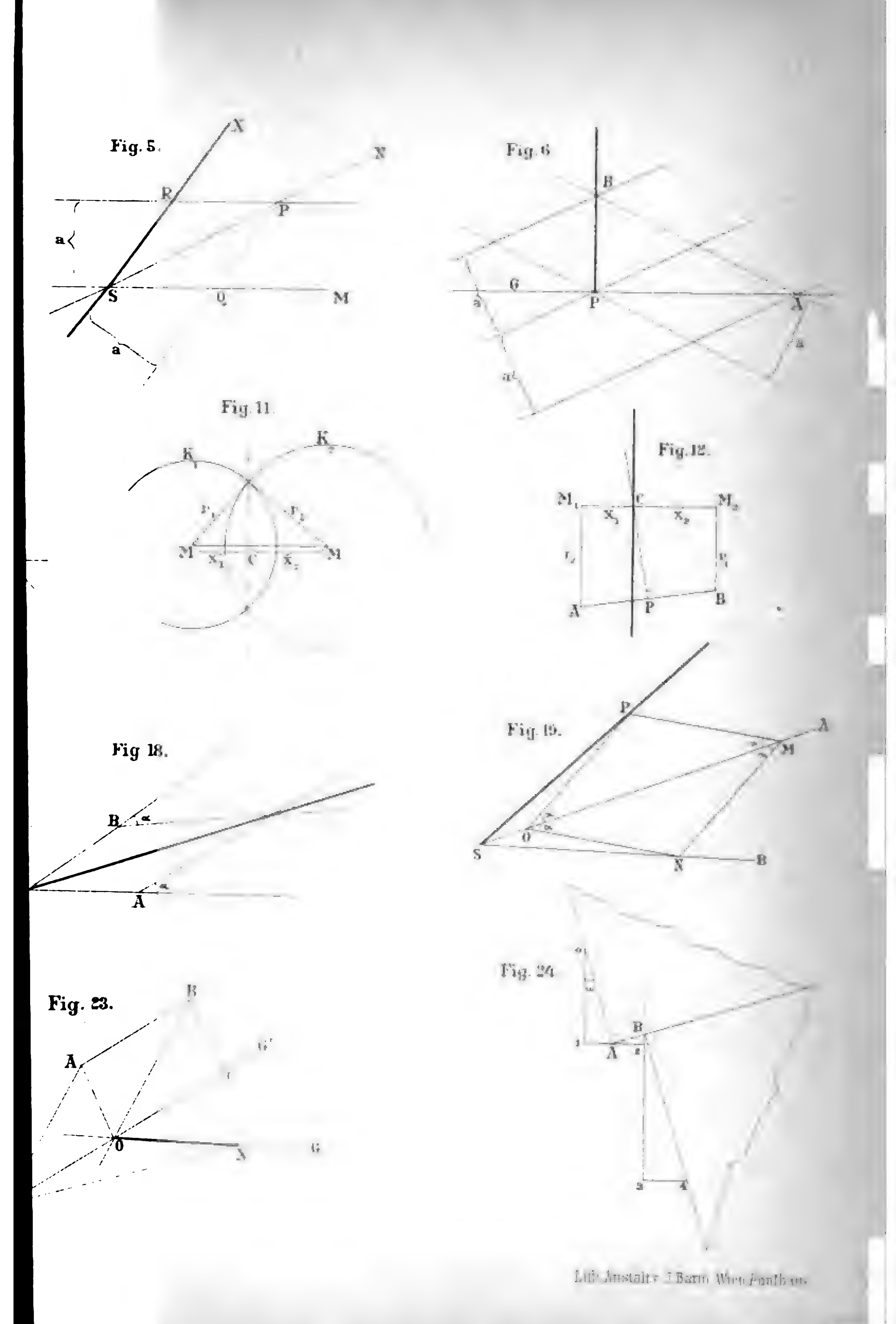
Ist nun $0AB4$ ein zweiter rechtwinklig gebrochener Linie[n]zug, der mit dem ersten Linienzuge gleichen Anfang und End[e] hat und dessen Ecken A und B auf die Seiten $\overline{12}$ und 23 de[s] ersteren fallen (Fig. 24), so ist schon $\operatorname{tg}(A01) = x$ eine Wurz[el] der aufzulösenden Gleichung.

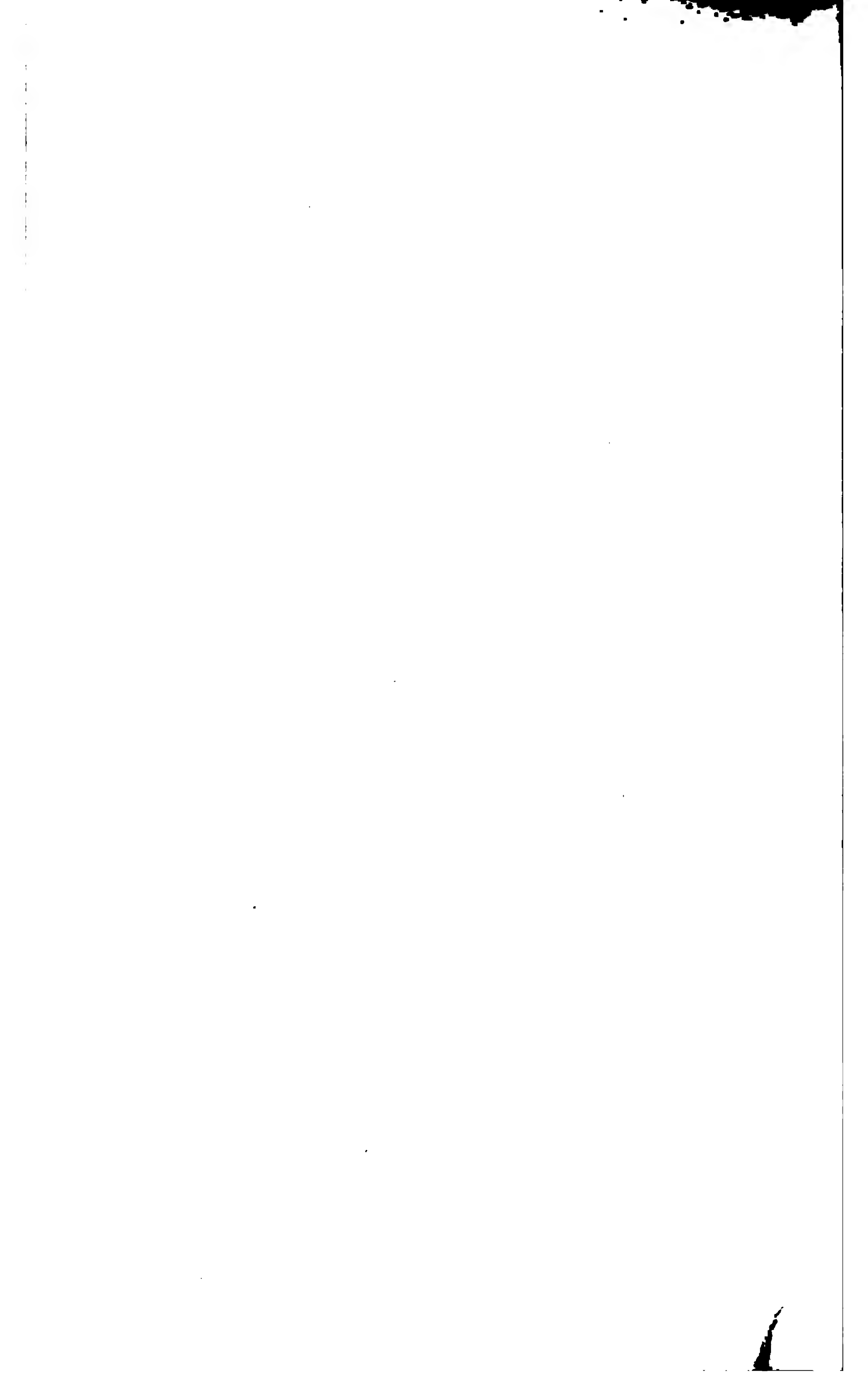
Zur Auflösung einer Gleichung dritten Grades hat man als[o,] nachdem der Linienzug (0 1 2 3 4) gezeichnet ist,[2] nur eine[n] zweiten „auflösenden" $0AB4$ zu suchen; dies kann mit Hilf[e] von zwei rechten Winkeln (etwa zweier rechtwinkliger Drei[-]ecke) leicht geschehen; man hat zu dem Zwecke die beide[n] rechten Winkel nur so lange aneinander zu verschieben und z[u] drehen, bis sie in die richtige Lage kommen (Fig. 24). Dies[e] Auflösungsweise der Gleichungen dritten Grades ist dabei wiede[r] keineswegs eine näherungsweise, denn bei vollkommenen Hilfs[-]mittel wird ein vollkommen genaues Resultat erzielt.

Man sieht also, dass man selbst Aufgaben dritten und dami[t] auch vierten Grades geometrisch strenge lösen kann, sobald ma[n]

[1] Lill, „Résolution des équations etc.". Nouvelles Annales, 1860.

[2] Diesen rechtwinklig gebrochenen Linienzug kann man nach Obigem mit Hilfe eines rechten Winkels ohne Zirkel entwerfen.


Fig. 5.
Fig. 6
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig 18.
Fig. 19.
Fig. 23.
Fig. 24
Lith. Anstalt v. J. Barth Wien Fünfhaus



über mehrere bewegliche rechte Winkel verfügt; in diesem Sinne ist der rechte Winkel dem Zirkel vor, denn selbst mit mehreren Zirkeln zusammen kann man nur geometrische Aufgaben zweiten Grades strenge lösen.

Um auch geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades construiren zu können, hat man wiederholt vorgeschlagen, noch einen Kegelschnitt (etwa aus Holz) als ständiges Zeichenhilfsmittel anzunehmen; man ersieht aber aus dem Obigen, dass dies nicht nothwendig ist.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsmolekeln

von

Dr. **Gustav Jäger.**

In meiner Abhandlung „Zur Theorie der Dampfspannung"[1] habe ich gezeigt, dass sich die Dampfspannung durch die Formel

$$d = C(1+\gamma t)\int_{k\sqrt{\frac{1-\epsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

darstellen lässt. Dabei ist t die Temperatur der Flüssigkeit bezüglich des Dampfes, α der Ausdehnungscoëfficient der Gase, ϵ der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten der bewussten Flüssigkeit, während durch den Coëfficienten γ dem Einflusse der Änderung der Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit und der mittleren Geschwindigkeit derselben Rechnung getragen werden soll. Schliesslich ist $k = \sqrt{\frac{3a_0}{mc_0^2}}$, wenn a_0 die Arbeit bedeutet, welche zur Überwindung der Capillarkräfte nöthig ist, wenn eine Molekel aus der Flüssigkeit in den Dampf übertritt, und c_0 die mittlere progressive Geschwindigkeit, welche die Flüssigkeitsmolekeln besitzen, beide Grössen auf die Temperatur 0° bezogen. Es sei noch erwähnt, dass zur Integration die Formel

$$\int_x^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} - \dots\right]$$

benützt wurde. Mit Beschränkung auf die zwei ersten Glieder dieser Reihe ergab sich

[1] Diese Ber., XCIX., S. 681.

$$C = 6876000,[1] \quad \gamma = -0\cdot00385, \quad k = 3\cdot499.$$

Ich berechnete neuerdings diese Constanten mit Zuhilfenahme der drei ersten Glieder der Reihe und fand

$$C = 6936000, \quad \gamma = -0\cdot00390, \quad k = 3\cdot500.$$

Die mit diesen Werthen berechneten Dampfspannungen schliessen sich noch näher den Beobachtungen an, als die bereits früher mitgetheilten.

Bisher haben wir einfach angenommen, die Dampfspannung sei der Zahl der Molekeln in der Oberflächeneinheit, welche sich in Dampf verwandeln können, proportional, ohne dass wir nach der Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in den Dampf und umgekehrt übertritt, weiter fragten. Diese Frage mit in Betracht zu ziehen, sei in Folgendem unsere Aufgabe.

Wir gehen wieder vom Maxwell'schen Gesetze aus, nach welchem die Zahl der Molekeln, welche, abgesehen von ihren unbestimmt bleibenden Geschwindigkeitscomponenten v und w, eine Componente u besitzen,

$$Z = N\sqrt{\frac{3}{2\pi c^2}}\, e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2} du \text{ [2]}$$

ist, dabei ist N die Zahl der Molekeln in der Volumeinheit, c die mittlere Geschwindigkeit derselben. u sei die Componente senkrecht gegen die Oberfläche der Flüssigkeit und a sei wieder die Arbeit, welche die Molekel leisten muss, wenn sie aus der Flüssigkeit in den Dampf übertritt. Ist ferner m die Masse, u' die Geschwindigkeitscomponente senkrecht zur Oberfläche, mit welcher die Molekel in den Dampfraum eintritt, so ist u' durch die Gleichung $\frac{mu^2}{2} - \frac{mu'^2}{2} = a$ gegeben, wonach $u' = \sqrt{u^2 - \frac{2a}{m}}$ wird. Multipliciren wir Z mit u' und integriren wir diesen Ausdruck von $u' = 0$ bis $u' = \infty$, so erhalten wir die Zahl der Molekeln, welche in der Zeiteinheit aus der Flüssigkeit in den Dampf übertritt. Für dieselbe ergibt sich

[1] Im Originale war irrthümlicher Weise der Werth von $\frac{C}{2}$ für C angegeben.

[2] Siehe O. E. Meyer, Theorie d. Gase, S. 269.

$$N\sqrt{\frac{3}{2\pi c^2}}\int\limits_{\sqrt{\frac{2a}{m}}}^{\infty}\sqrt{u^2-\frac{2a}{m}}\,e^{-\frac{3}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2}du =$$

$$= Nc\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\int\limits_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty}\sqrt{x^2-\frac{3a}{mc^2}}\,e^{-x^2}dx,$$

wobei $\frac{3}{2}\left(\frac{u}{c}\right)^2 = x^2$ gesetzt ist.

Ist der Beharrungszustand erreicht, so müssen in der Zeiteinheit ebensoviel Molekeln aus der Flüssigkeit in den Dampf als umgekehrt übertreten. Für die Zahl der Molekeln, welche aus dem Dampfraume in die Flüssigkeit übertreten, können wir dieselbe Formel benützen, wenn wir $a = 0$ setzen. Wir erhalten dann

$$N'c'\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}dx = N'c'\sqrt{\frac{2}{3\pi}}\left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{\infty} = N'c'\sqrt{\frac{1}{6\pi}},$$

wenn N' und c' die entsprechenden Werthe für die Dampfform sind. Für den Beharrungszustand muss also

$$2Nc\int\limits_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty}\sqrt{x^2-\frac{3a}{mc^2}}\,e^{-x^2}dx = N'c' \qquad 1)$$

sein.

Nach der kinetischen Gastheorie ist nun die Dampfspannung

$$d = \frac{N'mc'^2}{3}. \qquad 2)$$

Aus dieser und der Gleichung 1) folgt ferner

$$d = \frac{2}{3}Nmcc'\int\limits_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty}\sqrt{x^2-\frac{3a}{mc^2}}\,e^{-x^2}dx =$$

$$= \frac{2}{3}\rho_0(1-\beta t)c_0c'_0(1+\alpha t)\int\limits_{k\sqrt{\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}}^{\infty}\sqrt{x^2-k^2\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}}\,e^{-x^2}dx.$$

Hier setze ich $Nm = \rho_0(1-\beta t)$, d. i. die Masse der Volumeinheit Flüssigkeit, also β der Ausdehnungscoëfficient derselben. $cc' = c_0 c_0'(1+\alpha t)$ zu setzen, halte ich für erlaubt, da ja bei gleichbleibender Constitution der Flüssigkeit die in derselben vorkommenden lebendigen Kräfte der absoluten Temperatur, mithin die vorkommenden Geschwindigkeiten der Wurzel derselben proportional sein müssen. Die Bedeutung der übrigen Buchstaben ist bereits bekannt.

Diese Gleichung für die Dampfspannung ist insofern wichtig, als sie uns in den Stand setzt, c_0, d. i. die mittlere progressive Geschwindigkeit, welche die Molekel in der Flüssigkeit besitzt, zu berechnen. Zu dem Zwecke könnte man die Gleichung durch Reihenentwickelung integriren. Ich erhielt jedoch bei diesem Verfahren nur eine langsam convergirende Reihe. Ich zog es daher vor, beim speciellen Falle des Wassers auf folgendem Wege die Integration zu bewerkstelligen. Innerhalb des Temperaturintervalles 0—100° bewegt sich der Werth von $\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}$ zwischen den Grenzen 2—3·5, ferner lässt sich leicht zeigen, dass es gleichgiltig ist, ob wir zwischen den Grenzen $\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}$ und 5 integriren oder zwischen $\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}$ und ∞, indem der Werth des Integrals für die Grenzen 5 und ∞ so klein wird, dass er vernachlässigt werden kann. Bei diesen Annahmen lässt sich aber der Ausdruck $\sqrt{x^2 - \frac{3a}{mc^2}}$ mit für unsere Zwecke hinreichender Annäherung durch

$$\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}\left[-6\cdot 14 + 9\cdot 91\,\frac{x}{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}} - 4\cdot 54\,\frac{x^2}{\frac{3a}{mc^2}} + 0\cdot 772\,\frac{x^3}{\left(\frac{3a}{mc^2}\right)^{3/2}}\right]$$

ersetzen. Daraus folgt nun weiter

$$\int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} \sqrt{x^2 - \frac{3a}{mc^2}}\, e^{-x^2} dx = \int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{5} \left[-6\cdot 14 \sqrt{\frac{3a}{mc^2}} + 9\cdot 91\, x - 4\cdot 54 \frac{x^2}{\sqrt{\frac{3a}{mc^9}}} + 0\cdot 772 \frac{x^3}{\frac{3a}{mc^2}}\right] e^{-x^2} dx =$$

$$= \left(6\cdot 14 + \frac{0\cdot 772}{\frac{3a}{mc^2}}\right) \frac{e^{-\frac{3a}{mc^2}}}{2} - \left(6\cdot 14 \sqrt{\frac{3a}{mc^2}} + \frac{4\cdot 54}{2\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}\right) \int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Dabei sind die Werthe des Integrals für die Grenze 5 wieder vernachlässigt worden. Zur Lösung des

$$\int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

benützte ich die auf Seite 860 angegebene Formel, und zwar mit der Beschränkung, dass ich

$$\int_{x}^{5} e^{-x^2} dx = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\right]$$

setzte. Nach leicht durchzuführender Reduction erhalten wir schliesslich

$$\int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty} \sqrt{x^2 - \frac{3a}{mc^2}}\, e^{-x^2} dx = 1\cdot 57 \left[\frac{1}{\frac{3a}{mc^2}} + \frac{0\cdot 726}{\left(\frac{3a}{mc^2}\right)^2}\right] \frac{e^{-\frac{3a}{mc^2}}}{2} \qquad 3)$$

und somit

$$d = 0\cdot523\,\rho_0(1-\beta t)\,c_0 c'_0(1+\alpha t)\left[\frac{1}{\frac{3a}{mc^2}} + \frac{0\cdot726}{\left(\frac{3a}{mc^2}\right)^2}\right] e^{-\frac{3a}{mc^2}}.$$

Aus den Dampfspannungen des Wassers bei 0° und 100° ergab sich $0\cdot523\,\rho_0 c_0 c'_0 = 67.10^4$, $\frac{3a_0}{mc_0^2} = 9\cdot66$, wenn der Dampfdruck in Millimetern Quecksilbersäule gegeben ist. Mit diesen Werthen berechnen sich die Dampfspannungen des Wassers für verschiedene Temperaturen zwischen 0° und 100° mit einer Annäherung, wie sie den gemachten Vernachlässigungen entspricht. Es betragen die grössten Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werthen etwa 4%.

Zur Berechnung von c_0 wurde Alles auf c.-g.-s.-Einheiten reducirt, wobei $\rho_0 = 1$ und für c_0 jener Werth gesetzt wurde, der sich aus der Gleichung 2) ergibt, wenn die Dampfdichte des Wassers $0\cdot623$ gesetzt wird. Ich fand $c'_0 = 61400\,cm$ und

$$c_0 = 27800\,cm.$$

Es ist also die mittlere Geschwindigkeit der Molekeln in der Flüssigkeit bedeutend kleiner als im Dampfe. Daraus lässt sich schon der Schluss ziehen, dass die Wärmebewegung im flüssigen Zustande jedenfalls eine ganz andere sein muss als die im gasförmigen, was ja auch die gänzlich von einander abweichenden specifischen Wärmen in beiden Zuständen vermuthen lassen.

Es gelang mir noch auf eine andere Weise, die Grösse c zu ermitteln. Ist nämlich σ die Dichte der Flüssigkeit, σ' jene des Dampfes, so ist $\frac{N}{N'} = \frac{\sigma}{\sigma'}$. Aus dieser und der Gleichung 1) lässt sich dann leicht finden

$$2\,\frac{\sigma}{\sigma'}\,c\int_{\sqrt{\frac{3a}{mc^2}}}^{\infty}\sqrt{x^2-\frac{3a}{mc^2}}\;e^{-x^2}dx = c'.$$

Für unseren speciellen Fall wird diese Gleichung mit Zuhilfenahme der Gleichung 3)

$$1 \cdot 57 \frac{\sigma}{\sigma'} c_0 \left[\frac{1}{\frac{3a}{mc^2}} + \frac{0 \cdot 726}{\left(\frac{3a}{mc^2}\right)^2} \right] e^{-\frac{3a}{mc^2}} = c'_0.$$

Für die Temperatur 0° setze ich $\frac{\sigma}{\sigma'} = 206500$, wonach

$$c_0 = 26700\, cm.$$

Dieser Werth stimmt mit dem früher gefundenen sehr gut überein; ja, wenn man bedenkt, dass zur Berechnung von σ' die theoretische Dampfdichte benützt wurde und nicht die des gesättigten Dampfes, welche ja etwas grösser ist, so musste eigentlich der zuletzt gefundene Werth etwas zu klein ausfallen.

Nachdem wir die Grösse c kennen, dessgleichen auch $\frac{3a}{mc^2}$, so ist uns auch $\frac{a}{m}$ gegeben. Da a die Arbeit, welche die Molekel zur Überwindung der Capillarkräfte aufwenden muss, wenn sie aus dem Inneren der Flüssigkeit in den Dampf übertritt, ferner m die Masse der Molekel ist, so bedeutet $\frac{a}{m}$ nichts Anderes, als die zur Uberwindung der Capillarkräfte erforderliche Arbeit bei der Überführung der Masseneinheit Flüssigkeit in die Dampfform.

Nicht zu verwechseln ist diese Grösse mit der Verdampfungswärme. Diese beiden Grössen wären nur dann identisch, wenn alle Eigenschaften der Flüssigkeitsmolekeln mit jenen der Dampfmolekeln übereinstimmen würden. Dies ist aber, wie wir bereits gezeigt haben, wenigstens bei einer Eigenschaft, nämlich der progressiven Geschwindigkeit, nicht der Fall.

Für Wasser ist $\frac{a_0}{m} = 25 . 10^8$ (c.-g.-s.), wobei für c_0 der zuerst gefundene Werth eingesetzt wurde. Also nicht einmal in der Grössenordnung stimmt $\frac{a_0}{m}$ mit der Verdampfungswärme überein, indem letztere etwa zehnmal grösser ist.

Nimmt man an, die Flüssigkeiten seien unzusammendrückbar, so ist nach Stefan[1] die Arbeit A, welche die in der Flüssigkeit wirkenden Kräfte bei der Überführung der Masseneinheit aus dem Punkte M_1 in den Punkt M_2 leisten, durch die Gleichung

[1] J. Stefan, Wied. Ann., XXIX, S. 658.

$p_2 - p_1 = \rho A$ dargestellt, wenn der Druck in M_1 und M_2 die Werthe p_1, bezüglich p_2, hat und ρ die Dichte der Flüssigkeit ist. „Liegt M_1 in der ebenen Oberfläche der Flüssigkeit, M_2 im Inneren derselben, so ist, wenn von äusseren Kräften abgesehen wird, A die Arbeit, welche die Molecularkräfte leisten, wenn die Masseneinheit aus dem Inneren der Flüssigkeit in die Oberfläche gebracht wird.“ Diese Arbeit ist halb so gross als jene, welche zur Überführung der Masseneinheit Flüssigkeit aus dem Inneren an einen Ort ausserhalb der Flüssigkeit, wo sich die Capillarkräfte der Oberfläche nicht mehr geltend machen, erfordert wird.[1] Natürlich ist das so zu verstehen, dass nicht die Masseneinheit als Ganzes, sondern Molekel für Molekel zu transportiren ist. Die bewusste Arbeit entspricht, wie bereits erwähnt, der Grösse $\frac{a}{m}$, mithin ist $A = \frac{a}{2m}$.

Für unser specielles Beispiel wird $p_2 - p_1 = 125.10^7$ (c.-g.-s.), oder in Atmosphären umgerechnet, $p_2 - p_1 = 1235$. Das heisst, bei 0° ist der Druck im Innern des Wassers um 1235 Atmosphären grösser als der, welcher von aussen gegen die Oberfläche ausgeübt wird.

A. Fick,[2] welcher aus dem osmotischen Drucke der Lösungen den inneren Druck des Wassers berechnet, findet dafür 1221 Atmosphären. Die Übereinstimmung beider Zahlen ist besser als man erwarten kann.

Wie schon Stefan[3] erwähnt, ist die Annahme, dass die Dichte der Flüssigkeit bis an ihre Oberfläche constant bleibt, wenn der Druck von der Oberfläche nach einwärts zu einem sehr grossen Werthe ansteigt, unzulässig. Für Wasser ist der Compressionscoëfficient bei 0° 0·000050, bezogen auf die Atmosphäre als Druckeinheit. Ein Druck von 1235 Atmosphären würde daher das Volumen des Wassers um etwa 6% verringern. Es ist also der Fehler, den man macht, wenn man das Wasser für unzusammendrückbar annimmt, nicht sehr bedeutend, so dass wir die oben gemachten Annahmen speciell für Wasser ruhig aufrecht halten können.

---

[1] Ebenda, S. 655 u. ff.

[2] Zeitschrift f. physik. Chemie, V, 6, 1890, S. 527.

[3] J. Stefan. Wied. Ann., XXIX. S. 660.

Schliesslich bietet sich uns noch die Möglichkeit dar, nach W. Thomson's Methode eine Vorstellung von der Grösse der Flüssigkeitsmolekeln zu geben. Nehmen wir nämlich an, dass im flüssigen Zustande die Zwischenräume zwischen den einzelnen Molekeln gegenüber dem Volumen derselben sehr klein seien, so können wir $\frac{4}{3}\pi r^3 N = 1$ setzen, wenn r der Radius der Molekel ist. Befördern wir N Molekeln aus dem Inneren der Flüssigkeit an die Oberfläche, so ist die dabei zu leistende Arbeit gleich $\frac{a}{2m}$; dabei wird die Oberfläche der Flüssigkeit um $N\pi r^2$ vergrössert. Die Arbeit α, welche zur Vergrösserung der Flüssigkeitsoberfläche um die Flächeneinheit geleistet werden muss, lässt sich aus der Steighöhe der Flüssigkeit in einem Capillarrohre ermitteln. Wird nämlich die Wand des Rohres von der Flüssigkeit vollständig benetzt, so ist

$$h + \frac{r_1}{3} = \frac{2\alpha}{\rho g r_1},$$

wenn h die Steighöhe, r_1 den Radius des Rohres, g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Aus all' dem folgt, dass

$$N\pi r^2 = \frac{a}{2m\alpha}$$

ist, ferner

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3 N}{N\pi r^2} = \frac{4}{3} r = \frac{2m\alpha}{a},$$

oder es ist der Durchmesser der Molekel

$$\delta = \frac{3m\alpha}{a}.$$

Nach Brunner[1] ist die Steighöhe des Wassers in einem Rohre von 1 *mm* Radius bei 0° 15·33 *mm*, danach wird $\alpha = 76 \cdot 7$ (c.-g.-s.) und $\delta = 92.10^{-9}$ *cm*. O. E. Meyer[2] gibt für den Durchmesser

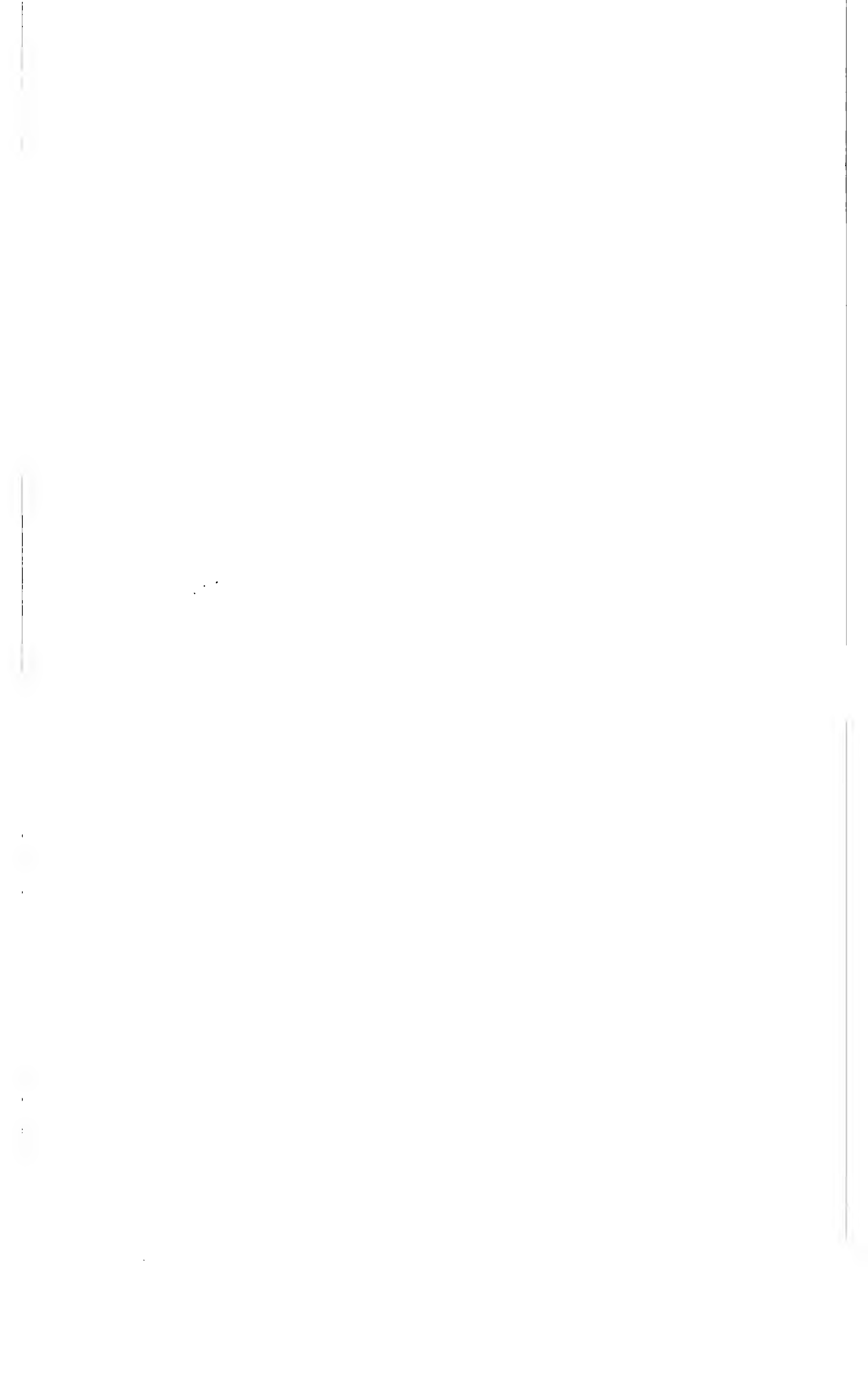
[1] Poggend. Ann., LXX.

[2] Theorie d. Gase, S. 231.

der Wassermolekel 44.10^{-9} *cm* an. Es stimmen also beide Angaben in der Grössenordnung überein.

Alle unsere Betrachtungen gründeten sich auf die Voraussetzung, dass in den Flüssigkeiten die Geschwindigkeiten der Molekeln, ebenso wie in den Gasen, nach dem Maxwell'schen Gesetze vertheilt sind. Strenge bewiesen ist diese Voraussetzung nicht, doch die Art und Weise, wie wir uns eine Flüssigkeit nach der kinetischen Theorie vorstellen, steht in so enger Beziehung zu den Ansichten über den gasförmigen Zustand, dass auch für die Flüssigkeiten, wenn schon nicht dasselbe, so jedenfalls ein dem Maxwell'schen sehr nahe kommendes Gesetz bestehen muss; wenigstens sind unsere, aus dieser Annahme gemachten Folgerungen (Gesetz der Dampfspannung, Grösse der Molekeln), die in guter Übereinstimmung mit den Thatsachen und den Resultaten anderer Rechnungsmethoden stehen, eine sehr starke Stütze dafür.

Aus den vorliegenden Untersuchungen geht auf's Deutlichste hervor, wie wichtig zum Ausbaue einer kinetischen Theorie der Flüssigkeiten die genaue Kenntniss der Capillaritätsconstanten, besonders aber das Gesetz der Veränderlichkeit derselben mit der Temperatur ist.



SITZUNGSBERICHTE

DER

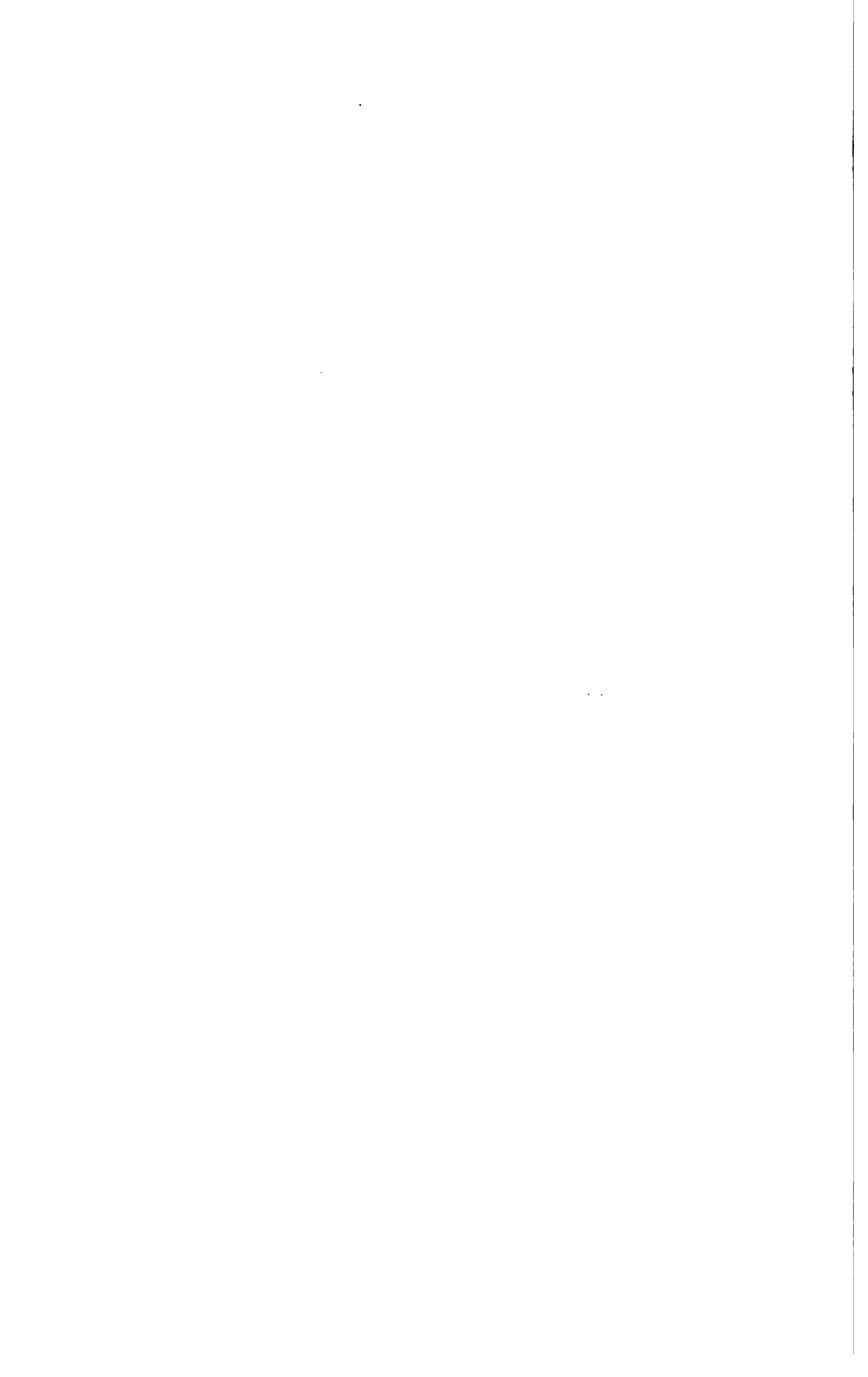
KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. IX. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie Physik, Meteorologie und der Mechanik.



XXII. SITZUNG VOM 6. NOVEMBER 1890.

Der Secretär legt eine von Herrn Josef Gängl v. Ehrenwerth, k. k. a. o. Prof. an der Bergakademie in Leoben, eingesendete Schrift vor, betitelt: „Ist die directe Darstellung von schmiedbarem Eisen aller Art, beziehungsweise die Darstellung von Roheisen mit Gasen möglich?“ Leoben, 1890.

Ferner legt derselbe das erschienene Heft VII (Juli) des 99. Bandes, Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Herr August Adler, Supplent an der k. k. Staats-Oberrealschule in Klagenfurt, übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der Mascheronischen Constructionen“.

Der Secretär überreicht eine Abhandlung von Dr. W. Wirtinger in Wien, betitelt: „Über Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen“.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben von Dr. Justinian Ritter von Froschauer in Wien behufs Wahrung der Priorität vor, mit der Aufschrift: „Zur Frage der Immunität für Infectionskrankheiten“.

Das w. M. Herr Hofrath A. Winckler überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung“. II.

Das w. M. Herr Prof. A. Lieben übergibt eine Arbeit des Herrn Dr. Rudolph Wegscheider in Wien: „Über Hemipinsäureäthyläther“.

Das w. M. Prof. V. v. Lang übergibt eine Mittheilung, welche gewisse Beziehungen betrifft, die von J. J. Thomson zwischen dem Dampfdruck und anderen physikalischen Grössen veröffentlicht wurden.

Selbständige Werke, oder neue, der Akademie bisher nicht zugekommene Periodica sind eingelangt:

J. Gängl v. Ehrenwerth, „Ist die directe Darstellung von schmiedbarem Eisen aller Art, beziehungsweise die Darstellung von Roheisen mit Gasen möglich? Leoben, 1890, 8°.

Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. II.

von

A. Winckler,
w. M. k. Akad.

Die Voraussetzungen, unter welchen im Nachstehenden der Zusammenhang einiger Differentialgleichungen erster Ordnung mit ihren Multiplicatoren ermittelt werden soll, liegen bereits einer früheren Abhandlung[1] zu Grunde und lassen sich, wie folgt, zusammenfassen.

Bezeichnet z eine Function von x, y und wird angenommen, es bestehe zwischen x, y, z und dem Multiplicator ρ der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = z$$

die Relation $\rho = F(x, y, z)$, so ergibt sich für z die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \left[F + z\frac{\partial F}{\partial z}\right] \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = -\left[\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}\right],$$

deren allgemeines Integral mittelst der gewöhnlichen Gleichungen:

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dy}{F + z\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial x} + z\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad \ldots (1)$$

[1] Über den Multiplicator der Differentialgleichungen erster Ordnung. I. Sitz. Ber., Bd. 99.

oder der hieraus resultirenden:

$$\frac{F\,dx}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dF}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{d.zF}{\frac{\partial F}{\partial x}} \qquad \ldots \text{(II)}$$

gefunden werden muss. Jenes Integral enthält eine willkürliche Function und bestimmt in allgemeinster Weise die Function z, welche der Bedingung $\rho = F(x, y, z)$ entspricht.

Die folgenden sehr einfachen Beispiele sind, wie jene in der genannten Abhandlung, zumeist so gewählt, dass in ihnen bereits bekannte Resultate in grösserer Allgemeinheit erscheinen.

1.

Man nehme an, es solle dem angegebenen Verfahren die Gleichung

$$\rho = f(X_0 z + X_1 y + X_2) = F$$

worin die X Functionen von x bedeuten, zu Grund gelegt werden. Wenn der Kürze wegen

$$u = X_0 z + X_1 y + X_2$$

gesetzt wird, so folgt:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = X_0 f'(u), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = X_1 f'(u), \quad \frac{\partial F}{\partial x} = (X_0' z + X_1' y + X_2') f'(u)$$

und ergibt sich aus dem ersten und zweiten Glied der Gleichungen (I) die Hilfsgleichung

$$\frac{dx}{X_0 f'(u)} = \frac{dy}{X_0 z f'(u) + f(u)},$$

welche, da $X_0 z = u - X_1 y - X_2$ ist, in der Form

$$X_0 \frac{dy}{dx} + X_1 y + X_2 = u + \frac{f(u)}{f'(u)} \qquad \ldots (1)$$

geschrieben werden kann.

Aus dem ersten und zweiten Gliede der Gleichungen (II) erhält man:

$$\frac{X_1}{X_0} dx = \frac{dF}{F} \qquad \ldots (2)$$

daher ein erstes Integral:

$$f(u) = C_1 e^{\int \frac{X_1}{X_0} dx} \qquad \ldots (3)$$

wonach u als blosse Function von x und C_1 zu betrachten ist.

Wird dieselbe hieraus berechnet und in den Ausdruck rechter Hand der Gleichung (1) eingesetzt, so kann auch diese Gleichung integrirt werden. Es ist dann noch die neu eintretende Constante $C_2 = \varphi(C_1)$ und nach Ausführung der betreffenden Quadraturen

$$C_1 = f(u) e^{-\int \frac{X_1}{X} dx}$$

zu setzen, um die gesuchte Gleichung für z zu erhalten.

Die Anwendung dieses Verfahrens erfordert im Allgemeinen, dass die Gleichung (3) nach u aufgelöst werden könne, also $f(u)$ von gegebener Form sei. In besonderen Fällen aber kann die Charakteristik f unbestimmt bleiben. Es sei z. B.

$$X_1 = b$$

b von Null verschieden.

Verbindet man das erste und dritte Glied der Gleichungen (I) und, wie vorhin, das erste und zweite der Gleichungen (II) mit einander, so folgt:

$$X_0 \frac{dz}{dx} + (b + X_0')z + X_2' = 0, \qquad b\frac{dx}{X_0} = \frac{dF}{F}$$

Hieraus ergibt sich das allgemeine Integral:

$$f(X_0 z + by + X_2) \,.\, e^{-b\int \frac{dx}{X_0}} = \varphi\left(X_0 z e^{b\int \frac{dx}{X_0}} + \int X_2' e^{b\int \frac{dx}{X_0}} dx\right).$$

Genügt z dieser Bedingung, so ist $f(X_0 z + by + X_2)$ ein Multiplicator der Gleichung $\frac{dy}{dx} = z$.

Für den Fall $X_1 = b = 0$ sind die Gleichungen (1) und (3) anzuwenden.

2.

Unter den speciellen Ausdrücken, welche für $f(u)$ gewählt werden können, ist

$$\rho = f(u) = \frac{1}{u}$$

der einfachste. Die Hilfsgleichungen (1) und (2) sind hier:

$$X_0 \frac{dy}{dx} + X_1 y + X_2 = 0, \qquad \frac{X_1}{X_0} dx = \frac{dF}{F}$$

oder, wenn man der bequemeren Bezeichnung wegen

$$\frac{X_1}{X_0} = p, \qquad \frac{X_2}{X_0} = q$$

setzt, die folgenden:

$$\frac{dy}{dx} + py + q = 0, \qquad pdx = \frac{dF}{F}.$$

Ihre Integrale sind:

$$C_1 = ye^{\int pdx} + \int qe^{\int pdx}.dx, \qquad C_2 = ue^{\int pdx},$$

mittelst welcher man, wenn $C_2 = \varphi(C_1)$ gesetzt wird, das allgemeine Integral

$$ue^{\int pdx} = \varphi\left(ye^{\int pdx} + \int qe^{\int pdx}.dx\right)$$

findet. Da $u = X_0 z + X_1 y + X_2$, so ist nun auch die Gleichung für z oder $\frac{dy}{dx}$ gegeben, welche man, wenn weiter noch

$$\frac{1}{X_0} e^{-\int pdx} = r$$

gesetzt wird, wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} + py + q = r\varphi\left(ye^{\int pdx} + \int qe^{\int pdx} dx\right) \qquad \ldots (4)$$

schreiben kann. Der Multiplicator ist:

$$\rho = \frac{e^{\int pdx}}{\varphi\left(ye^{\int pdx} + \int qe^{\int pdx} dx\right)} \qquad \ldots (5)$$

Diese Formeln sind, auf andere Art hergeleitet, schon in einem früheren Aufsatze, Sitz. Ber., Bd. 84, S. 962, enthalten. Sie stellen in grösserer Allgemeinheit mehrere seit Langem bekannte, bis jetzt aber isolirt stehende Resultate dar.

Um dies zu zeigen, sei der Abkürzung wegen:

$$e^{\int p dx} = P, \qquad \int q e^{\int p dx} dx = Q,$$

also

$$p = \frac{P'}{P}, \qquad q = \frac{Q'}{P},$$

womit die Gleichungen (4) und (5) in die folgenden:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P'y + Q'}{P} = r\varphi(Py + Q) \qquad \ldots (6)$$

$$\rho = \frac{P}{\varphi(Py + Q)} \qquad \ldots (7)$$

übergehen.

1. Hierin sei nun

$$P = s^2, \qquad Q = -ss', \qquad r = \frac{1}{s^4}$$

unter s eine beliebige Function von x verstanden.

Man findet dann:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{s'}{s}y - \frac{s's' + ss''}{s^2} = \frac{1}{s^4}\varphi(s^2 y - ss')$$

$$\rho = \frac{s^2}{\varphi(s^2 y - ss')}$$

Beispiel. Für $\varphi(w) = -(w^2 + a)$ ergeben sich hieraus die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{a}{s^4} - \frac{s''}{s} = 0$$

$$\rho = \frac{s^2}{s^2(sy - s')^2 + a},$$

welche auch in der Integralrechnung von Euler, Art. 528 und 533, hergeleitet sind.

2. Es sei ferner:

$$P = s^2, \qquad Q = st, \qquad r = \frac{s'}{s^4 t}$$

dabei t irgend eine Function von x; zugleich sei

$$\varphi(w) = w^2.$$

Aus den Gleichungen (6) und (7) ergibt sich dann:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{s'}{t} \cdot y^2 - \frac{t'}{s}, \qquad \rho = \frac{1}{(sy+t)^2}.$$

Dieses Resultat wurde von Abel gefunden. S. „Oeuvres compl.“, t. II, p. 24 der neuen Ausgabe.

3. Für

$$P = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \qquad Q = 0, \qquad r = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

erhält man die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - a^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot \frac{1}{\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - a^2}}\right)}.$$

Wird beispielsweise $\varphi(w) = a\sqrt{w^2 + 1}$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + a\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{x^2 - a^2}, \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}$$

übereinstimmend mit Art. 699 der Integralrechnung von Euler.

4. Um noch einen Fall zu betrachten, sei:

$$P = \sqrt[n]{\frac{s}{t}}, \qquad Q = 0.$$

Hier findet man aus (6) und (7) die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{n}\left(\frac{s'}{s} - \frac{t'}{t}\right) y = r\varphi\left(y\sqrt[n]{\frac{s}{t}}\right)$$

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{s}{t}} \cdot \frac{1}{\varphi\left(y\sqrt[n]{\frac{s}{t}}\right)}.$$

Beispiel. Wird $r = -t$ und $\rho(w) = w^n + 1$ gesetzt, so folgt:

$$\frac{dy}{dx} + s \cdot y^n + \frac{1}{n}\left(\frac{s'}{s} - \frac{t'}{t}\right) y + t = 0$$

$$\rho = \sqrt[n]{\frac{s}{t}} \cdot \frac{t}{sy^n + t}.$$

Für $n = 2$ ergibt sich hieraus eine von Abel (t. II, p. 20) hergeleitete Differentialgleichung.

3.

Für manche andere Beziehungen zwischen ρ und z gestaltet sich die Rechnung ebenso einfach wie im Falle des Art. 1.

So findet man z. B. mit Leichtigkeit, dass der Relation

$$\rho = \frac{f(ax^n + by^n)}{xz - y}$$

die Gleichung

$$(ax^{n-1} + by^{n-1} z) f(ax^n + by^n) = x^{n-2}(xz - y)\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

entspricht, in welcher wieder φ eine beliebige Function bezeichnet. Da sich diese Gleichung, wie folgt:

$$z\left[b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} f(ax^n + by^n) - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] + af(ax^n + by^n) + \frac{y}{x}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

schreiben lässt, so kann z und dann auch ρ berechnet werden.

Als Resultat ergibt sich, dass die Differentialgleichung

$$\left[af(ax^n + by^n) + \frac{y}{x}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] dx$$

$$+ \left[b\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} f(ax^n + by^n) - \varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right] dy = 0$$

durch Beifügung des Factors

$$\frac{x^{n-1}}{ax^n + by^n}$$

integrabel wird.

Für ein Beispiel sei

$$a = 1, \qquad b = -1, \qquad n = 2,$$

[illegible]

$$[illegible]\; x^2-y^2 = x^2-y^2 \;[illegible]$$

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] Fa[illegible].

$$\frac{x}{x^2-y^2}.$$

[illegible], dass die [illegible]

$$\left(x-\frac{cy}{x^2-y^2}\right)dx-\left(y-\frac{c}{[illegible]}\right)dy=[illegible]$$

den Ausdruck x^2-y^2 zum Multiplicator hat, was auch im Art. 524 der Integralrechnung von Euler gezeigt ist.

Ein zweiter, ebenso leicht zu erledigender Fall findet statt, wenn der Zähler von ρ eine homogene Function von x und y, der Nenner aber wieder $xz-y$ ist.

Denn setzt man

$$\rho = \frac{y \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)}{xz-y}$$

und der Kürze wegen

$$\frac{x}{y} = u,$$

so führt das nun schon oft angewandte Verfahren zu der Gleichung

$$x^n = \frac{xz-y}{[nyf(u)-xf'(u)].z+yf'(u)} \cdot \varphi(u),$$

wodurch z, somit auch ρ bestimmt ist.

Dieser Ausdruck lässt sich, da $f(u)$ und $\varphi(u)$ beliebige Functionen sind, in einfachere Form bringen. Wird zunächst $f'(u)\,\varphi(u)$ für $\varphi(u)$ gesetzt, so folgt

$$x^n = \frac{xz - y}{\left[ny - x\frac{f'(u)}{f(u)}\right]\cdot z + y\frac{f'(u)}{f(u)}}\cdot\varphi(u)$$

und, wenn man weiter $f(u)$ durch $\psi(u)$ mittelst der Gleichung

$$f(u) = e^{\int\psi(u)\,du}$$

ausdrückt:

$$x^n = \frac{xz - y}{[ny - x\psi(u)]\,.\,z + y\psi(u)}\cdot\varphi(u)$$

oder

$$zx[nx^{n-1}y - \varphi(u) - x^n\psi(u)] + y[\varphi(u) + x^n\psi(u)] = 0.$$

Hieraus kann z, somit auch ρ gefunden werden.

Ubrigens ergibt sich, wenn man $z = \frac{dy}{dx}$ setzt, die gesuchte Differentialgleichung unmittelbar in der Form:

$$y[\varphi(u) + x^n\psi(u)]\,dx + x[nx^{n-1}y - \varphi(u) - x^n\psi(u)]\,dy = 0.$$

Der Multiplicator derselben ist:

$$\frac{e^{\int\psi(u)\,du}}{u^{n-1}xy}$$

er wird erhalten, wenn man den Ausdruck für ρ mit

$$x[nx^{n-1}y - \varphi(u) - x^n\psi(u)]$$

dividirt.

Beispiel. Es sei

$$\varphi(u) = -2a\,, \qquad \psi(u) = -1\,, \qquad n = 2.$$

Man findet hier die Differentialgleichung

$$y(2a + x^2)\,dx - x(2a + x^2 + 2xy)\,dy = 0$$

und deren integrirenden Factor:

$$\frac{1}{2x^2}\cdot e^{-\frac{x}{y}}.$$

Es ist daher die Gleichung

$$\left[y\left(\frac{a}{x^2}+\frac{1}{2}\right)dx-\left(y+\frac{a}{x}+\frac{x}{2}\right)dy\right]\cdot e^{-\frac{x}{y}}=0$$

unmittelbar integrabel. Setzt man

$$y+\frac{a}{x}+\frac{x}{2}=-t,$$

so geht dieselbe über in die folgende:

$$\left[\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\frac{x}{4}+t\right)dx+t\,dt\right]\cdot e^{\frac{1}{\frac{t}{x}+\frac{a}{x^2}+\frac{1}{2}}}=0$$

welche mit einer von Abel (t. II, p. 32) aufgestellten Gleichung übereinstimmt.[1]

4.

Um die Anwendung des bisherigen Verfahrens und die Art seiner Ergebnisse in einigen weiteren Fällen zu zeigen, nehme man an, es sei die Gleichung

$$\rho=\frac{p}{z}+q=F$$

gegeben, worin p und q zunächst als beliebige Functionen von x und y anzusehen sind.

Da:

$$\frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{p}{z^2},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{z}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial q}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{1}{z}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial x},$$

so folgt aus den Gleichungen (I)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{p}\left[z^2\frac{\partial q}{\partial y}+z\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}\right]&=\frac{dz}{z}\\ \frac{dy}{q}\left[z^2\frac{\partial q}{\partial y}+z\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}\right]&=-z\,dz\end{aligned}\right\}\quad\ldots(1)$$

und hieraus:

$$q z^2 dx+p\,dy=0.\qquad\ldots(2)$$

---

[1] S. auch: „Beiträge zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung" von Minding, Petersburg 1862.

Eine andere Umformung der Gleichungnn (1) ergibt sich, wenn man die erste derselben wie folgt schreibt:

$$\frac{dx}{p}\left(z\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{dx}{p}\cdot z\left(z\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)=\frac{dz}{z}$$

und berücksichtigt, dass $\frac{dx}{p}=-\frac{dy}{qz^2}$ ist. Man erhält dann:

$$qz\left(z\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial x}\right)dx-p\left(z\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right)dy=pq\,dz. \quad \ldots (3)$$

Die Integration dieser Gleichungen lässt sich in einigen besonderen Fällen leicht ausführen.

1. Es sei

$$p=X, \qquad q=Y.$$

Da X, Y wie bisher. Functionen resp. von x, y bedeuten, so folgt aus (3):

$$X'Y.z\,dx-Y'X.z\,dy=XY\,dz,$$

daher als erstes Integral die Gleichung:

$$z=C_1\frac{X}{Y} \qquad \text{oder} \qquad C_1=z\frac{Y}{X},$$

mittelst welcher (2) in die Form

$$C_1^2X\,dx+Y\,dy=0$$

gebracht werden kann. Hieraus erhält man weiter:

$$C_1^2\int X\,dx+\int Y\,dy=C_2$$

oder, wenn $C_2=\varphi(C_1)$, sodann für C_1 der oben angegebene Ausdruck gesetzt wird:

$$\left(z\cdot\frac{Y}{X}\right)^2\int X\,dx+\int Y\,dy=\varphi\left(z\cdot\frac{Y}{X}\right).$$

Dies ist nun wieder die Gleichung, der z genügen muss, damit die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=z$ durch den Factor

$$\varrho=\frac{X}{z}+Y$$

integrabel werde.

2. Es sei

$$p = \frac{a}{X-Y}, \qquad q = \frac{b}{X-Y}.$$

Auch hier lässt sich die Gleichung (3) integriren. Da nämlich

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{aX'}{(X-Y)^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{aY'}{(X-Y)^2}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{bX'}{(X-Y)^2}, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{bY'}{(X-Y)^2}$$

so kann (3) zunächst in die Form

$$bz(bz+a)X'dx + a(bz+a)Y'dy + ba(X-Y)dz = 0$$

gebracht werden, welche, wenn man mit $(bz+a)^2$ dividirt, in die folgende:

$$b\left[\frac{zdX}{bz+a} + \frac{aXdz}{(bz+a)^2}\right] + a\left[\frac{dY}{bz+a} - \frac{bYdz}{(bz+a)^2}\right] = 0$$

übergeht. Es ist also:

$$bd.\frac{zX}{bz+a} + ad.\frac{Y}{bz+a} = 0,$$

woraus sich als erstes Integral die Gleichung

$$\frac{bzX+aY}{bz+a} = C_1 \qquad \text{oder} \qquad z = -\frac{a}{b}\cdot\frac{Y-C_1}{X-C_1}$$

ergibt. Man kann nun, um eine zweite Integration auszuführen, in der Gleichung (2):

$$bz^2dx + ady = 0$$

den vorhin gefundenen Ausdruck für z substituiren und erhält:

$$\frac{adx}{(X-C_1)^2} + \frac{bdy}{(Y-C_1)^2} = 0.$$

Es ist daher

$$a\int\frac{dx}{(X-C_1)^2} + b\int\frac{dy}{(Y-C_1)^2} = \varphi\left[\frac{bzX+aY}{bz+a}\right]$$

die Gleichung, welcher z genügen muss, vorausgesetzt, dass man nach Berechnung der beiden Integrale linker Hand für C_1 den oben angegebenen Ausdruck setze. Es ist dann

$$\rho = \frac{1}{X-Y}\left(\frac{a}{z}+b\right)$$

ein Multiplicator der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = z$.

3. Es sei

$$p = \frac{ay+b}{(ax+ay+2b)(x-y)} \qquad q = \frac{ax+b}{(ax+ay+2b)(x-y)}$$

oder, was dasselbe ist:

$$p = -\frac{a}{2(ax+ay+2b)} + \frac{1}{2(x-y)}$$
$$q = +\frac{a}{2(ax+ay+2b)} + \frac{1}{2(x-y)}.$$

Da hieraus folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0,$$

so lassen sich die Gleichungen (1) auf die Form

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}dx = \frac{dz}{z(1-z^2)}$$
$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial y}dy = \frac{z\,dz}{1-z^2}$$

bringen, und da ferner:

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{a}{ax+ay+2b} - \frac{1}{x-y}$$
$$\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{a}{ax+ay+2b} + \frac{1}{x-y},$$

so ergibt sich, dass

$$\left[\frac{a}{ax+ay+2b} + \frac{1}{x-y}\right]dx = \frac{dz}{z(z^2-1)}$$
$$\left[\frac{a}{ax+ay+2b} - \frac{1}{x-y}\right]dy = \frac{z\,dz}{z^2-1}.$$

Nun findet man durch Addition dieser beiden Gleichungeu:

$$\frac{a(dx+dy)}{ax+ay+2b}+\frac{dx-dy}{x-y}=\frac{2z\,dz}{z^2-1}-\frac{dz}{z}$$

und hieraus durch Integration:

$$(ax+ay+2b)(x-y)=C_1\,\frac{z^2-1}{z}\,.$$

Um ein zweites Integral zu erhalten, mache man von der Gleichung:

$$\frac{2(ax+b)\,dx}{(ax+ay+2b)\,(x-y)}=\frac{dz}{z(z^2-1)}$$

Gebrauch, welche nunmehr in der Form

$$2(ax+b)\,dx=C_1\,\frac{dz}{z^2}$$

geschrieben werden kann und deren Integral

$$ax^2+2bx=-\frac{C_1}{z}+C_2$$

ist. Hierin ist $C_2=\varphi(C_1)$ und

$$C_1=(ax+ay+2b)(x-y)\,.\,\frac{z}{z^2-1}$$

zu setzen. Es folgt also zunächst:

$$ax^2+2bx+\frac{(ax+ay+2b)(x-y)}{z^2-1}=\varphi(C_1)$$

oder, wenn man zu beiden Seiten eine constante Grösse c addirt:

$$\frac{(ax^2+2bx+c)\,z^2-(ay^2+2by+c)}{z^2-1}=\varphi(C_1)\,,$$

wobei

$$C_1=\frac{ax^2+2bx+c-(ay^2+2by+c)}{z^2-1}\,.\,z$$

Wird daher zur Abkürzung:

$$X=ax^2+2bx+c\,,\qquad Y=ay^2+2by+c$$

gesetzt, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{Xz^2-Y}{z^2-1}=\varphi\left[\frac{X-Y}{z^2-1}\cdot z\right] \qquad \ldots (4)$$

welcher z genügen muss, damit die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=z$ durch Beifügung des Factors

$$\rho=\frac{1}{X-Y}\left[\frac{ay+b}{z}+ax+b\right] \qquad \ldots (5)$$

integrabel werde.

Auch dieser ebenso einfache als in seiner Art allgemeine Satz vereinigt mehrere längst bekannte, aber bis jetzt isolirt stehende Resultate in sich, wie nun gezeigt werden soll.

5.

A. In der Gleichung (4) sei

$$\varphi(w)=-w.$$

Man erhält:

$$z=\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}$$

und aus (5)

$$\rho=\frac{(ax+b)\,Y+(ay+b)\,X}{Y(X-Y)}.$$

Bringt man die Differentialgleichung auf die Form:

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y} \qquad \ldots (A)$$

und bezeichnet deren Multiplicator mit ρ_1, so ist

$$\rho_1=\frac{(ay+b)\,X+(ax+b)\,Y}{X-Y},$$

wofür man, da:

$$X-Y=(ax+ay+2b)(x-y)$$

und

$$(ay+b)\,X+(ax+b)\,Y=(ax+ay+2b)(axy+bx+by+c)$$

ist, setzen kann:

$$\rho_1 = \frac{axy+b(x+y)+c}{x-y}.$$

Hiermit ist zugleich auch das algebraische Integral der Differentialgleichung (*A*) gefunden. Denn es besteht der leicht zu beweisende Satz:[1] Ist der Multiplicator einer Differentialgleichung mit getrennten Variabeln bekannt, so ergibt sich auch ein Integral dieser Gleichung, wenn man den Multiplicator einer willkürlichen Constante gleich setzt.

Hienach ist also:

$$\frac{axy+b(x+y)+c}{x-y} = \text{Const.}$$

das (algebraische) Integral der vorliegenden Differentialgleichung.

B. In der Gleichung (4) des vorigen Art. sei

$$\varphi(w) = w.$$

Man findet:

$$z = -\frac{Y}{X} = \frac{dy}{dx}$$

und aus (5)

$$\rho = \frac{(ax+b)\,Y-(ay+b)\,X}{Y(X-Y)}.$$

Wird die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dx}{X}+\frac{dy}{Y} = 0 \qquad \ldots (B)$$

geschrieben und deren Multiplicator mit ρ_1 bezeichnet, so ist

$$\rho_1 = \frac{(ax+b)\,Y-(ay+b)\,X}{X-Y}.$$

[1] S. die Abhandlung: „Über den Multiplicator der allgemeinen elliptischen Differentialgleichung", Sitz. Ber., Bd. 95.

Leicht zu verificiren ist auch die Bemerkung, dass der reciproke Werth (überhaupt jede Function) eines Multiplicators einer Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen wieder ein Multiplicator dieser Gleichung ist.

Da aber

$$(ax+b)\,Y-(ay+b)\,X = (y-x)\,(a^2xy+ab(x+y)+2b^2-ac),$$

so ergibt sich, abgesehen vom Zeichen, der einfachere Ausdruck:

$$\rho_1 = \frac{a^2xy+ab(x+y)+2b^2-ac}{ax+ay+2b} = b+a\,.\,\frac{axy-c}{ax+ay+2b}\,.$$

Hieraus findet man ohne weitere Rechnung das algebraische Integral der Differentialgleichung (B); es ist:

$$\frac{axy-c}{ax+ay+2b} = \text{Const.}$$

C. In der Gleichung (4) sei ferner

$$\varphi(w) = 0.$$

Es folgt:

$$z = \pm\sqrt{\frac{Y}{X}}$$

und aus (5)

$$\rho = \frac{(ax+b)\sqrt{Y}\pm(ay+b)\sqrt{X}}{(X-Y)\sqrt{Y}}\,.$$

Behält man zunächst bloss das obere Zeichen bei und bringt die Differentialgleichung auf die Form

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}, \qquad \dots (C)$$

so ist

$$\rho_1 = \frac{(ax+b)\sqrt{Y}+(ay+b)\sqrt{X}}{X-Y}$$

der Multiplicator dieser Gleichung, der sich übrigens durch einfachere Ausdrücke ersetzen lässt. Da nämlich

$$\rho_1 = \frac{ac-b^2}{(ax+b)\sqrt{Y}-(ay+b)\sqrt{X}},$$

so ist auch

$$\rho_2 = (ax+b)\sqrt{Y}-(ay+b)\sqrt{X}$$

ein Multiplicator, folglich

$$(ax+b)\sqrt{Y}-(ay+b)\sqrt{X}=\text{Const.}$$

ein Integral derselben Gleichung.

Durch Differentiation dieses Integrals ergibt sich ferner:

$$\left[\frac{dx}{\sqrt{X}}-\frac{dy}{\sqrt{Y}}\right]\left[a\sqrt{XY}-(ax+b)(ay+b)\right]=0,$$

woraus eine dritte Form des Multiplicators

$$\rho_3=a\sqrt{XY}-(ax+b)(ay+b)$$

und die Integralrechnung

$$a\sqrt{XY}-(ax+b)(ay+b)=\text{Const.}$$

folgt.

Aus den hier angeführten Formeln erhält man diejenigen, welche der Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

entsprechen, wenn $-\sqrt{Y}$ für $\sqrt{Y}$ gesetzt wird.

Mit Ausnahme der Ausdrücke für ρ sind die algebraischen Integrale der Gleichungen (A), (B), (C), und zwar jedes einzeln mittelst der bekannten Methode von Lagrange hergeleitet, im vierten Bande der Integralrechnung von Euler (Supplem. VIII, §§. 10—33) enthalten.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass jene drei Differentialgleichungen insgesammt aus derselben Gleichung (4) und ihre Multiplicatoren ebenfalls aus der einzigen Gleichung (5) erhalten werden. Hiermit ist zugleich eine neue Herleitung der Additionstheoreme der elementaren Transcendenten gegeben.

6.

Weiter sei noch von einem der Fälle die Rede, in welchen ρ ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner in Bezug auf z vom zweiten Grade sind. Es werde nämlich

$$\rho=\frac{pz+qz^2}{1+az^2}=F$$

gesetzt, wobei p und q zunächst noch unbestimmte Functionen von x und y bedeuten. Da hieraus

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{(1+az^2)^2} \cdot (p+2qz-apz^2)$$

$$z\frac{\partial F}{\partial z} + F = \frac{z}{(1+az^2)^2} \cdot (2p+3qz+aqz^3$$

$$z\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{z}{1+az^2} \cdot \left[\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) z + \frac{\partial q}{\partial y} z^2\right]$$

folgt, so findet man aus (I) die Gleichungen:

$$\frac{dx}{p+2qz-apz^2} + \frac{dz}{z(1+az^2)} \cdot \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) z + \frac{\partial q}{\partial y} z^2} = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) z + \frac{\partial q}{\partial y} z^2\right] dy + \frac{dz}{1+az^2} (2p+3qz+aqz^2) = 0, \qquad \ldots (2)$$

deren Integration in einigen besonderen Fällen leicht geschehen kann. Wird z. B.

$$p = (cx+y)^n, \qquad q = b(cx+y)^n$$

gesetzt, so lässt sich die Gleichung für z finden, was nicht näher gezeigt zu werden braucht.

Von Interesse ist der ebenfalls sehr einfache Fall, welcher den Bedingungen entspricht, dass in der Gleichung (1) die beiden Veränderlichen x und z unmittelbar in getrennter Form erscheinen. Diese Bedingungen sind:

$$p = X\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$2q = X\left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right)$$

$$-ap = X\frac{\partial q}{\partial y}$$

Man kann daraus p und q eliminiren und erhält die Gleichung:

$$aY_1+Xe^{\int\frac{dx}{X}}\left[-Y_1''\int e^{-\int\frac{dx}{X}}dx+Y_2'\right]=0,$$

worin Y_1, Y_2 näher zu bestimmende Functionen von y bezeichnen. Da x und y, sowie X und Y_1, von einander unabhängig sind, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn:

$$Y_1''=0 \qquad \text{und} \qquad Xe^{\int\frac{dx}{X}}=c$$

eine constante Grösse ist. Zunächst muss also:

$$aY_1+cY_2'=0$$

sein. Es folgt aber auch:

$$Y_1'+2\alpha=0, \qquad Y_1+2\alpha y+\beta=0$$

und

$$\frac{X'}{X}+\frac{1}{X}=0, \qquad X+x=0,$$

wobei die Constante der letzteren Integration unbeschadet der Allgemeinheit ausser Acht gelassen wurde.

Zur Bestimmung von Y_2 hat man nun

$$-a(2\alpha y+\beta)+cY_2'=0,$$

daher durch Integration die Gleichung:

$$-a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)+cY_2=0.$$

Da hierin α, β, γ willkürliche Constanten bezeichnen, so kann $c=1$ gesetzt werden, so dass nun

$$X=-x, \quad Y_1=-(2\alpha y+\beta), \quad Y_2=a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)$$

gefunden und p, q, ρ näher bestimmt sind. Man erhält nämlich:

$$p=\frac{2\alpha y+\beta}{x}, \qquad q=\alpha+a\,.\,\frac{\alpha y^2+\beta y+\gamma}{x^2}$$

und

$$\rho=\frac{(2\alpha y+\beta)\,.\,\frac{z}{x}+[\alpha x^2+a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)]\,.\,\frac{z^2}{x^2}}{1+az^2}\,.$$

Die Gleichung (1) aber reducirt sich auf die folgende:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z(1+az^2)},$$

aus welcher man:

$$x = \frac{C_1 z}{\sqrt{1+az^2}}$$

findet.

Werden die Werthe von p und q nun auch in den hievon abhängigen Ausdrücken der Gleichung (2) substituirt, so ergibt sich:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\right) z + \frac{\partial q}{\partial y} z^2$$

$$= -\frac{2\alpha y+\beta}{x^2}(1-az^2) + 2 \, . \, \frac{\alpha x^2 - a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)}{x^3} \, . \, z,$$

und

$$2p+3qz+aqz^2 = 2 \, . \, \frac{2\alpha y+\beta}{x} + \frac{\alpha x^2+a(\alpha y^2 \beta y+\gamma)}{x^2} \, . \, z(3+az^2).$$

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit $\frac{x^3}{z}$ und setze der Abkürzung wegen:

$$P = -(2\alpha y+\beta)(1-az^2)\frac{x}{z} + 2[\alpha x^2 - a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)]$$

$$Q = \frac{1}{1+az^2}\left[2(2\alpha y+\beta)\frac{x^2}{z} + [\alpha x^2 + a(\alpha y^2+\beta y+\gamma)]x(3+az^2)\right].$$

Dann erscheint die Differentialgleichung (2) in der Form

$$Pdy + Qdz = 0$$

und erfüllt die Bedingung der Integrabilität, wenn man, was geschehen muss, in P und Q setzt:

$$x = \frac{C_1 z}{\sqrt{1+az^2}}.$$

Man findet nämlich:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial y} = aC_1(2\alpha y+\beta)\frac{z(3+az^2)}{(1+az^2)^{\frac{3}{2}}} + 4\alpha C_1^2 \frac{z}{(1+az^2)^2}$$

und erhält nun das Integral der vorstehenden Differentialgleichung mittelst der Formel

$$\int P\partial y + \int \left[Q - \frac{\partial \int P\partial y}{\partial z} \right] \partial z = C_2 .$$

Diese stellt die gesuchte Gleichung für z dar, wenn $C_2 = \varphi(C_1)$ und nach Ausführung der Quadraturen

$$C_1 = \frac{x}{z} \sqrt{1 + az^2}$$

gesetzt wird. Das Resultat lässt sich in verschiedene Formen bringen, was aber hier der Kürze wegen nur in einem besonderen Falle geschehen soll.

Es sei nämlich

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -1, \qquad \gamma = 0,$$

wofür

$$P = (1 - az^2) \frac{x}{z} + 2ay, \quad Q = -\frac{1}{1 + az^2} \left[axy(3 + az^2) + 2 \frac{x^2}{z} \right],$$

also die Differentialgleichung

$$\left[(1 - az^2) \frac{x}{z} + 2ay \right] dy - \left[axy(3 + az^2) + 2 \frac{x^2}{z} \right] \frac{dz}{1 + az^2} = 0$$

sich ergibt. Man setze hierin

$$x = \frac{C_1 z}{\sqrt{1 + az^2}}$$

und bemerke, dass:

$$\int P\partial y = C_1 y \frac{1 - az^2}{\sqrt{1 + az^2}} + ay^2, \quad \int \left[Q - \frac{\partial \int P\partial y}{\partial z} \right] \partial z = \frac{C_1^2}{a(1 + az^2)}$$

Dann findet man das zweite Integral:

$$C_1 y \frac{1 - az^2}{\sqrt{1 + az^2}} + ay^2 + \frac{C_1^2}{a} \cdot \frac{1}{1 + az^2} = C_2 .$$

Da hierin wieder $C_1 = \frac{x}{z} \sqrt{1 + az^2}$ und $C_2 = \varphi(C_1)$ zu setzen ist, so folgt:

$$\frac{xy}{z}(1-az^2)+ay^2+\frac{x^2}{az^2}=\varphi\left(\frac{x}{z}\sqrt{1+az^2}\right).$$

Diese Gleichung lässt sich kürzer schreiben. Der Ausdruck linker Hand ist nämlich

$$\frac{xy}{z}(1-az^2)+ay^2-x^2+\frac{1}{a}\left(\frac{x^2}{z^2}+ax^2\right),$$

und das letzte Glied kann, da φ eine willkürliche Function bezeichnet, mit dieser vereinigt werden. Man hat also:

$$\frac{xy}{z}(1-az^2)+ay^2-x^2=\varphi\left(\frac{x}{z}\sqrt{1+az^2}\right).$$

Nun ist aber, wie leicht zu sehen, die linke Seite dieser Gleichung

$$=\frac{1}{z}(x+ayz)(y-xz),$$

daher lässt sich das Resultat dieser Rechnung, wie folgt:

$$(x+ayz)(y-xz)=z\varphi\left(\frac{x}{z}\sqrt{1+az^2}\right) \qquad \ldots(3)$$

darstellen.

Genügt z dieser Gleichung, so ist der für $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=0$ aus der Formel für ρ hervorgehende Ausdruck:

$$\rho=\frac{z}{x^2}\cdot\frac{x+ayz}{1+az^2} \qquad \ldots(4)$$

ein Multiplicator der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=z$.

Beispiel. Möglichst einfach werde

$$\varphi(w)=-b$$

gesetzt, wofür die Gleichung für z in die folgende

$$(x+ayz)(y-xz)+bz=0$$

oder, was dasselbe ist, in:

$$axyz^2+(x^2-ay^2-b)z-xy=0$$

übergeht, welche wieder mit

$$axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-ay^2-b)\frac{dy}{dx}-xy=0$$

gleichbedeutend ist. Diese aber stimmt mit der Differentialgleichung überein, welche von Monge für die Projection der Krümmungslinien des dreiaxigen Ellipsoids aufgestellt wurde und welche derselbe mittelst eines nicht „bloss durch den Erfolg gerechtfertigten", sondern an das bekannte „principe" von Lagrange (Oeuvres, t. II, p. 10) genau sich anschliessenden Verfahrens integrirt hat.

Aus dem Vorstehenden folgt nun ein anderes Verfahren der Integration.

Man löse die Gleichung für $\frac{dy}{dx}$ auf, setze zugleich der Kürze wegen

$$R = 4ax^2y^2 + (ay^2 - x^2 + b)^2,$$

wodurch sich

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2axy} \cdot [ay^2 - x^2 + b \pm \sqrt{R}]$$

ergibt, dann findet man für den integrirenden Factor dieser Differentialgleichung den Ausdruck:

$$\rho = \frac{ay}{x^2}\left[1 \pm \frac{ay^2 + x^2 + b}{\sqrt{R}}\right]$$

und für das Integral derselben die Gleichung

$$ay^2 + Cx^2 + b \pm \sqrt{R} = 0.$$

Die Gleichungen (3) und (4) reichen also aus, um die Aufgabe direct auf die Integration eines vollständigen Differentials zurückzuführen.

Beitrag zur mechanischen Wärmetheorie

von

Viktor v. Lang,
w. M. k. Akad.

Ist bei einer unendlich kleinen umkehrbaren Zustandsänderung die elementare Arbeit gegeben durch

$$dW = Adx + Bdy + \ldots + NdT, \qquad \ldots 1)$$

wo T die absolute Temperatur bedeutet und bestimmen die Variabeln $x, y \ldots T$ den Zustand des Körpers vollkommen, so gelten nach v. Helmholtz[1] die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{\partial F}{\partial x} \\ B &= -\frac{\partial F}{\partial y} \\ &\cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ N &= -\frac{\partial F}{\partial T} - S. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 2)$$

In diesen Gleichungen bedeutet S die Entropie und F ist die von Helmholtz eingeführte freie Energie. Bei den Differentiationen nach einer der Variabeln $x, y \ldots T$ sind immer die übrigen als Constante zu betrachten.

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt sogleich eine Anzahl Beziehungen von der Form

---

[1] Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. Berl. Monatsber. 1882, Ges. Abh. Bd. 2, S. 958.

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \ldots 3)$$

wo für die Differentiationen dieselbe Bemerkung wie früher gilt.

Von den letzten Gleichungen soll jetzt Anwendung gemacht werden, um einige Beziehungen zu beweisen, die von J. J. Thomson[1] zwischen dem Dampfdruck und anderen physikalischen Grössen auf einem Wege bewiesen wurden, der nur von den Formeln der Dynamik Gebrauch macht.

Dampfdruck und Oberflächenspannung. Damit wir es, wie zur Anwendung dieser Gleichungen nöthig ist, mit einem umkehrbaren Vorgange zu thun haben, denken wir uns einen Wassertropfen freischwebend in einem Cylinder, welcher durch einen reibungslosen Stempel geschlossen ist. Im Cylinder befindet sich ausser dem Wassertropfen nur Wasser, und es muss der auf dem Stempel lastende Druck p hienach regulirt sein. Das ganze vom Stempel abgeschlossene Volumen bezeichnen wir mit v; wächst dasselbe durch eine unendlich kleine Verrückung des Stempels um dv, so ist die von dem ganzen System geleistete Arbeit

$$dW = p dv + \alpha dO, \qquad \ldots 4)$$

indem die gleichzeitige Verdampfung des Wassertropfens eine Verkleinerung seiner Oberfläche in dO bewirkt, was einer Arbeit αdO der Oberflächenspannung entspricht. Nach den Gleichungen 3) ist nun die Temperatur als constant vorausgesetzt

$$\left(\frac{\partial p}{\partial O}\right)_v = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)_O, \qquad \ldots 5)$$

wo die Indices v und O bedeuten, dass bei der Differentiation beziehungsweise auch diese Grössen als Constanten zu betrachten sind. Statt der letzten Gleichung kann man aber auch schreiben

$$\left(\frac{\partial p}{\partial O}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_O = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}\right)_O \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_O = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_O. \qquad \ldots 6)$$

---

[1] Anwendungen der Dynamik auf Physik und Chemie. Autorisirte Übersetzung, Leipzig 1890.

Da wir den Wassertropfen als eine Kugel von Radius r betrachten, so ist

$$O = 4\pi r^2, \quad \frac{dO}{dr} = 8\pi r, \qquad \ldots 7)$$

und ferner ist, sobald r constant wird, auch O constant, so dass wir für Gleichung 6) auch erhalten:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_r = \frac{1}{8\,r\pi}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_r \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_r. \qquad \ldots 8)$$

Nennen wir nun g das Gesammtgewicht von Wasser und Dampf, w das specifische Volumen des Dampfes, ω aber das des Wassers, so ist

$$v = \frac{4\pi r^3}{3} + w\left(g - \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\omega}\right). \qquad \ldots 9)$$

Nun kann man aber für den Wasserdampf bei geringem Druck dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze zu Folge setzen

$$pw = RT, \qquad \ldots 10)$$

so dass die letzte Gleichung

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{RT}{p}\left(g - \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\omega}\right) \qquad \ldots 11)$$

wird. Hieraus erhält man mit Rücksicht auf Gleichung 10) ferner

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_r &= -4\pi r\frac{p}{w}\left(\frac{w-\omega}{\omega}\right) : \left(g - \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\omega}\right) \\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_r &= -\frac{w}{p}\left(g - \frac{4}{3}\frac{\pi r^3}{\omega}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \ldots 12)$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in Gleichung 8) aber liefert

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_r = \frac{w-\omega}{2\,\omega}r. \qquad \ldots 13)$$

Da immer $w > \omega$, so ist der rechte Theil dieser Gleichung eine wesentlich negative Grösse, und wir sehen hieraus, dass ein Wachsen der Oberflächenspannung den Dampfdruck erhöhen

muss. Um die ganze Änderung Δp des Dampfdruckes durch die Oberflächenspannung α zu finden, wäre die letzte Gleichung von 0 bis α zu integriren. Da es sich in diesem Intervalle nur um sehr kleine Variationen des Druckes p handelt, so kann man näherungsweise w als constant betrachten und erhält dann

$$p = \frac{(w - \omega) r}{2 \omega} \alpha + \text{Const.} \qquad \ldots 14)$$

Für $\alpha = 0$ wird der Druck gleich $p - \Delta p$, die letzte Gleichung gibt daher

$$\Delta p = \frac{2 \omega \alpha}{(w - \omega) r} = \frac{2 \omega \alpha}{w r} \text{ appr.} \qquad \ldots 15)$$

Auf dieselbe Weise lässt sich die Druckänderung

$$\Delta p = -\frac{2 \omega \beta}{w r} \qquad \ldots 16)$$

in einem Capillarrohr finden, wenn β die Arbeit ist, die bei Verkleinerung der Wandschichte per Flächeneinheit geleistet wird. Die letzten Formeln wurden von Sir W. Thomson[1] bewiesen.

Dampfdruck und Elektrisirung. Es sei nun der Wassertropfen elektrisch. Wir nehmen an, er enthalte die Elektricitätsmenge e, von welcher durch die oberflächliche Verdampfung nichts verloren gehe. Da das Selbstpotential dieser Elektricität gleich $e^2/2r$ ist, so wird jetzt bei unendlich geringer Verdampfung die Arbeit

$$d W = p dv - \frac{e^2}{2 r^2} dr \qquad \ldots 17)$$

geleistet. Die Arbeit der Oberflächenspannung kann man, wie ersichtlich, bei Anwendung der Formeln 3) auf die Variabeln v und r gleich von vornherein vernachlässigen. Mit Bezug auf die letzteren Grössen muss aber sein

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_v = -\left(\frac{\partial e^2 / 2 r^2}{\partial v}\right)_r = -\frac{1}{2 r^2} \left(\frac{\partial e^2}{\partial v}\right)_r. \qquad \ldots 18)$$

[1] On the equilibrium of vapours at a curved surface of liquid. Edinb. Proc., v. 7 (1870), p. 66. Phil. Mag. IV, v. 42, p. 448. Andere Beweise siehe bei Fitzgerald ib. V, v. 8, p. 382; R. v. Helmholtz, Wied. Ann. Bd. 27, S. 522; Warburg ib., Bd. 28, S. 394; Stefan ib., Bd. 29, S. 655; Galitzine ib., Bd. 35, S. 200.

Hieraus erhält man durch Multiplication mit $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_r$ und mit Rücksicht auf die auch hier geltenden Gleichungen 12)

$$\left(\frac{\partial e^2}{\partial p}\right)_r = -2r^2\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_r = -8\pi r^4 \frac{w-\omega}{\omega}, \qquad \ldots 19)$$

welche Gleichung lehrt, dass durch die Elektrisirung des Wassertropfens der Dampfdruck erniedrigt wird. J. J. Thomson schliesst hieraus, dass elektrische Regentropfen grösser sind als unelektrische, da die Verminderung des Dampfdruckes eine Verminderung der Dichte des Dampfes und daher eine Condensation nach sich zieht.

Für die ganze durch Elektrisirung bewirkte Druckänderung findet man wieder näherungsweise die schon von Blondlot (J. de phys. II., v. 3, p. 442) gegebenen Formel

$$\Delta p = -\frac{\omega}{w}\,\frac{e^2}{8\pi r^2}\,. \qquad \ldots 20)$$

Dampfdruck und elektrische Influenz. Der Wassertropfen soll sich jetzt bloss in einem elektrischen Felde befinden, das von der Elektricitätsmenge e im Punkte P herrührt. Dieselbe übt auf den Wassertropfen das Potential

$$U = -\frac{e^2 r^3}{l^2(l^2-r^2)} \qquad \ldots 21)$$

aus, wenn l die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte des Wassertropfens bedeutet. Setzen wir noch

$$-N = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{3l^2-5r^2}{(l^2-r^2)^2}\,\frac{e^2 r^2}{l^2}, \qquad \ldots 22)$$

so wird für eine elementare Zustandsänderung

$$dW = pdv - Ndr. \qquad \ldots 23)$$

Wir haben daher

$$\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_v = -\left(\frac{\partial N}{\partial v}\right)_r, \qquad \ldots 24)$$

wobei auch die Temperatur als Constante zu betrachten ist. Die letzte Gleichung gibt mit Rücksicht auf die Gleichungen 12)

$$\left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_r = -\left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)_v \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_r = -4r^2\frac{w-\omega}{\omega} \qquad \ldots 25)$$

und daher für die Änderung des Dampfdruckes näherungsweise

$$\Delta p = -\frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{\omega}{w}\,N. \qquad \ldots 26)$$

Ist nun noch r klein gegen l, so wird aus Gleichung 21) $N = 3e^2\pi^2 | l^2$ und somit

$$\Delta\,', = -\frac{3}{4\pi}\,\frac{\omega}{w}\,\frac{e^2}{l^4} = -\frac{3\omega}{4\pi w}F^2, \qquad \ldots 27)$$

wo F die Kraft ist, welche der Punkt P im Mittelpunkte des Tropfens ausübt. Ersichtlich gilt nun die letzte Gleichung auch, wenn die Kraft F nicht von einem einzigen Punkte, sondern von einer beliebigen Vertheilung elektrischer Massen herrührt, wenn nur der Radius r immer als klein gegen die Entfernungen dieser Massen betrachtet werden kann.

XXIII. SITZUNG VOM 13. NOVEMBER 1890.

Der Secretär legt den erschienenen Bericht der prähistorischen Commission der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Bd. I, Nr. 2, vor.

Ferner legt der Secretär im Namen des Verfassers die erste Lieferung des Werkes: „Ausführliches Handbuch der Photographie," von Dr. J. M. Eder, Director der k. k. Versuchsanstalt für Photographie und Reproductionsverfahren in Wien, vor.

Der Secretär bringt weiters ein Dankschreiben des Herrn Dr. Th. Pintner in Wien der Classe zur Kenntniss, für die demselben gewährte Reisesubvention zur Vornahme von morphologischen Untersuchungen an der Cestodenfamilie *Tetrarhynchus* in italienischen Häfen.

Herr Prof. A. Adamkiewicz an der k. k. Universität in Krakau übersendet eine Abhandlung: „Über das Wesen des Hirndrucks und die Principien der Behandlung der sogenannten Hirndrucksymptome" als vorläufigen Schlussartikel seiner beiden in den Schriften der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften erschienenen Abhandlungen über denselben Gegenstand.

Herr Dr. Eduard Mahler in Wien übersendet eine Notiz, betreffend ein Schreiben von Prof. Brugsch aus Berlin (dat. 8. November 1890).

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben von Dr. Justinian Ritter v. Froschauer in Wien behufs Wahrung der

Priorität vor, mit der Aufschrift: „Über auf chemischem Wege dargestellte krystalloide Substanzen, welche das Individuum für eine Infectionskrankheit immun machen."

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine von Herrn Regierungsrath Prof. Fr. Mertens in Graz ausgeführte Notiz: „Über einen Satz der höheren Algebra."

Herr Dr. Richard Rit. v. Wettstein, Privatdocent an der Wiener Universität, überreicht eine vorläufige Mittheilung, unter dem Titel: „Über die fossile Flora der Höttinger Breccie".

Über einen Satz der höheren Algebra

von

F. Mertens.

Abel hat zuerst den Satz [1] bewiesen, dass die reine Gleichung

$$x^p - A = 0,$$

deren Grad eine Primzahl ist — in einem bestimmten Rationalitätsbereiche, welchem auch A angehört — nur dann reductibel sein kann, wenn sie eine in demselben Sinne rationale Wurzel besitzt, oder, was dasselbe ist, A eine p^{te} Potenz ist. Es soll hier ein arithmeticher Beweis dieses Satzes mitgetheilt werden.

Es seien

$$x_1,\ x_2, \ldots x_n$$

Veränderliche,

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2, \ldots \Gamma_n$$

die durch die Identität

$$(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = x^n - \Gamma_1 x^{n-1} + \Gamma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \Gamma_n$$

definirten elementaren symmetrischen Functionen derselben und

$$f(x) = x^n - \Gamma_1 x^{n-1} + \Gamma_2 x^{n-2} - \ldots \pm \Gamma_n.$$

Dividirt man die Potenz x^p, in welcher $p > n$ angenommen wird, durch $f(x)$ bis man zu einem Reste $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in x

$$R = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \ldots + r_{n-1} x^{n-1}$$

---

[1] In der Abhandlung „Démonstration de l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales qui passent le quatrième degré", §. 11, Crelle, Bd. 1, Oeuvres compl., Bd. 1. Vergl. Kronecker, Monatsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1879, Kneser in Crelle's Journal, Bd. 106.

gelangt, so sind $r_0, r_1, \dots r_{n-1}$ ganze ganzzahlige Functionen der Ausdrücke Γ und man hat eine Identität von der Form

$$x^p = Qf + R. \tag{1}$$

Aus derselben gehen, indem man x der Reihe nach durch jede der Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ ersetzt, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_1^p &= r_0 + r_1 x_1 + r_2 x_1^2 + \dots + r_{n-1} x_1^{n-1} \\
x_2^p &= r_0 + r_1 x_2 + r_2 x_2^2 + \dots + r_{n-1} x_2^{n-1} \\
&\vdots \\
x_n^p &= r_0 + r_1 x_n + r_2 x_n^2 + \dots + r_{n-1} x_n^{n-1}
\end{aligned}$$

hervor, deren Multiplication zu der Identität

$$\Gamma_n^p = r_0^n + S$$

führt; hierin ist S eine Summe von Ausdrücken von der Form

$$r_0^\lambda r_1^\alpha r_2^\beta \dots r_{n-1}^\varepsilon s,$$

in welchen

$$\alpha + \beta + \dots + \varepsilon > 0$$

und s eine ganze ganzzahlige symmetrische Function der Variablen $x_1, x_2, \dots x_n$ bezeichnet. Denkt man sich alle Functionen s durch die elementaren symmetrischen Functionen Γ dargestellt, so kann man dem Ausdrucke S die Gestalt

$$S = r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \dots + r_{n-1} \varphi_{n-1}$$

geben, wo $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$ ganze ganzzahlige Functionen von $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n$ bezeichnen, und hat die Identität

$$\Gamma_n^p = r_0^n + r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + \dots + r_{n-1} \varphi_{n-1}. \tag{2}$$

Soll nun die Function $x^p - A$ durch die Function

$$g(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots \pm a_n$$

theilbar sein, deren Coëfficienten $a_1, a_2, \dots a_n$ dem betreffenden Rationalitätsbereiche angehören, so denke man sich in den Identitäten 1) und 2) die Ausdrücke $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots \Gamma_n$ durch die Coëfficienten $a_1, a_2, \dots a_n$ von g ersetzt, was erlaubt ist und wodurch

$$Q, r_0, r_1, \dots r_{n-1}, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}$$

in

$$Q', b_0, b_1, \ldots b_{n-1}, c_1, c_2, \ldots c_{n-1}$$

übergehen mögen. Man erhält dann die Identität in x

$$x^p = Q'g(x) + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

und die Gleichung

$$a_n^p = b_0^n + b_1 c_1 + b_2 c_2 + \ldots + b_{n-1} c_{n-1}.$$

Aus ersterer folgt

$$x^p - A - Q'g = b_0 - A + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

und da $x^p - A$ durch g theilbar sein soll, so muss auch die Function

$$b_0 - A + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1}$$

durch g theilbar und demnach identisch $= 0$ sein. Man hat also

$$b_1 = b_2 = \ldots + b_{n-1} = 0$$
$$b_0 = A$$

und die Gleichung 3) geht in

$$a_n^p = A^n$$

über.

Ist nun $n < p$, so kann man Zahlen μ, ν bestimmen, welche der Gleichung

$$n\nu = 1 + p\mu$$

genügen, und es wird[1]

$$A = \frac{A^{n\nu}}{A^{p\mu}} = \left(\frac{a_n^\nu}{A^\mu}\right)^p.$$

---

[1] Vergl. die Behandlung der Gleichung $q_\mu^n p^\mu = p_1$ bei Abel in §. 10 der angezogenen Abhandlung.

Zur Theorie der Mascheroni'schen Constructionen

von

August Adler,

Supplent an der k. k. Staatsrealschule in Klagenfurt.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1890.)

Mascheroni hat, wie man weiss, in seinem berühmten Werke: „La geometria del compasso, Pavia 1797"[1] zuerst gezeigt, dass man alle geometrischen Constructionen, die gewöhnlich mit Hilfe des Zirkels und der geraden Linie ausgeführt werden, also alle geometrischen Constructionsaufgaben zweiten Grades, nur mit Hilfe des Zirkels allein lösen kann, ohne ein einziges Mal die gerade Linie zu Hilfe nehmen zu müssen.

Die Constructionen, welche Mascheroni lehrte, sind zwar sehr einfach, aber mitunter so künstlich, dass beim Studium seines Werkes wohl in Jedermann der Wunsch rege wird, diese Constructionen oder wenigstens ähnliche aus einem einheitlichen Grundgedanken heraus zu entwickeln. Zu diesem Zwecke denkt der Leser wohl gleich an das Princip der reciproken Radien, welches ja für die ganze Kreislehre von so hoher Bedeutung ist. Bei näherer Betrachtung findet man auch, wie im Folgenden dargelegt werden soll, dass das Princip der reciproken Radien Alles leistet, was man in unserem Falle nur wünschen kann.

I. Bekanntlich sagt man, zwei Punkte P und P' sind einander bezüglich des Kreises k nach dem Princip der reciproken Radien zugeordnet, oder sind invers, wenn die Relation besteht:

---

[1] Der wesentliche Inhalt dieses Werkes ist dargestellt in der trefflichen, kurzen Schrift des Herrn Prof. Dr. J. Frischauf. „Die geometrischen Constructionen von L. Mascheroni und J. Steiner". Graz, 1869.

$$\overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2,$$

wobei r der Radius von k ist und O den Mittelpunkt von k bedeutet. Ist P gegeben, so construirt man P' gewöhnlich als Schnittpunkt der Verbindungslinie OP mit der Polaren von P bezüglich k.

Für unsere Zwecke ist es aber nöthig, den Punkt P' nur mit Hilfe des Zirkels allein zu finden; dies ist auf einem sehr einfachen Wege möglich, wie Fig. 1 zeigt: Man schneidet nämlich zu diesem Zwecke zunächst den Kreis k durch den Kreis PO in S_1 und S_2; die zwei Kreise S_1O und S_2O schneiden sich dann schon in dem gesuchten Punkte P', welcher dem gegebenen Punkte P nach dem Princip der reciproken Radien bezüglich k zugeordnet ist.

Der Beweis für die Richtigkeit unserer Construction ergibt sich ohneweiters aus der Ähnlichkeit der beiden gleichschenkeligen Dreiecke S_1OP und S_1OP'.

Auf dieser Construction des Punktes P' beruht die Anwendung des Princips der reciproken Radien zu unserem Zwecke; es verdient dabei hervorgehoben zu werden, dass unsere Construction vielleicht die einfachste ist um P' zu finden, einfacher jedenfalls als die oben angedeutete mit Hilfe der Polaren.

Liegt P ausserhalb von k, so ist unsere Construction jederzeit anwendbar; liegt dagegen P innerhalb von k, so bleibt diese Construction nur solange verwendbar, solange die Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte O grösser als der halbe Radius von k ist; wie man sich im entgegengesetzten Falle einfach helfen kann, soll aber erst später gezeigt werden.

II. Wenn man zu allen Punkten eines ebenen Gebildes bezüglich k die nach dem Principe der reciproken Radien zugehörigen Punkte construirt, so erhält man das zum ersten Gliede „inverse Gebilde“.

Einer Geraden G, welche nicht durch O hindurchgeht, entspricht dabei bekanntlich ein Kreis G', welcher durch O geht; geht aber G durch O, so entspricht G sich selbst.

Einem beliebigen, nicht durch O gehenden Kreise K entspricht bekanntlich nach dem Princip der reciproken Radien ein zweiter Kreis K', welcher so liegt, dass der Mittelpunkt O der äussere Ähnlichkeitspunkt von K und K' ist.

Die Punkte des Kreises k entsprechen sich selbst. Sind F_1 und F_2 zwei beliebige Linien, F'_1 und F'_2 die ihnen bezüglich k nach dem Principe der reciproken Radien entsprechenden, so schneiden sich F'_1 und F'_2 unter denselben Winkeln, unter welchen F_1 und F_2 sich schneiden.

III. Besteht eine Figur nur aus geraden Linien und aus Kreisen (wie jede geometrische Construction zweiten Grades), so wird ihre bezüglich k inverse Figur nur aus Kreisen bestehen, kann also mit dem Zirkel allein gezeichnet werden. Da ausserdem der Übergang von einem Punkte P zu seinem reciproken P' (Art. I) nur mit Hilfe des Zirkels allein ausgeführt werden kann, so ist unsere Aufgabe eigentlich schon gelöst, das heisst, es ist damit schon eine Methode angegeben, nach welcher man alle geometrischen Constructionsaufgaben nur mit Hilfe des Zirkels allein lösen kann: Soll man nämlich eine geometrische Aufgabe nur mit Hilfe des Zirkels durchführen, so denke man sich diese Aufgabe auf gewöhnlichem Wege gelöst, wodurch man vor dem geistigen Auge eine Figur F erhält, welche aus geraden Linien und aus Kreisen besteht; nun zeichnet man möglichst passend den Grundkreis k, hierauf die zu F nach dem Principe der reciproken Radien zugehörige Figur F' vollständig; endlich zeichnet man zu dem so erhaltenen Resultate von F' das inverse, wodurch man das gewünschte Resultat erhält. Alle dabei auftretenden Constructionen lassen sich nach Obigem nur mit Hilfe des Zirkels allein ausführen.

Den Kreis k selbst wird man natürlich möglichst vortheilhaft wählen; in den meisten Fällen wird es übrigens angezeigt sein, die ganze aufzulösende Aufgabe F in mehrere einzelne zu zerlegen, welche man jede für sich nach Obigem löst, wobei man immer dem Vorgange folgt, welchen man bei unbeschränktem Gebrauche des Zirkels und des Lineals einschlagen würde.

IV. Bei der thatsächlichen Durchführung unserer eben erörterten Methode, alle geometrischen Constructionsaufgaben mit alleiniger Benützung des Zirkels zu lösen, kommen jedoch einzelne Aufgaben wiederholt vor, welche hier dargelegt werden sollen.

Die ersten drei der im Folgenden angeführten Aufgaben wurden zwar schon von Mascheroni angegeben, sie mussten aber der Vollständigkeit halber hier nochmals wiederholt werden.

(Das einzige Hilfsmittel, welches bei den nachfolgenden Aufgaben verwendet werden darf, ist selbstverständlich nur der Zirkel.)

1. Aufgabe: Die Strecke $\overline{AB}$, welche durch ihre Endpunkte gegeben ist, soll verdoppelt werden. (Fig. 2).

Man beschreibe den Kreis AB mit dem Mittelpunkte B und schreibe demselben ein regelmässiges Sechseck ein; dadurch erhält man schon den gesuchten Punkt C.

Indem man BC auf dieselbe Weise von C aus nach rechts hin aufträgt, erhält man das Dreifache der Strecke $\overline{AB}$; analog kann $\overline{AB}$ beliebig oft vervielfältigt werden.

2. Aufgabe: Von einer Geraden G sind zwei Punkte A und B gegeben. Man soll den Punkt N' suchen, welcher zu einem gegebenen Punkte N bezüglich G symmetrisch liegt.

Die Lösung dieser Aufgabe ersicht man aus Fig. 3.

3. Aufgabe. Die Schnittpunkte eines gezeichneten Kreises K mit einer Geraden G sind zu finden, wenn G durch zwei Punkte A und B gegeben ist und wenn ausserdem G nicht durch den Mittelpunkt des Kreises K geht.

Man bestimme zum Zwecke der Lösung dieser Aufgabe den Punkt O', welcher bezüglich G mit dem Mittelpunkte O von K symmetrisch liegt; beschreibt man nun aus O' einen Kreis, welcher mit K gleichen Radius hat, so schneidet er K schon in den gesuchten Punkten.

Geht G durch O, so wird dies Verfahren unanwendbar; man findet dann die gesuchten Schnittpunkte, indem man zu G und K die bezüglich eines beliebigen Kreises inverse Figur zeichnet (siehe diesbezüglich Aufgabe 4 und 5).

4. Aufgabe: Es ist der Mittelpunkt M desjenigen Kreises G' zu bestimmen, welcher der Geraden G bezüglich des Kreises k nach dem Princip der reciproken Radien zugeordnet ist.

Der gesuchte Punkt M wird gefunden, indem man zunächst den Punkt M' aufsucht, welcher mit O bezüglich G symmetrisch liegt; M' und M sind dann bezüglich k zugehörige Punkte, folglich kann M aus M' nach Art. I gefunden werden.

Die Richtigkeit dieser Construction ist leicht einzusehen: Sind nämlich (Fig. 4) P und P' die zwei auf der Linie OM

liegenden Punkte von G und G', so ist $\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{OP'}$ und folglich[1] $\overline{OM'} = 2 \times \overline{OP}$, wenn M und M' zugehörige Punkte sind.

Mit Hilfe der Aufgabe 4 kann man nun leicht den Kreis G' construiren, welcher der Geraden G bezüglich k entspricht; G braucht dabei gar nicht gezeichnet vorzuliegen, es genügt, wenn man von G nur zwei Punkte A und B kennt (Aufgabe 3).

5. **Aufgabe.** Es ist der Mittelpunkt M desjenigen Kreises K' zu construiren, welcher dem Kreise K bezüglich k nach dem Principe der reciproken Radien entspricht.

Man geht zu diesem Zwecke so vor: Man sucht zunächst denjenigen Punkt O', welcher dem Mittelpunkte O des Kreises k bezüglich K nach dem Principe der reciproken Radien zugeordnet ist; der gesuchte Punkt M ist dann dem Punkte O' bezüglich k zugeordnet und kann damit leicht gefunden werden.

Der Beweis dafür ergibt sich leicht bei Berücksichtigung des Umstandes, dass O Ähnlichkeitspunkt von K und K' ist (Fig. 5). Aus den ähnlichen rechtwinkeligen Dreiecken OMQ' und OQO' folgt nämlich:

$$OM : OQ = OQ' : OO'$$

also

$$OM \times OO' = OQ \times OQ';$$

da nun Q und Q' einander bezüglich k zugeordnet sind, so müssen also auch M und O' einander zugeordnet sein bezüglich des Kreises k; O' ist aber dabei derjenige Punkt, welcher dem Mittelpunkte O bezüglich K nach dem Principe der reciproken Radien zugeordnet ist.

6. **Aufgabe:** Zu einem innerhalb von k gelegenen Punkt P den inversen Punkt P' zu finden.

Ist der Abstand des gegebenen Punktes P von dem Mittelpunkte O von k grösser als der halbe Radius von k, so kann man die im Artikel I angegebene Fundamentalconstruction verwenden. Ist OP aber kleiner als der halbe Radius von k, so vervielfältige man zunächst $\overline{OP}$ so oft (z. B. n-mal), bis man einen Punkt Q erhält, der von O um mehr als den halben Radius absteht; zu Q construirt man nun nach Artikel I den zugehörigen Punkt Q'; der gesuchte Punkt P' steht dann n-mal soweit von O ab, als Q'.

---

[1] Es muss nämlich $\overline{OM} \times \overline{OM'} = \overline{OP} \times \overline{OP'} = r^2$ sein.

7. Aufgabe: Eine Strecke $\overline{AB}$ sei in n gleiche Theile zu theilen.

Man trägt zunächst die Strecke $\overline{AB}$ n mal hintereinander auf, wodurch man als Endpunkt einen Punkt P erhält; sucht man nun den zu P zugehörigen Punkt P' bezüglich jenes Kreises, welcher A als Mittelpunkt und die Strecke $\overline{AB}$ als Radius hat, so ist $\overline{PP'} = \frac{1}{n} \times \overline{AB}$.

Diese Construction gibt schon Mascheroni an, ohne das Princip der reciproken Radien zu verwenden; seine Darstellung erscheint daher auch recht künstlich.

V. Mit Hilfe der eben gelösten Aufgaben ist man nun nach dem im Artikel III Gesagten leicht im Stande, jede geometrische Constructionsaufgabe nur mit Hilfe des Zirkels allein zu lösen, indem man dabei stets jene Lösung vor Augen hält, die man bei uneingeschränktem Gebrauche des Zirkels und des Lineals einschlagen würde.

VI. Man kann übrigens zur Auflösung aller geometrischen Constructionsaufgaben mit alleiniger Zuhilfenahme des Zirkels noch einen ganz anderen Weg einschlagen:

J. Steiner hat nämlich, wie man weiss, in seinem berühmten Werke „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mit Hilfe der geraden Linie und eines festen Kreises“ gezeigt, dass alle geometrischen Constructionen nur mit Hilfe der geraden Linie ausgeführt werden können, sobald in der Zeichenebene ein fester Kreis sammt Mittelpunkt zur Benützung gezeichnet vorliegt. Denkt man sich eine geometrische Aufgabe auf diese Steiner'sche Art gelöst, so entsteht eine Figur F, welche ausser dem festen Kreise nur aus geraden Linien besteht; construirt man nun zu F bezüglich des festen Kreises die nach dem Princip der reciproken Radien zugeordnete Figur F', so besteht diese nur aus Kreisen, welche sämmtlich durch den Mittelpunkt des festen Kreises hindurchgehen. F' kann daher ebenso wie die Übergangsconstruction von F zu F' nur mit Hilfe des Zirkels allein gezeichnet werden.

Damit hat man eine andere Methode, um alle geometrischen Aufgaben mit Hilfe des Zirkels allein durchzuführen, nämlich die, dass man bei der Lösung einer Aufgabe der Steiner'schen

Auflösungsweise dieser Aufgabe Schritt für Schritt folgt, aber immer nur die inversen Figuren bezüglich des festen Steiner'schen Kreises zeichnet.

Diese Methode ist wohl umständlicher, als die im Artikel III angegebene, sie ist aber aus einem gewissen Grunde besonders bemerkenswerth:

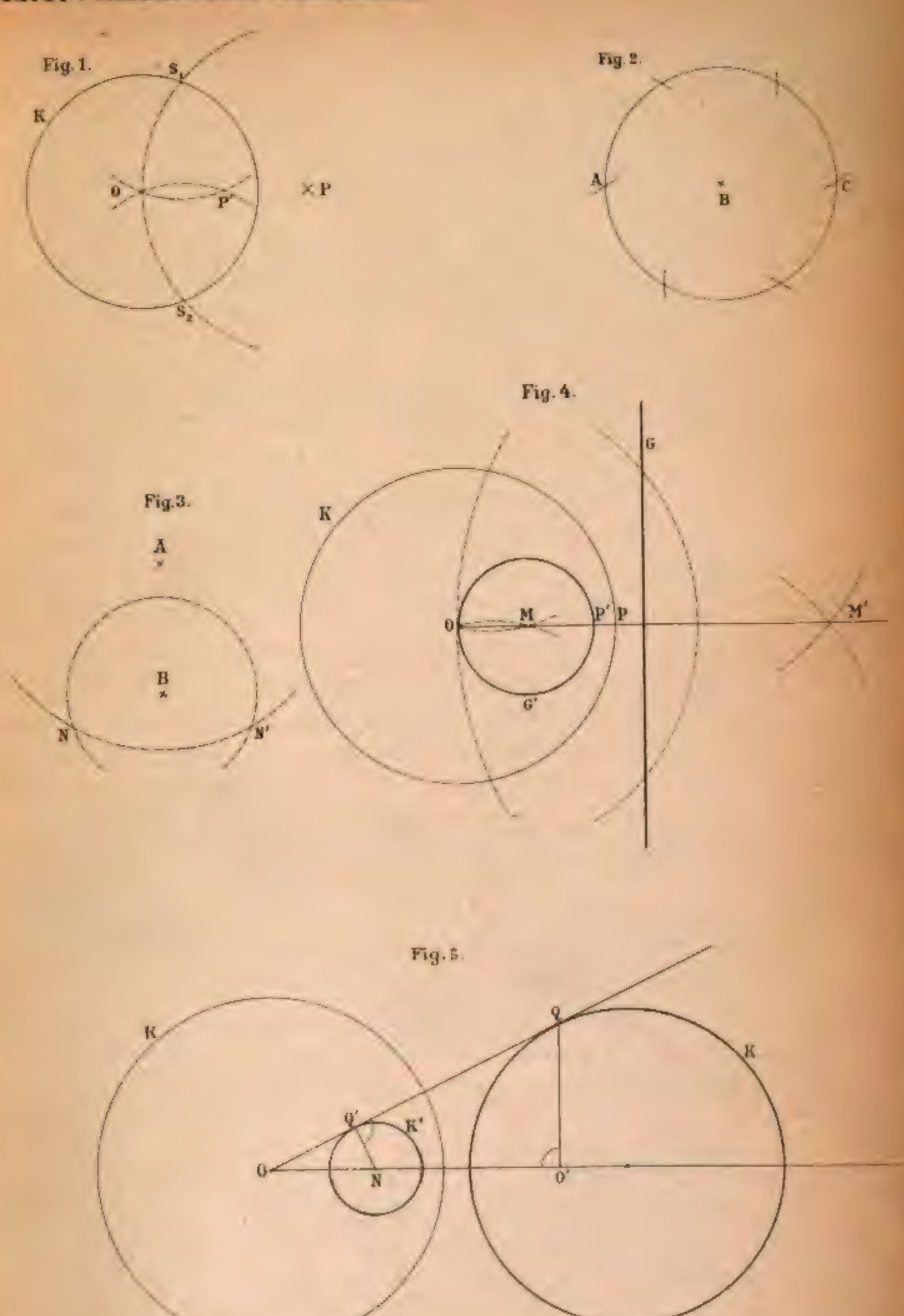
Folgt man nämlich der Steiner'schen Auflösungsweise beim Entwerfen der Fig. F', so gehen alle Kreise der Fig. F' durch den Mittelpunkt O des festen Kreises k, und da auch die Kreise, welche den Übergang von F' zu F und umgekehrt herstellen, durch O gehen (siehe Fig. 1), so kann man folgenden Satz aussprechen:

Es ist nicht nur möglich, wie schon Mascheroni gezeigt hat, alle geometrischen Constructionen mit alleiniger Hilfe des Zirkels auszuführen, sondern man kann noch die Bedingung hinzufügen, dass alle in der Construction vorkommenden Kreise mit Ausnahme eines einzigen durch ein und denselben, willkürlichen, Punkt hindurchgehen sollen.

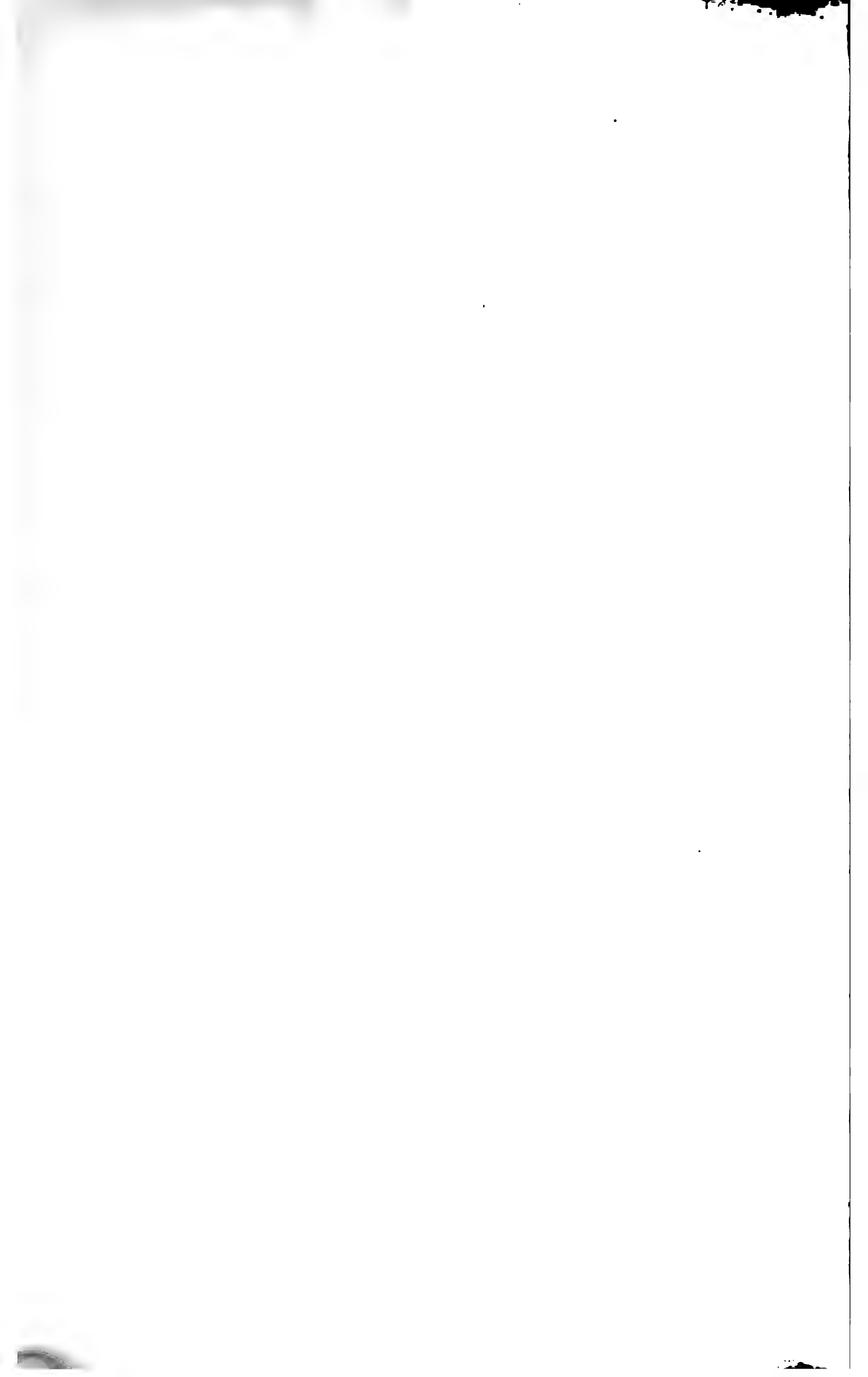
VI. Verfasser dieser Arbeit hat an einem anderen Orte[1] gezeigt, dass alle geometrischen Constructionen nur mit Hilfe eines beweglichen rechten oder spitzen Winkels, oder eines Lineals (zwei parallele Linien in constantem Abstande) allein ausgeführt werden können. Ausgehend von diesen Constructionen kann man nach dem Princip der reciproken Radien wieder Methoden finden, nach welchen man bei alleiniger Benützung des Zirkels vorgehen kann. Darauf soll aber hier nicht weiter eingegangen werden. Man sieht aber, dass man nicht nur alle geometrischen Constructionsaufgaben zweiten Grades mit Hilfe des Zirkels allein ausführen, sondern dass man auch noch verschiedenartige Bedingungen für die zu zeichnenden Kreise stellen kann.

---

[1] A. Adler, Über die zur Ausführung geometrischer Constructionen nothwendigen Hilfsmittel. Diese Berichte, Bd. XCIX, Abth. II.



Lith. Anstalt v. J. Barth Funfhaus Wien



XXIV. SITZUNG VOM 20. NOVEMBER 1890.

Der Secretär legt das eben erschienene Heft VI—VII (Juni—Juli) des 99. Bandes, Abtheilung I. der Sitzungsberichte vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Rollett in Graz übersendet für die Denkschriften eine Abhandlung unter dem Titel: „Untersuchungen über die Contraction und Doppelbrechung der quergestreiften Muskelfasern".

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Rollett in Graz übersendet ferner eine Abhandlung des Assistenten am physiologischen Institute der Grazer Universität Herrn Dr. O. Zoth: „Versuche über die beugende Structur der quergestreiften Muskelfasern".

Herr Prof. Dr. A. Adamkiewicz in Krakau übersendet folgende Notiz: „Weitere Beobachtungen über die Giftigkeit der bösartigen Geschwülste (Krebse)."

Der Secretär legt ein versiegeltes Schreiben zur Wahrung der Priorität von den Herren Richard und Robert Knoller in Wien vor, mit der Aufschrift: „Verfahren zur Herstellung von Constructionen aus Cement und Eisen."

Der Secretär Herr Prof. E. Suess spricht über den Kalkglimmerschiefer der Tauern.

Das w. M. Herr Director E. Weiss berichtet über den ziemlich hellen teleskopischen Kometen, den Dr. Zona in Palermo am 15. d. M. im Sternbilde des Fuhrmannes aufgefunden hat.

Über Functionen, welche gewissen Functionalgleichungen genügen

von

Dr. **Wilhelm Wirtinger** in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 6. November 1890.)

I.

Die bekannte Relation

$$\vartheta(x+K, K) = e^{-2x-K}\vartheta(x),$$

wo $\vartheta(x, K)$ im Riemann'schen Sinne die Reihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{Kn^2+2nx}$$

bedeutet, bringt auf den Gedanken, Functionen $F(x)$ zu untersuchen, welche einer Functionalgleichung von der Form

$$F(x+K) = e^{-\varphi(x)}F(x)$$

genügen, wo $\varphi(x)$ eine ganze rationale Function von x bedeutet.

Unter der Voraussetzung der gleichmässigen Convergenz stellt die Reihe

$$F(x) = 1 + \sum_{n=0}^{n=\infty} e^{\sum\limits_{0}^{n}\varphi(x+mK)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} e^{-\sum\limits_{1}^{n}\varphi(x-mK)}$$

eine solche Function dar.

Denn es ist in der That bei Auflösung der Summenzeichen

$$e^{-\varphi(x)}\Big[1+e^{\varphi(x)}+e^{\varphi(x+K)+\varphi(x)}+e^{\varphi(x+2K)+\varphi(x+K)+\varphi(x)}+\ldots.$$
$$+e^{-\varphi(x-K)}+e^{-\varphi(x-2K)-\varphi(x-K)}+e^{-\varphi(x-3K)-\varphi(x-2K)-\varphi(x-K)}+\ldots\Big]=$$
$$=\Big[1+e^{\varphi(x+K)}+e^{\varphi(x+2K)+\varphi(x+K)}+e^{\varphi(x+3K)+\varphi(x+2K)+\varphi(x+K)}+\ldots.$$
$$+e^{-\varphi(x)}+e^{-\varphi(x-K)-\varphi(x)}+e^{-\varphi(x-2K)-\varphi(x-K)-\varphi(x)}+\ldots.\Big]$$

Die Convergenzbedingungen sind leicht anzugeben. Es genügt dazu, dass φ von ungeradem Grade ν ist, und dass der Coëfficient der höchsten Potenz in φ multiplicirt mit derselben Potenz von K einen negativen reellen Theil hat.

Setzt man nämlich für den Augenblick

$$a_n = e^{\varphi(x+nK)}, \quad b_n = e^{-\varphi(x-nK)},$$

so wird

$$F(x) = 1+a_0+a_0a_1+a_0a_1a_2+a_0a_1a_2a_3+\ldots$$
$$+b_1+b_1b_2+b_1b_2b_3+b_1b_2b_3b_4+\ldots$$

und da für die Convergenz nur der absolute Betrag in Betrachkommt, so genügt es, den reellen Theil von $\varphi(x+nK)$, respective von $-\varphi(x-nK)$ in Betracht zu ziehen. Aus der Formel

$$\varphi(x+nK) = \varphi(x)+\varphi'(x)\,nK+\frac{\varphi''(x)}{1.2}n^2K^2+\ldots.\alpha_\nu n^\nu K^\nu,$$

wo α_ν den Coëfficienten der höchsten Potenz von x in φ bezeichnet, und aus der entsprechenden für $-\varphi(x-nK)$ folgt nun sofort, dass für alle x innerhalb eines endlichen, aber beliebig grossen Kreises um den Nullpunkt der reelle Theil von $\varphi(x+nK)$, respective von $-\varphi(x-nK)$ von einem gewissen n an das Zeichen des reellen Theiles von $\alpha_\nu K^\nu$ annimmt. Ist dieser reelle Theil, wie angenommen, negativ, so wird von diesem n an $|a_n|$ und $|b_n|$ kleiner als eins und es ist

$$\lim_{\nu=\infty}|a_\nu| = \lim_{\nu=\infty}|b_\nu| = 0.$$

Daraus folgt ohneweiters die gleichmässige und unbedingte Convergenz des für $F(x)$ aufgestellten Ausdruckes innerhalb des für x angenommenen beliebig grossen Kreies, so dass also nach einem bekannten Satze des Herrn Weierstrass $F(x)$ thatsächlich als ganze eindeutige, analytische Function in der ganzen Ebene definirt ist.

Es ist leicht einzusehen, dass die obigen Bedingungen für $\varphi(x)$ und K für die Convergenz auch nothwendig sind.

Wird

$$\varphi(x) = 2x + K$$

gesetzt, so geht wegen

$$\sum_{0}^{n} (2x + (2m+1)K) = 2(n+1)x + (n+1)^2 K$$

$$-\sum_{1}^{n} (2x - (2m-1)K) = -2nx + n^2 K$$

unser $F(x)$ in Riemanns Thetafunction über.

II.

Es ist aber die soeben definirte Function durchaus nicht die einzige Lösung unserer Functionalgleichung, wie schon daraus erhellt, dass das Product zweier solcher Functionen, welche mit demselben K, aber mit zwei anderen rationalen Functionen φ_1, φ_2 gebildet sind, ebenfalls der Functionalgleichung genügt, wenn $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi$ ist. Man übersieht auch sofort, dass eine solche Zerlegung auf unendlich viele Arten möglich ist, so dass auch φ_1 und φ_2 den Convergenzbedingungen Genüge leisten.

Die allgemeinste Lösung dieser Functionalgleichung durch ganze eindeutige analytische Functionen erhält man folgendermassen.

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit $K = 1$ voraussetzen, da wir zum allgemeinen Fall durch eine leichte Änderung der unabhängigen Variablen zurückkehren können.

Aus einer Nullstelle ξ von $F(x)$ gehen dann unendlich viele, $\xi \pm n$, hervor, die wir als congruent betrachten, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Dann ist, wenn x in seinen reellen Theil x_1 und seinen imaginären $x_2 i$ zerlegt wird, jeder Nullstelle von $F(x)$ eine Stelle in dem Bereich $0 \leqq x_1 < 1$ congruent, und diese Stelle ist ebenfalls eine Nullstelle. Wir bezeichnen diese Stellen mit $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p \ldots$, wobei jede Stelle so oft angesetzt werden soll, als sie als Nullstelle von $F(x)$ zu zählen ist.

Sind diese Stellen in unendlicher Anzahl vorhanden, so haben sie als Nullstellen einer ganzen, eindeutigen, analytischen Function ihre Häufungsstelle im Unendlichen.[1] Da der reelle Theil zwischen Null und Eins bleiben muss, so muss es eine Anordnung derselben geben,

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3 \ldots \xi_p \ldots,$$

so dass mit wachsendem p der imaginäre Theil von ξ, abgesehen vom Zeichen, niemals abnimmt und schliesslich über jede Grenze wächst. Dann gibt es aber auch eine Anordnung, so dass

$$|\sin 2\pi\xi_p|$$

mit wachsendem p niemals abnimmt und schliesslich unendlich gross wird, wie aus den Formeln

$$\sin(x+yi) = \sin x \frac{e^{-y}+e^y}{2} + i \cos x \frac{e^{-y}-e^y}{2}$$

$$|\sin(x+yi)| = \sqrt{\frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4} - \frac{\cos 2x}{2}}$$

ersichtlich ist.

Schliesst man ein etwa vorkommendes $\xi = 0$ vorläufig von der Betrachtung aus, so folgt aber nach Weierstrass l. c., dass sich eine Reihe ganzer rationaler Functionen

$$g_1(z), g_2(z), \ldots g_p(z) \ldots$$

angeben lässt, derart das unendliche Product

$$\prod_p \left(1 - \frac{z}{\sin 2\pi\xi_p}\right) \cdot e^{g_p(z)}$$

beständig convergirt und eine ganze analytische Function vorstellt, welche an den Stellen $z = \sin 2\pi\xi_p$ verschwindet und zwar nach der obigen Festsetzung von derselben Ordnung wie $F(x)$ in ξ_p, ausgenommen etwa die Nullstelle. Dann ist aber auch

[1] Cfr. Weierstrass, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Abhandl. zur Functionenlehre. Nr. 1.

$$\Phi(x) = (\sin 2\pi x)^{n_0} \prod_p \left(1 - \frac{\sin 2\pi x}{\sin 2\pi \xi_p}\right) e^{g_p(\sin 2\pi x)}$$

eine ganze analytische Function, welche bei geeigneter Wahl von n_0 alle Nullstellen in der gleichen Ordnung mit $F(x)$ gemeinsam hat und ausserdem der Gleichung

$$\Phi(x+1) = \Phi(x)$$

genügt.

Daraus folgt, dass der Quotient $\psi(x) = \frac{F(x)}{\Phi(x)}$ eine nirgends verschwindende, überall endliche Function ist, welche der Functionalgleichung

$$\psi(x+1) = e^{-\varphi(x)} \psi(x) \tag{a}$$

genügt. Da φ vom Grade ν ist, so folgt daraus, dass

$$\frac{d^{\nu+1}}{dx^{\nu+1}} (\log \psi)$$

eine überall endliche periodische Function ist und daher in die Form

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{2n\pi i x}$$

gebracht werden kann. Es wird demnach durch $\nu+1$ malige Integration:

$$\log \psi = \sum_{-\infty}^{-\infty} \frac{A_n e^{2n\pi i x}}{(2\pi i n)^{\nu+1}} + e_0 + e_1 x + e_2 x^2 + e_3 x^3 \ldots + e_{\nu+1} x^{\nu+1}. \tag{b}$$

Die unendliche Summe ist selbst eine überall endliche periodische Function, die wir kurz mit $P(x)$ bezeichnen. Durch Substitution des aus (b) für ψ folgenden Werthes in (a) ergibt sich

$$e_1(x+1) + e_2(x+1)^2 + \ldots + e_{\nu-1}(x+1)^{\nu+1}$$
$$-e_1 x - e_2 x^2 \ldots - e_{\nu+1} x^{\nu+1} = -\varphi(x) + 2k\pi i.$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und wenn $\varphi(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 \ldots \alpha_\nu x^\nu$ ist, für diese die Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
(\nu+1)e_{\nu+1} &= -\alpha_\nu \\
(\nu+1)_2 e_{\nu+1}+\nu e_\nu &= -\alpha_{\nu-1} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
e_1+e_2+e_3\ldots+e_{\nu+1} &= -\alpha_0+2k\pi i.
\end{aligned}
$$

Hieraus ist ersichtlich, dass e_0 willkürlich bleibt, e_1 bis auf ein ganzes Vielfaches von $2\pi i$ und alle andern Grössen e vollständig bestimmt sind. Die allgemeinste Lösung unserer Functionalgleichung durch eine ganze Function hat somit die Form:

$$
F(x) = e^{e_0+e_1x+e_2x^2\ldots+e_\nu x^\nu+P(x)}(\sin 2\pi x)^{n_0}\prod_p\left(1-\frac{\sin 2\pi x}{\sin 2\pi\xi_p}\right)e^{g_p(\sin 2\pi x)}.
$$

Die bekannte Formel für die Weierstrass'sche σ-Function[1]

$$
\sigma(x,\omega,\omega') = \frac{2\omega}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)e^{\frac{\eta x^2}{2\omega}}\prod_{\mu=1}^{\mu=\infty}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2\omega}\right)}{\sin^2\left(\pi\frac{\mu\omega'}{\omega}\right)}\right)
$$

oder die analogen Formeln für die elliptischen Thetafunctionen liefern Beispiele hiezu, wenn man nur $4\omega x$ für x schreibt.

III.

Es wäre nicht ohne Interesse, die Umgestaltung eines von den Thetafunctionen verschiedenen analytischen Ausdrucks, der in der in I aufgestellten Reihenform gegeben ist, in die obige Productform überzuführen. Leider ist mir eine solche Umformung nicht gelungen. Dagegen dürfte eine andere Bemerkung nicht ohne Interesse sein.

Schreibt man einer ganzen Function vor, gleichzeitig zwei Functionalgleichungen

$$
\begin{aligned}
F(x+2\omega) &= e^{-\varphi(x)}F(x) \\
F(x+2\omega') &= e^{-\psi(x)}F(x)
\end{aligned}
$$

zu genügen, wo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ ganze rationale Functionen sein sollen, welche eventuell gewissen aus der Existenz von $F(x)$ folgenden

[1] H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen. Seite 8, Formel 5.

Bedingungen genügen sollen, so ist, wenn ν den grösseren der beiden Grade von φ und ψ bezeichne,

$$\frac{d^{\nu+1}}{dx^{\nu+1}} \log F(x)$$

eine doppelt periodische Function mit den Perioden 2ω, $2\omega'$, welche demnach den bekannten, für diese Grössen geltenden Bedingungen genügen müssen. Da ferner $F(x)$ innerhalb und auf der Grenze eines nach dem vorigen existirenden Periodenparallelogrammes nur eine endliche Anzahl Nullstellen $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_p$, hat, dieselben ebenso wie in II gezählt, aber $\xi = 0$ eingeschlossen, so folgt, dass das aus einer endlichen Anzahl von σ-Functionen zusammengesetzte Product

$$S(x) = \sigma(x-\xi_1)\sigma(x-\xi_2)\sigma(x-\xi_3)\ldots\sigma(x-\xi_p)$$

alle Nullstellen und in derselben Ordnung mit $F(x)$ gemein hat. Der Quotient

$$\rho(x) = \frac{F(x)}{S(x)}$$

ist dann eine überall endliche, nirgends verschwindende Function, welche den Functionalgleichungen

$$\rho(x+2\omega) = e^{-\varphi_1(x)}\rho(x)$$
$$\rho(x+2\omega') = e^{-\psi_1(x)}\rho(x)$$

genügt, wo $\varphi - \varphi_1$ und $\psi - \psi_1$ lineare Functionen von x sind, zu Folge der bekannten Eigenschaften von $\sigma(x)$.

Es ist aber dann auch

$$\frac{d^{\nu+1} \log \rho(x)}{dx^{\nu+1}}$$

eine im Endlichen überall endliche doppeltperiodische Function, also eine Constante.

Daraus folgt für $\log \rho(x)$ eine ganze rationale Function $\nu+1$ Grades, und da deren Coëfficienten analog wie in der vorigen Nummer bis auf zwei vollständig bestimmt sind durch eine der beiden Functionalgleichungen, so ergibt sich, wenn $\log \rho(x)$ so bestimmt ist, dass

$$-\varphi_1(x) = \log \rho(x+2\omega) - \log \rho(x)$$

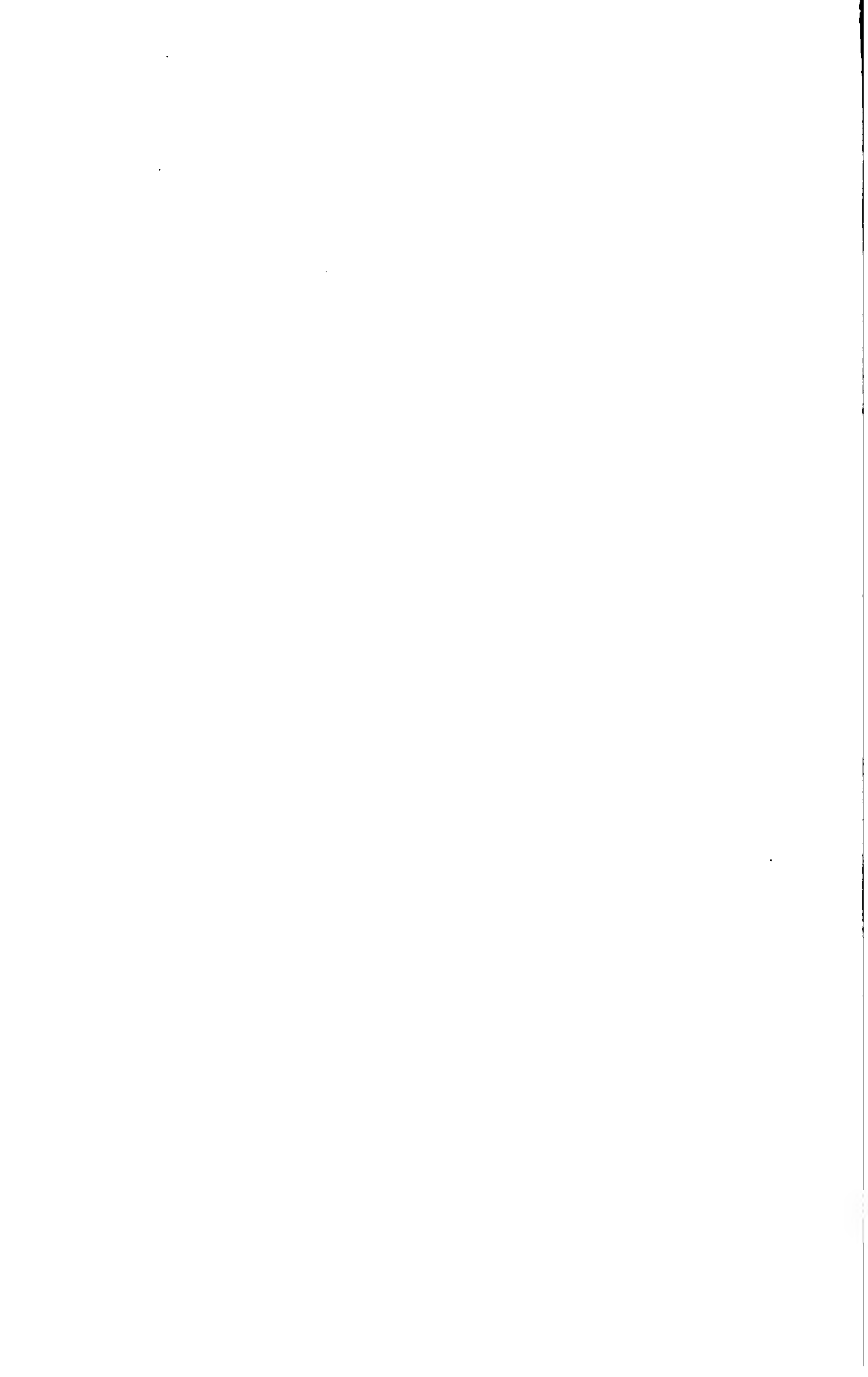
für $\psi_1(x)$

$$-\psi_1(x) = \log \rho(x+2\omega') - \log \rho(x).$$

Für $F(x)$ selbst ergibt sich dann die Formel

$$F(x) = \sigma(x-\xi_1)\sigma(x-\xi_2)\sigma(x-\xi_3)\ldots\sigma(x-\xi_p)e^{c_0+c_1x\ldots+c_{\nu+1}x^{\nu+1}}.$$

Es ist also jede ganze Function, welche simultan zwei solchen Functionalgleichungen, ihre Verträglichkeit verausgesetzt, genügt, ein Product einer endlichen Anzahl von σ-Functionen multiplicirt mit einer Exponentiellen mit einer ganzen rationalen Function im Exponenten, und führt also nicht auf neue Transcendente.



Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften“ herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.





SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. BAND. X. HEFT.

Jahrgang 1890. — December.

(Mit 1 Tafel und 13 Textfiguren.)

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.

WIEN, 1890.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

INHALT

des 10. Heftes 1890 des XCIX. Bandes, Abtheilung II. a. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 90 kr. = 3 RMk. 80 Pf.



SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

XCIX. Band. X. Heft.

ABTHEILUNG II. a.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und der Mechanik.



XXV. SITZUNG VOM 4. DECEMBER 1890.

Der Secretär legt das eben erschienene Heft VII (Juli) des 99. Bandes Abtheilung II. b. der Sitzungsberichte vor.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Prag übersendet eine Abhandlung des Med. et Phil. Dr. F. Schardinger, k. u. k. Regimentsarzt, aus dem bacteriologischen Laboratorium des k. u. k. Militär-Sanitätscomités in Wien. Dieselbe hat den Titel: „Über eine neue optisch active Modification der Milchsäure, durch bacterielle Spaltung des Rohrzuckers erhalten“.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlung vor:

1. „Elektrische Beobachtungen auf dem hohen Sonnblick (3100 *m* über dem Meere)“, von J. Elster und H. Geitel in Wolfenbüttel.

Ferner legt der Secretär vor:

2. „Über die Entstehung organischer Cylindergebilde“, von Prof. Karl Fuchs in Pressburg.
3. „Über die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe von den specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur“, von Dr. Gustav Jäger in Wien.

Herr Dr. Hans Reusch, Director der geologischen Landesaufnahme in Kristiania, übersendet eine Mittheilung: „Über sehr alte Gletscherbildungen“.

Der Secretär legt drei versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, und zwar:

1. Von Herrn cand. phil. Victor Grunberg in Wien mit der Aufschrift: „Ein meteorologisches Problem“.

2. Von Herrn Max v. Groller-Mildensee, k. und k. Oberstlieutenant in Wien, ohne Inhaltsangabe.
3. Von Herrn stud. phil. F. Wilhelm in Wien mit dem Titel: „Ein physikalisches Problem“.

Das w. M. Herr Hofrath J. Hann überreicht eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Die Veränderlichkeit der Temperatur in Österreich.“

Das w. M. Herr Prof. Lieben überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Aug. Freund aus Lemberg, betitelt: „Zur Kenntniss des Vogelbeersaftes und der Bildung der Sorbose, 1. Mittheilung“.

Herr Dr. C. Grobben, Professor an der k. k. Universität in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Die Antennendrüse von Lucifer Reynaudii M. Edw.“.

Herr Dr. Richard Ritter v. Wettstein, Privatdocent an der Wiener Universität, überreichte eine Abhandlung, betitelt: „Die Omorika-Fichte, *Picea Omorica*. Eine monographische Studie“.

XXVI. SITZUNG VOM 11. DECEMBER 1890.

Der Secretär legt eine eingesendete Abhandlung von Herrrn Vincenz v. Giaxa, Professor an der k. k. nautischen Schule in Lussinpiccolo: „Theoretische Formel für die Gangbestimmung astronomischer Regulatoren“ vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor, welches die Aufschrift trägt: „Heilung der Amblyopie und Amaurose“, von Dr. Johann Hirschkron in Wien.

Das w. M. Herr Prof. Emil Weyr überreicht eine Abhandlung: „Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins.“ (Erste Mittheilung.)

Ferner überreicht Herr Prof. Weyr eine Arbeit des Herrn Theodor Schmid in Linz: „Über Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide und ein dabei auftretendes zwei-zweideutiges Nullsystem.“

Herr J. Liznar, Adjunct der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, legt einen zweiten vorläufigen Bericht vor über die von ihm im Sommer d. J. an 22 Stationen ausgeführten erdmagnetischen Messungen, welche einen Theil der auf Kosten der kais. Akademie der Wissenschaften unternommenen neuen magnetischen Aufnahme Österreichs bilden.

Über Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlechte Eins

(I. Mittheilung)

von

Emil Weyr,
w. M. k. Akad.

1. Um den Rang einer Raumcurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins (die Ordnung ihrer Tangentenfläche) zu bestimmen, projiciren wir die Curve aus irgend einem Punkte, erhalten so einen Kegel n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins, welcher somit $\left[\frac{(n-1)(n-1)}{2}-1\right]$ Doppelerzeugende besitzen und von der Classe $n(n-1)-2\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1\right]=2n$ sein wird. Die Classe des Kegels ist aber zugleich der Rang unserer Curve:

„Eine Raumcurve n^{ter} Ordnung vom Geschlechte Eins ist vom $2n^{\text{ten}}$ Range, d. h. irgend eine Gerade wird von $2n$-Tangenten der Curve geschnitten."

Insbesondere hat also eine Raumcurve R_6 von der sechsten Ordnung und vom Geschlechte Eins den Rang 12.

2. Die Curve R_6 hat mit einer beliebigen Fläche dritter Ordnung F_3 achtzehn Punkte gemeinschaftlich; sämmtliche solche Schnittpunktgruppen bilden auf R_6 jene fundamentale J_{17}^{18}, welche durch irgend drei ebene Punktsextupel der R_6 bestimmt erscheint. (Vergl. Art. 24 der dritten Mittheilung „Über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins", Sitzung vom 17. Mai 1888.) Alle F_3, welche durch beliebige 17 Punkte von R_6 hindurchgehen, schneiden R_6 noch in einem und demselben Punkte, welcher jene 17 zu einer Gruppe der Fundamentalen J_{17}^{18} ergänzt. Die durch beliebige achtzehn Punkte von R_6

gehende F_3 wird also R_6 ganz enthalten, so dass R_6 für eine sie ganz enthaltende F_3 achtzehn Bedingungen darstellt. Hieraus:

„Alle durch R_6 gehenden F_3 bilden ein Büschel."

Die gemeinsame Schnittcurve aller Flächen dieses Büschels (die Grundcurve des Büschels) muss eine Curve neunter Ordnung sein, wird somit ausser R_6 noch einen Ort dritter Ordnung umfassen, den wir C_3 nennen und von dem wir zeigen wollen, dass es aus drei windschiefen Geraden besteht.

3. Wir betrachten die Fläche der Trisecanten von R_6. Durch jeden Punkt von R_6 gehen fünf Trisecanten; denn wenn man aus ihm die Curve projicirt, so entsteht ein Kegel fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins, dessen fünf Doppelerzeugenden eben jene Trisecanten sind.

„Es ist also R_6 eine fünffache Curve ihrer Trisecantenfläche."

4. Es sei T eine beliebige feste Trisecante von R_6. Um T lassen wir die durch T gehende Ebene ξ rotiren und verbinden je zwei der drei variablen Schnittpunkte x_1, x_2, x_3 von ξ und R_6 durch Gerade X_1, X_2, X_3, respective. Um die Ordnung der Fläche Φ, welche von X_1, X_2, X_3 beschrieben wird, zu bestimmen, bemerken wir, dass T eine sechsfache Gerade von Φ ist. Es gehen nämlich durch einen beliebigen Punkt des Raumes, da R_6 vom Geschlechte Eins ist, $\frac{(6-1)(6-2)}{2} - 1 = 9$ Bisecanten hindurch, und wenn der Punkt auf der Trisecante T liegt, welche für drei Bisecanten zählt, so werden durch ihn noch sechs Bisecanten hindurchgehen, so dass T in der That sechsfach für Φ ist. Da nun in einer durch T gehenden Ebene ξ ausser T und den drei Geraden X_1, X_2, X_3 keine weiteren der Fläche Φ angehörigen Linien enthalten sein können, so ist Φ von der neunten Ordnung. Die Curve R_6 ist offenbar Doppelcurve von Φ_9, da durch jeden Punkt von R_6 zwei Erzeugende der Fläche hindurchgehen. Wenn man der Erzeugenden X_i den Punkt x_i von R_6 als entsprechend zuordnet, so sieht man sofort, dass das Erzeugendensystem von Φ_9 eindeutig auf das Punktsystem von R_6 bezogen erscheint, und da R_6 vom Geschlechte Eins ist, so haben wir den Satz:

„Die Fläche Φ_9 ist vom Geschlechte Eins."

5. Es sei C_9 irgend ein ebener Schnitt von Φ_9, so wird C_9 ebenfalls vom Geschlechte Eins sein, so dass die Gesammtzahl der mehrfachen Punkte von C_9 zu $\frac{(9-1)(9-2)}{2} - 1 = 27$ Doppelpunkten äquivalent sein muss. Die Curve C_9 besitzt zunächst auf T einen sechsfachen Punkt, welcher also 15 Doppelpunkte vertritt. Jeder der sechs auf R_6 liegenden Punkte von C_9 ist ein Doppelpunkt, was nun im Ganzen 15+6, das ist 21 Doppelpunkte gibt. Es muss also C_9 noch sechs Doppelpunkte vertretende mehrfache Punkte aufweisen. Diese können nur von mehrfachen Curven der Fläche Φ_9 herrühren, und da sich keine zwei Erzeugenden von Φ_9, welche nicht in einer durch T gehenden Ebene liegen, schneiden können, so werden die mehrfachen Punkte von C_9 nur von mehrfachen Erzeugenden der Fläche Φ_9 herrühren können. Nun sieht man leicht ein, dass keine Doppelerzeugenden, sondern nur dreifache Erzeugende von Φ_9 auftreten können. Denn es werden von den drei Geraden X_1, X_2, X_3 nur dann zwei zusammenfallen, wenn die drei Punkte x_1, x_2, x_3 in gerader Linie liegen, dann fallen aber alle jene drei Geraden in eine zusammen und stellen eine dreifache Erzeugende von Φ_9 dar. Diese liefert auf C_9 einen dreifachen Punkt, und da ein solcher drei Doppelpunkte vertritt, so müssen zwei solche dreifache Erzeugende von Φ_9 vorhanden sein. Jede von ihnen ist ihrer Entstehung nach eine Trisecante von R_6, und wollen wir diese beiden Trisecanten T', T'' nennen. Jede von ihnen schneidet T, weil mit ihr in einer Ebene liegend, und zwar sind es, wie aus der Entwicklung sofort hervorgeht, die einzigen zwei Trisecanten, welche T schneiden. Sie selbst müssen zu einander windschief sein, weil sonst neun Punkte von R_6 in einer Ebene liegen würden.

„Jede Trisecante T von R_6 wird von zwei anderen Trisecanten T', T'', die zu einander windschief sind, geschnitten; sie sind dreifache Erzeugende jener Φ_9, für welche T sechsfache Gerade ist.“

6. Irgend eine Ebene wird R_6 in sechs Punkten p und den im Artikel 2 erwähnten Ort dritter Ordnung C_3 in drei Punkten c schneiden, und es müssen die neun Punkte p, c offenbar Scheitel eines ebenen Curvenbüschels dritter Ordnung sein, nämlich jenes

Büschels, in welchem die Ebene von dem durch R_6 gehenden Flächenbüschel dritter Ordnung geschnitten wird. Da nun die sechs Punkte p für eine zwei Trisecanten TT' enthaltende Ebene zu je dreien auf diesen Trisecanten gelegen sind, so müssen auch die drei Punkte c auf einer Geraden liegen, welche also Trisecante von C_3 sein wird. Es besitzt also der Ort C_3 unendlich viele Trisecanten, in jeder Ebene (TT') eine. Hieraus folgt zunächst, dass C_3 keine Raumcurve dritter Ordnung sein kann, sondern entweder ein System von drei windschiefen Geraden, oder es muss C_3 aus einem Kegelschnitt und einer diesen nicht schneidenden Geraden bestehen. Dieser letzte Fall ist jedoch ausgeschlossen. Denn es wären die Trisecanten von C_3 die Strahlen jenes ebenen Strahlenbüschels, dessen Ebene die des Kegelschnittes ist, und dessen Scheitel auf der Geraden gelegen ist, welche mit dem Kegelschnitte zusammen C_3 darstellt. Es müssten somit auch alle die Ebenen (TT') durch diesen Büschelscheitel hindurchgehen, insbesondere also auch die Ebene (TT''), so dass jener Büschelscheitel auf der Schnittlinie von (TT') und (TT''), d. h. auf T liegen müsste. Das heisst mit anderen Worten: Alle Trisecanten T müssten durch jenen Büschelscheitel hindurchgehen, einen Kegel bildend, der nothwendiger Weise quadratisch sein müsste, weil jede durch seinen Scheitel gehende Ebene höchstens zwei seiner Erzeugenden enthalten kann. Dann hätte aber jede Erzeugende dieses Kegels mit jeder der durch R_6 gehenden cubischen Flächen nicht nur die drei auf R_6 liegenden Punkte, sondern auch den Kegelscheitel, also im Ganzen vier Punkte gemeinsam, so dass der quadratische Kegel einen Bestandtheil aller durch R_6 gehenden cubischen Flächen bilden müsste, so dass sich also durch R_6 keine eigentliche cubische Fläche legen liesse, was schon der Definition der R_6 als einer Curve vom Geschlechte Eins widerspricht. Es muss also C_3 aus drei windschiefen Geraden bestehen, welche wir Q_1, Q_2. Q_3 nennen wollen.

„Alle durch R_6 gehenden Flächen dritter Ordnung schneiden sich ausser in R_6 noch in drei festen zu einander windschiefen Geraden Q_1, Q_2, Q_3."

7. Die drei windschiefen Geraden Q bestimmen eine sie enthaltende Fläche zweiter Ordnung des Hyperboloid H, welches von R_6 in zwölf Punkten geschnitten wird. Alle diese Punkte

müssen auf den Geraden Q liegen. Denn wäre a einer der zwölf Schnittpunkte, der nicht auf einer der Q-Geraden läge, so hätte die durch a gehende Erzeugende von H, welche auch Q_1, Q_2, Q_3 schneidet, mit jeder durch R_6 gehenden Fläche dritter Ordnung vier Punkte gemeinsam, müsste also allen diesen Flächen angehören, was unmöglich ist, da dieselben ausser R_6 und Q_1, Q_2, Q_3 keine weiteren gemeinschaftlichen Schnittlinien besitzen können. Da nun auf einer Geraden nicht mehr als vier Punkte von R_6 liegen können (weil sie sonst entweder rational oder eben sein müsste) und da sich jene zwölf Schnittpunkte von R_6 und H auf die drei Q-Geraden vertheilen müssen, so ist nur der einzige Fall möglich, dass jede der drei Q-Geraden vier von den zwölf Punkten enthält, d. h., dass sie eine Quadrisecante von R_6 ist.

„Die Raumcurve R_6 besitzt drei Quadrisecanten Q_1, Q_2, Q_3; dieselben bilden mit R_6 die Basiscurve eines Flächenbüschels dritter Ordnung.“[1]

8. Wenn man R_6 und Q_1, Q_2, Q_3 mit einer beliebigen Ebene in den sechs Punkten p und den drei Punkten c, respective zum Durchschnitte bringt, so müssen die neun Schnittpunkte Scheitel eines Curvenbüschels dritter Ordnung sein. Wenn also von diesen Punkten drei in gerader Linie liegen, so werden die sechs übrigen auf einer Curve zweiter Ordnung gelegen sein.

Die drei Punkte c liegen in gerader Linie, wenn die schneidende Ebene eine Tangentialebene des durch die drei Quadrisecanten bestimmten Hyperboloides ist.

„Jede Tangentialebene des Hyperboloides H schneidet R_6 in sechs Punkten eines Kegelschnittes.“

Ebenso:

„Jede Ebene, welche eine Trisecante von R_6 enthält (d. h. also jede Tangentialebene der Trisecantenfläche von R_6), schneidet R_6 in drei weiteren Punkten, welche mit den drei Punkten, in denen sie die drei Quadrisecanten schneidet, auf einem Kegelschnitte liegen.“

Man wird selbstverständlich ebenfalls sechs auf einem Kegelschnitte liegende Punkte erhalten, wenn man das System

[1] Vergl. Sturm, Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung, S. 201.

R_6, Q_1, Q_2, Q_3 mit einer Ebene schneidet, welche durch eine Gerade hindurchgeht, die eine der Quadrisecanten schneidet und Bisecante von R_6 ist, oder die Transversale zu zwei Quadrisecanten ist und R_6 schneidet; da auch umgekehrt drei von den neun Büschelscheiteln in gerader Linie liegen müssen, wenn die übrigen sechs auf einer Curve zweiter Ordnung liegen, so haben wir die Sätze:

„Jede Ebene, welche R_6 in sechs auf einem Kegelschnitte gelegenen Punkten schneidet, ist Tangentialebene des Hyperboloides H."

„Jede Ebene, welche zwei sich schneidende Trisecanten von R_6 verbindet, ist Tangentialebene von H."

9. Die Trisecanten von R_6 erfüllen die Trisecantenfläche θ. Jede Quadrisecante ist offenbar vierfache Erzeugende dieser Fläche; u. zw. sind die drei Quadrisecanten die einzigen mehrfachen Erzeugenden von θ.

Man kann die Existenz der drei Quadrisecanten auch folgendermassen erhärten. Die durch irgend einen Punkt, welcher dem cubischen Orte C_3 und der Fläche θ gemeinsam ist, gehende Trisecante von R_6 hat mit allen durch R_6 gehenden cubischen Flächen jenen Punkt und die drei auf der Trisecante gelegenen Punkte von R_6 gemeinsam, so dass sie allen diesen Flächen angehört und Bestandtheil von C_3 sein muss. Führt man dieselbe Betrachtung für irgend einen Punkt durch, welcher θ und dem übrig bleibenden Bestandtheil zweiten Grades von C_3 angehört, so erhält man eine zweite Trisecante, welche Bestandttheil von C_3 sein muss, so dass dann von selbst eine dritte Trisecante als letzter Bestandtheil von C_3 auftritt. So erkennt man, dass C_2 in drei Gerade Q_1, Q_2, Q_3 zerfallen muss, und dann beweist man wie früher, dass jede dieser Geraden vier Punkte von R_6 enthalten muss.

10. Unabhängig von den Betrachtungen des Artikels 5 gelangt man in folgender Weise zu dem Ergebnisse desselben Artikels. Eine Trisecante T von R_6 wird das Hyperboloid H in zwei Punkten schneiden, durch welche wir uns die Erzeugenden von H hindurchgelegt denken, die dem zweiten Systeme angehören (welchem Q_1, Q_2, Q_3 nicht angehören). Verbinden wir nun T mit jeder dieser Erzeugenden durch eine Ebene, so wird jede von

den beiden so erhaltenen Ebenen nach Artikel 6 die Curve R_6 in drei Punkten schneiden, welche in gerader Linie oder auf einer Trisecante liegen, die selbstverständlich T schneiden muss. So erhalten wir wieder die beiden T schneidenden Trisecanten, und zwar als in den beiden durch T an H gelegten Tangentialebenen gelegen.

Da jede Trisecante von zwei und nur von zwei anderen Trisecanten geschnitten wird, so besitzt die Trisecantenfläche θ eine Doppelcurve, als Ort der Schnittpunkt sich schneidender Trisecanten. Die Trisecanten sind also Bisecanten dieser Doppelcurve. Unsere Curve R_6 ist selbstverständlich fünffache Curve von θ, da durch jeden Punkt von R_6 fünf Trisecanten hindurchgehen. (Doppelerzeugende des Kegels fünfter Ordnung, in welchem sich R_6 aus jenem Punkte projicirt.)

11. Wir bestimmen nun den Grad der Trisecantenfläche θ. Zu diesem Behufe untersuchen wir, in wieviel Punkten dieselbe von irgend einer Bisecante B der Curve R_6 geschnitten wird. Da R_6 fünffache Curve von θ ist, so zählt jeder der beiden auf R_6 liegenden Punkte von B für fünf einfache Schnittpunkte von B mit θ. Jeder weitere solche Schnittpunkt kann nur dadurch entstehen, dass eine Trisecante T von R_6 der Bisecante B in einem R_6 nicht angehörigen Punkte begegnet. Es sei y ein solcher Schnittpunkt und x_1, x_2, x_3 seien die Punkte, welche T mit R_6 gemeinsam hat. Dann wird die Ebene (TB) die Curve noch in einem Punkte z, und die drei Quadrisecanten Q_1, Q_2, Q_3 in drei Punkten q_1, q_2, q_3 schneiden. Sind nun t_1, t_2 die Punkte, welche B mit R_6 gemeinsam hat, so sind t_1, t_2, x_1, x_2, x_3 und z die sechs Schnittpunkte von R_6 mit der Ebene (BT) und da x_1, x_2, x_3 in gerader Linie liegen, so müssen t_1, t_2, z, q_1, q_2, q_3 auf einem Kegelschnitte gelegen sein und umgekehrt. Um also einen Punkt y zu finden, hat man durch B eine solche Ebene zu legen, dass die beiden festen Punkte t_1, t_2 mit den vier Punkten q_1, q_2, q_3, z auf einer Curve zweiter Ordnung liegen.

Der Punkt z ist also ein Schnittpunkt von R_6 mit jener Fläche φ, welche von den durch t_1, t_2 gehenden und alle drei Quadrisecanten schneidenden Kegelschnitten erfüllt wird. Diese Fläche ist von der vierten Ordnung. Dass φ die Geraden Q_1, Q_2, Q_3 einfach enthält und dass t_1, t_2 ebenfalls Punkte von φ sind, er-

kennt man sofort. In jeder durch B gehenden Ebene ω liegt nur ein mit ω variabler der φ angehöriger Kegelschnitt. Dieser zerfällt für zwei Lagen von ω in B und eine zweite Gerade. Dies geschieht offenbar, wenn ω eine Tangentialebene des durch Q_1, Q_2, Q_3 bestimmten Hyperboloides H wird. Es ist somit B eine Doppelgerade von φ, und da also in jeder durch B gehenden Ebene ausser dieser Doppelgeraden nur noch eine Curve zweiter Ordnung liegt, die auch φ angehört, so ist φ von der vierten Ordnung. Nun liegt auf jedem Strahle, der durch einen der Punkte t_1, t_2 geht, nur ein einziger mit dem Strahle variabler Punkt von φ, nämlich der Schnittpunkt dieses Strahles mit jenem Kegelschnitt von φ, welcher in der durch den Strahl und B bestimmten Ebene liegt; folglich ist jeder der beiden Punkte t_1, t_2 ein dreifacher Punkt von φ.

Die Fläche φ schneidet somit R_6 im Ganzen in 24 Punkten. Da φ durch Q_1, Q_2, Q_3 einfach hindurchgeht, so sind die zwölf auf diesen drei Quadrisecanten gelegenen Punkte unter jenen 24 enthalten. Von den zwölf übrig bleibenden werden von jedem der beiden dreifachen Punkte von φ wieder drei absorbirt; es bleiben somit $24-12-2.3=6$ einfache Schnittpunkte z übrig. Jeder solche liefert mit B eine Ebene, welche eine Trisecante T von R_6 enthält.

Hieraus also:

Jede Bisecante von R_6 wird von sechs Trisecanten geschnitten. (In Punkten, welche der Curve nicht angehören.) Hiezu kommen noch die zehn Trisecanten, von denen je fünf durch t_1 und t_2 gehen.

Somit:

„Die Fläche θ der Trisecanten ist von der sechszehnten Ordnung."

12. Man kann zu demselben Resultate auch folgendermassen gelangen. Die Schnittpunkte einer Ebene ω mit R_6 sind fünffache Punkte für die Schnittcurve von ω und θ; geht ω durch eine Trisecante T, welche mit R_6 die Punkte x_1, x_2, x_3 gemeinschaftlich haben möge, so ist sie Tangentialebene von θ und wird θ in einem auf T liegenden, mit ω variablen Punkte b berühren. Jede Trisecante T wird von zwei anderen Trisecanten T' T'' geschnitten; die Paare der so auf den einzelnen Trisecanten T entstehenden

Schnittpunkte (TT') (TT'') erfüllen eine Curve Δ, welche offenbar Doppelcurve von θ ist. Die Schnitte von ω mit Δ sind Doppelpunkte des Schnittes von ω mit θ. Wenn ω durch T geht, so wird der Schnitt von ω mit θ in T und eine zweite Curve L zerfallen, welche viermal durch jeden der Punkte x_1, x_2, x_3, je einmal durch die Punkte (TT'), (TT'') und einmal durch b hindurchgeht. Da θ ausser R_6, Q_1, Q_2, Q_3, Δ keine weiteren mehrfachen Linien haben kann, und weil T die Δ nur in zwei Punkten schneidet, so gibt es auf T keine weiteren Punkte von L, folglich hat T mit L im Ganzen $3.4+2+1$, d. h. 15 Punkte gemeinsam. L ist von der fünfzehnten Ordnung und daher θ von der Ordnung sechzehn.

13. Irgend eine durch R_6 hindurchgehende Fläche dritter Ordnung F_3 schneidet somit θ in einer Curve der achtundvierzigsten Ordnung. In dem Gesammtschnitte ist nun R_6 als fünffache Curve enthalten, zählt somit für einen Bestandtheil 5.6, d. h. dreissigster Ordnung. In dem übrigbleibenden Theile achtzehnter Ordnung sind die drei Quadrisecanten enthalten. Jede von diesen ist für θ offenbar eine vierfache Gerade, so dass alle drei zusammen einen Bestandtheil 4.3, d. h. zwölfter Ordnung für den Gesammtschnitt darstellen. Es bleibt somit schliesslich ein mit F_3 veränderlicher Bestandtheil sechster Ordnung übrig. Dieser muss jedoch in sechs Trisecanten zerfallen. Ist nämlich a ein Punkt dieses Bestandtheiles sechster Ordnung und ist A die durch a gehende Trisecante, welche R_6 in a_1, a_2, a_3 schneiden möge, so hat ja A mit F_3 die vier Punkte a, a_1, a_2, a_3 gemeinschaftlich und muss also ganz auf A liegen. Hieraus erkennt man, dass sich der oben erwähnte variable Schnitt von F_3 und θ in der That in sechs gerade Linien (Trisecanten von R_6) spaltet.

„Jede durch R_6 hindurchgehende cubische Fläche schneidet die Trisecantenfläche θ ausser in R_6, Q_1, Q_2, Q_3 noch in sechs Trisecanten."

14. Da die durch R_6 gehenden F_3 ein Büschel bilden, so kann man durch jeden ausserhalb R_6 (und Q_1, Q_2, Q_3) gelegenen Punkt nur eine solche F_3 legen. Wenn dieser Punkt a auf θ liegt, so wird F_3 die durch a gehende Trisecante A enthalten müssen, so dass man durch R_6 und A eine und nur eine F_3 hindurchlegen kann.

„Durch eine Trisecante von R_6 erscheint die sie und R_6 enthaltene F_3 eindeutig bestimmt.“

Da nun jede F_3 durch eine auf ihr liegende Trisecante bestimmt ist und auf jeder F_3 sechs Trisecanten liegen, so gruppiren sich die sämmtlichen Trisecanten zu je sechsen, wie sie auf den einzelnen durch R_6 gehenden F_3 liegen. Jede solche Gruppe ist durch irgend eine ihrer Trisecanten vollkommen bestimmt.

Betrachten wir irgend eine Trisecante T_1 von R_6 und die Fläche F_3, welche T_1 mit R_6 verbindet. Nach Artikel 5 wird T_1 von zwei anderen Trisecanten geschnitten, welche zu einander windschief sind; sie mögen t_2 und t_3 heissen. Jede von ihnen muss ganz auf F_3 liegen, weil sie mit F_3 vier Punkte gemeinsam hat; so z. B. hat t_2 mit F_3 den Punkt $(t_2 T_1)$ und dann die drei auf t_2 liegenden Punkte von R_6 gemeinschaftlich. Nun muss ebenfalls t_2 von zwei Trisecanten geschnitten werden, die zu einander windschief sind; eine davon ist T_1, die andere sei T_3. Ebenso sei T_2 jene zu T_1 windschiefe Trisecante, von welcher noch t_3 geschnitten wird. T_2 kann mit T_3 nicht identisch sein; denn sonst hätten wir ein windschiefes Vierseit $T_1 t_2 T_3 t_3$ von dessen Seiten jede drei Punkte der R_6 enthielte. Da ein solches Vierseit immer die Basiscurve für ein Flächenbüschel zweiter Ordnung ist, so hätte eine Fläche des Büschels, die man durch einen beliebigen Punkt von R_6 legt, mit R_6 dreizehn Punkte gemeinschaftlich, so dass also R_6 ganz auf dieser Fläche zweiter Ordnung liegen müsste, was wieder einen besonderen Charakter (Doppelpunkte) der Curve R_6 bedingt, wie später gezeigt werden soll. Wir haben nun die fünf Trisecanten T_3, t_2, T_1, t_3, T_2, von denen jede von der folgenden geschnitten wird, und welche sämmtlich auf der Fläche dritter Ordnung F_3 liegen, weil jede mit F_3 vier Punkte gemeinsam hat. Die Fläche F_3 enthält aber im Ganzen sechs Trisecanten; es sei t_1 diese sechste Trisecante. Dieselbe muss auch von zwei der Fläche F_3 angehörigen, also nothwendiger Weise unter den oben erwähnten fünf enthaltenen Trisecanten geschnitten werden. Diese beiden können aber unter den drei Trisecanten t_2, T, t_3 nicht enthalten sein, weil von diesen drei Trisecanten jede schon von zwei vorhandenen geschnitten wird. Somit muss t_1 von T_2 und T_3 geschnitten werden; es müssen also auch T_2, T_3 windschief sein. Wir haben also das einfache Sechs-

seit $T_1, t_2, T_3, t_1, T_2, t_3$ von dessen Seiten jede die beiden Nachbarseiten schneidet, während sie zu den übrigen drei windschief ist. Solcher Trisecantensechsseite gibt es auf der Trisecantenfläche θ eine einfache Unendlichkeit; auf jeder durch R_6 gelegten cubischen Fläche liegt ein solches Sechsseit. Ein solches Sechsseit ist durch Annahme einer seiner Seiten vollkommen bestimmt. Alle T_i $(i = 1, 2, 3)$ und ebenso alle t_i sind windschief und ebenso ist T_i mit t_i windschief. T_i und $t_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ schneiden sich. Keine von den drei Quadrisecanten wird von einer Trisecante geschnitten ausserhalb R_6, weil ja sonst sieben Punkte von R_6 in einer Ebene liegen würden.

15. Das durch die Quadrisecanten Q_1, Q_2, Q_3 hindurchgehende Hyperboloid H schneidet eine durch R_6 gehende cubische Fläche F_3 ausser in Q_1, Q_2, Q_3 bekanntlich noch in drei Geraden N_1, N_2, N_3, welche von allen drei Quadrisecanten geschnitten werden. Es ist H ein Doppeldreihyperboloid von F_3. Die beiden Erzeugendensysteme von H wollen wir das Q-System, respective das N-System nennen, je nachdem ihm die Q-Geraden, respective die N-Geraden angehören. Die drei Geraden N_1, N_2, N_3 können mit R_6 keine Punkte gemeinsam haben, es sind „Nichtsecanten" von R_6. Denn sonst würde H mit R_6 mehr als die zwölf auf den drei Q_i gelegenen Punkten gemeinschaftlich haben, was nicht angeht.

Die neun Ebenen $(Q_i N_\varkappa)$ werden also F_3 in neun Geraden schneiden, welche wir $B_{i\varkappa}$ nennen wollen $(i = 1, 2, 3;\ \varkappa = 1, 2, 3)$. Da die Ebene $(Q_i N_\varkappa)$ von R_6 im Ganzen in sechs Punkten geschnitten wird, und vier von diesen Punkten auf Q_i liegen, so müssen die beiden übrigen auf $B_{i\varkappa}$ liegen.

„Es sind also die neun Geraden $B_{i\varkappa}$ Bisecanten von R_6."

Jede von den 27 Geraden einer F_3 wird von zehn anderen geschnitten, welche paarweise in fünf Ebenen liegen; für die Gerade N_i haben wir solcher Paare schon drei, nämlich $Q_1 B_{i1}$, $Q_2 B_{i2}$, $Q_3 B_{i3}$. Es werden somit noch zwei solche Paare vorkommen, je eines in einer durch N_i gehenden Ebene. Jedes solche Paar muss, da N_i Nullsecante ist, alle sechs Schnittpunkte seiner Ebene mit R_6 enthalten, und da ausser den drei Q_i keine weiteren Quadrisecanten vorkommen können, so müssen die beiden erwähnten Paare aus lauter Trisecanten bestehen. Es gehen also

durch N_1 z. B. zwei Ebenen α, β, von welchen α zwei Trisecanten A, A' und β ebenso zwei Trisecanten B, B' enthält. Jede Trisecante schneidet das Hyperboloid H in zwei Punkten, welche selbstverständlich der Schnittcurve von F_3 und H, d. h. dem Geradensystem Q_1, Q_2, Q_3, N_1, N_2, N_3 angehören müssen. Da nun alle Trisecanten zu allen drei Q_i windschief sind, so müssen jene zwei Schnittpunkte auf dem Geradentripel $N_1\,N_2\,N_3$ gelegen sein, d. h.:

„Jede der auf einer durch R_6 gehenden F_3 gelegenen Trisecanten schneidet zwei von den drei Geraden N_i, in denen das Hyperboloid H von F_3 geschnitten wird."

Die beiden Trisecanten A, A' und ebenso B, B' schneiden also die Gerade N_1; die Gerade A muss nun noch entweder N_2 oder N_3 schneiden. Sie möge N_3 treffen und soll mit T_2 bezeichnet werden. Nun muss auch A' noch eine der drei N-Geraden schneiden, aber N_3 kann es nicht sein, weil sonst die beiden Geraden $N_1\,N_3$ in der Ebene (AA') gelegen wären, was unmöglich ist, weil sie windschief sind. Es wird also A' ausser N_1 noch N_2 treffen und möge mit t_3 bezeichnet werden.

Ebenso muss eine der beiden Geraden B, B' die Gerade N_2 schneiden, sie heisse T_3, und die andere muss dann N_3 schneiden und soll t_2 heissen. Die Geraden T_2 und t_3 liegen in einer Ebene und schneiden sich somit in einem Punkte III, und T_3 und t_2 schneiden sich ebenso in einem Punkte VI. Da $T_2\,t_2$ dieselben zwei windschiefen Geraden N_1, N_3 schneiden, so sind sie auch zu einander windschief, und ebenso müssen $T_3\,t_3$ zwei windschiefe Gerade sein. Aber auch T_2 und T_3 müssen windschief sein; denn würden sie sich schneiden, so könnte es entweder in einem Punkte von N_1 geschehen, aber diesen Fall wollen wir ausscheiden, weil dann durch diesen Punkt drei Gerade von F_3 gingen, was im Allgemeinen nicht möglich ist (solange F_3 eine allgemeine Fläche dritter Ordnung ist), oder sie schneiden sich in einem ausserhalb N_1 gelegenen Punkte; dann aber bestimmen sie eine Ebene, in welcher N_1 und somit auch t_3 liegt, weil t_3 die zwei Geraden $N_1\,T_2$ schneidet. Aber es müsste auch N_2 in dieser Ebene liegen, weil ja N_2 die beiden Geraden T_3 und t_3 schneidet; dies ist aber unmöglich, da N_1 und N_2 windschief sind.

Selbstverständlich sind aus denselben Gründen t_2 und t_3 zwei windschiefe Gerade.

Die Gerade N_2 wird ebenso wie N_1 von fünf Geradenpaaren geschnitten, welche in fünf durch N_2 gehenden Ebenen liegen. Drei von diesen Paaren sind: $Q_1 B_{21}$, $Q_2 B_{22}$, $Q_3 B_{23}$ und von jedem der beiden übrigen haben wir je eine Gerade, nämlich T_3 respective t_3. Es wird somit die Ebene $N_2 T_2$ unsere F_3 noch in einer Geraden schneiden, welche Trisecante von R_6 ist, und welche noch eine N-Gerade schneiden muss; N_1 kann dies nicht sein, weil sonst N_1 in der Ebene $N_2 T_3$ liegen müsste, es muss also N_3 sein. Diese neue Gerade wollen wir t_1 nennen, ihr Schnittpunkt mit T_3 sei I.

Ebenso liegt in der Ebene $N_2 t_3$ noch eine auf F_3 gelegene Trisecante von R_6, welche noch eine N-Gerade schneiden muss; diese kann aber N_1 nicht sein, weil sonst N_1 in der Ebene $N_2 t_3$ liegen müsste, es muss also N_3 sein. Diese neue Gerade soll T_1 und ihr Schnittpunkt mit t_3 soll IV heissen. Aus denselben Gründen, welche für die windschiefe Lage von T_2 und t_2, respective T_2 und T_3 angeführt wurden, müssen auch die Geraden T_1 und t_1 windschief sein und ebenso die Geraden T_1, T_2 und t_1, t_2.

Drei von den fünf Geradenpaaren, welche N_3 schneiden, sind: $Q_1 B_{31}$, $Q_2 B_{32}$, $Q_3 B_{33}$. Die beiden übrigen müssen sich aber offenbar aus den schon vorhandenen vier Trisecanten T_1, T_2, t_1, t_2, welche N_3 schneiden, zusammensetzen, und da T_1 und t_1 windschief sind und ebenso T_2 und t_2, und endlich auch T_1, T_2 und t_1, t_2, so müssen sich T_1 und t_2 schneiden (in V) und ebenso T_2 und t_1 (in II). Wir haben nun das auf F_3 und θ liegende einfache Sechseck I II III IV V VI, dessen paare Seiten T_1, T_2, T_3 zu einander windschief sind, und ebenso die unpaaren Seiten t_1, t_2, t_3. So erkennen wir wieder, dass sich die Trisecanten der R_6 zu einfachen Sechsseiten gruppiren; auf jeder durch R_6 gehenden cubischen Fläche F_3 liegt ein solches Sechsseit. Offenbar sind $Q_1 Q_2 Q_3 T_1 T_2 T_3$ und $Q_1 Q_2 Q_3 t_1 t_2 t_3$ zwei Sextupel der Fläche F_3.

16. Betrachten wir das Quadrupel $Q_2 Q_3 t_2 t_3$; dasselbe wird zwei Transversalen besitzen, welche der Fläche F_3 angehören müssen. Eine von diesen Transversalen ist nun N_1, und es wird somit noch eine zweite auftreten, welche wir e_1 nennen wollen. Diese muss zu allen drei N windschief sein, weil sie Q_2 und Q_3

schneidet, und weil jede N auch diese zwei Geraden Q_2, Q_3 trifft.

Ferner muss e_1 zu Q_1 windschief sein, weil sonst das Hyperboloid H mit F_3 sieben Gerade gemeinsam hätte. Ferner muss e_1 zu T_2 und T_3 windschief sein, weil sonst e_1 in der Ebene $t_3 T_2$ (respective $t_2 T_3$) liegen würde, in welcher auch N_1 liegt, so dass sich e_1 und N_1 schneiden würden, was nach Obigem ausgeschlossen ist. Die Gerade e_1 liegt nicht in der Ebene $(N_3 t_1 T_2)$, weil sie zu N_3 windschief ist: sie wird also dieser Ebene in einem Punkte begegnen, welcher, da e_1 weder N_3 noch T_2 schneidet, nothwendigerweise auf t_1 liegen wird.

Wir haben also:

eine Gerade	e_1	welche	$Q_2 Q_3\ t_1\ t_2\ t_3$	schneidet, und werden
ebenso eine	e_2	„	$Q_3 Q_1\ t_1\ t_2\ t_3$	„
„	e_3	„	$Q_1 Q_2\ t_1\ t_2\ t_3$	„
„	E_1	„	$Q_2 Q_3\ T_1\ T_2\ T_3$	„
„	E_2	„	$Q_3 Q_1\ T_1\ T_2\ T_3$	„
„	E_3	„	$Q_1 Q_2\ T_1\ T_2\ T_3$	„

erhalten.

Jede e ist zu allen T windschief; denn würde sie eine von ihnen, z. B. T_1 schneiden, so müsste sie, weil sie t_2 schneidet, in der Ebene $T_1 t_2$ liegen, welche aber schon N_3 als dritte Gerade enthält, zu welcher ja e windschief ist. Da jede e_i dieselben zwei Q schneidet wie E_i, so müssen e_i und E_i windschief sein.

Es ist also jede e_i windschief zu Q_i, zu allen T und N; und E_i ist windschief zu Q_i, zu allen t und N.

Ferner sind je zwei e windschief und ebenso je zwei E, denn die e sind Erzeugende eines Systems des durch $t_1 t_2 t_3$, und die E sind Erzeugende des durch $T_1 T_2 T_3$ bestimmten Hyperboloides.

Sowie also die sechs Geraden Q, N ein Doppeldrei bilden, so stellen auch die sechs Geraden e, t und ebenso die sechs Geraden E, T je ein Doppeldrei von F_3 dar.

Ferner stellen N, E ein Sextupel und ebenso N, e ein Sextupel von F_3 dar.

17. Die Geraden T_i und t_i sind zu allen Q und zur Geraden N_i windschief, daher müssen sie den dritten in den Ebenen $Q_1 N_i$, $Q_2 N_i$, $Q_3 N_i$ gelegenen Geraden, d. h. B_{1i}, B_{2i}, B_{3i} begegnen.

Es schneiden also:

T_1 und t_1 die Geraden: B_{11}, B_{21}, B_{31},
T_2 „ t_2 „ „ B_{12}, B_{22}, B_{32},
T_3 „ t_3 „ „ B_{13}, B_{23}, B_{33}.

Da die Geraden e_i, E_i zu allen N und zu Q_i windschief sind, so müssen sie die dritten in den Ebenen Q_iN_1, Q_iN_2, Q_iN_3 gelegenen Geraden, d. h. B_{i1}, B_{i2}, B_{i3} schneiden.

Es schneiden also:

e_1 und E_1 die Geraden: B_{11}, B_{12}, B_{13},
e_2 „ E_2 „ „ B_{21}, B_{22}, B_{23},
e_3 . E_3 „ „ B_{31}, B_{32}, B_{33}.

Die drei B, welche T_i und t_i schneiden, müssen zu den beiden übrigen T und den beiden übrigen t windschief sein. Denn weil z. B. B_{21} die Gerade T_1 trifft, so kann sie T_2 nicht treffen, weil sie ja auch die Gerade N_1 trifft und folglich in der Ebene T_2N_1 liegen müsste, in welcher jedoch als dritte Gerade t_3 gelegen ist.

Ebenso müssen die drei B, welche E_i und e_i schneiden, zu den übrigen zwei E und zwei e windschief sein.

Denn weil z. B. B_{23} die Gerade e_2 schneidet, so kann sie e_3 nicht schneiden, weil sie sonst in der Ebene $Q_2 e_3$ liegen müsste, welche jedoch als dritte Gerade N_3 enthält.

Da sich je zwei von den drei Geraden T_1, B_{21}, E_2 schneiden, so liegen sie in einer Ebene, und da e_1 weder T_1 noch B_{21} trifft, so muss e_1 der Geraden E_2 begegnen. Aus dem analogen Grunde muss e_1 auch E_3 begegnen.

Es wird also e_1 von E_2 und E_3, e_2 von E_1 und E_3, und e_3 von E_1 und E_2 getroffen. Es wird also jede der Geraden $e_1 E_2 e_3 E_1 e_2 E_3$ von der folgenden, und die letzte von der ersten geschnitten, und sie bilden somit, sowie die Geraden $t_1 T_2 t_3 T_1 t_2 T_3$ ein einfaches auf der Fläche F_3 liegendes Sechsseit (Sechseck).

Wir haben nun je drei Gerade Q, N, t, T, e, E und neun Gerade B, im Ganzen 27 Gerade, also die sämmtlichen Geraden der Fläche dritter Ordnung F_3. Die Fläche F_3 hat mit der Trisecantenfläche 6 die fünffach zu zählende Curve R_6, die je vierfach zu zählenden Geraden Q_1, Q_2, Q_3 und die sechs Geraden

T, t gemeinschaftlich, und da diese Linien zusammen eine Schnittcurve von der Ordnung $5.6+4.3+6=48$ darstellen, und da θ von der 16ten Ordnung ist, so werden F_3 und θ keine weiteren Schnittlinien besitzen.

Jede T liegt mit einer B und mit einer E in einer und derselben Ebene, so z. B. T_1 mit B_{21} und E_2, und da B eine Biscante und T eine Triscante ist, so muss E mit der Curve R_6 einen Punkt gemeinschaftlich haben, d. h. einpunktige Secante von R_6 sein. Ebenso ist jede e eine einpunktige Secante von R_6.

Wenn man also durch R_6 irgend eine cubische Fläche legt, so sind von ihren 27 Geraden drei Quadrisecanten, sechs Trisecanten, neun Bisecanten, sechs einpunktige Secanten von R_6 und drei Gerade (N_1, N_2, N_3) haben mit R_6 keinen Punkt gemeinsam, sind Nichtsecanten.

Je zwei B-Gerade, welche dieselbe Q-Gerade oder dieselbe N-Gerade schneiden, müssen windschief zu einander sein, d. h. je zwei B-Gerade, welche entweder im ersten oder zweiten Index übereinstimmen, sind zu einander windschief, z. B. B_{12} B_{13}. Denn würden sie sich schneiden, so läge in ihrer Ebene nicht nur die Gerade Q_1, sondern auch N_2 und N_3, was unmöglich ist.

Dagegen müssen sich zwei B-Gerade schneiden, wenn sie weder im ersten noch im zweiten Index übereinstimmen. Zwei solche Gerade, sie seien B, B'; müssen doch zwei verschiedenen Quadrisecanten, sie seien Q, Q' respective und zwei verschiedenen Nichtsecanten, sie seien N, N' respective, begegnen. Da nun B' weder der N noch der Q begegnet, so muss sie B schneiden. So wird z. B. B_{12} geschnitten von B_{21}, B_{33}, B_{23}, B_{31}, von denen wieder die beiden ersten sich schneiden und ebenso die beiden letzten.

Wir können nun für jede der 27 Geraden jene zehn angeben, welche sie schneiden, und zwar wollen wir diese wieder in fünf Paare sich schneidender Geraden ordnen.

Es wird geschnitten:

Q_1 von $N_1 B_{11}$, $N_2 B_{12}$, $N_3 B_{13}$, $e_2 E_3$, $e_3 E_2$,
Q_2 „ $N_1 B_{21}$, $N_2 B_{22}$, $N_3 B_{23}$, $e_3 E_1$, $e_1 E_3$,
Q_3 „ $N_1 B_{31}$, $N_2 B_{32}$, $N_3 B_{33}$, $e_1 E_2$, $e_2 E_1$,
N_1 „ $Q_1 B_{11}$, $Q_2 B_{21}$, $Q_3 B_{31}$, $t_2 T_3$, $t_3 T_2$,
N_2 „ $Q_1 B_{12}$, $Q_2 B_{22}$, $Q_3 B_{32}$, $t_3 T_1$, $t_1 T_3$,
N_3 „ $Q_1 B_{13}$, $Q_2 B_{23}$, $Q_3 B_{33}$, $t_1 T_2$, $t_2 T_1$,

t_1	von	$e_1 B_{11}$,	$e_2 B_{21}$,	$e_3 B_{31}$,	$N_2 T_3$,	$N_3 T_2$,
t_2	„	$e_1 B_{12}$,	$e_2 B_{22}$,	$e_3 B_{32}$,	$N_3 T_1$,	$N_1 T_3$,
t_3	„	$e_1 B_{13}$,	$e_2 B_{23}$,	$e_3 B_{33}$,	$N_1 T_2$,	$N_2 T_1$,
T_1	„	$E_1 B_{11}$,	$E_2 B_{21}$,	$E_3 B_{31}$,	$N_2 t_3$,	$N_3 t_2$,
T_2	„	$E_1 B_{12}$,	$E_2 B_{22}$,	$E_3 B_{32}$,	$N_3 t_1$,	$N_1 t_3$,
T_3	„	$E_1 B_{13}$,	$E_2 B_{23}$,	$E_3 B_{33}$,	$N_1 t_2$,	$N_2 t_1$,
e_1	„	$t_1 B_{11}$,	$t_2 B_{12}$,	$t_3 B_{13}$,	$E_2 Q_3$,	$E_3 Q_2$,
e_2	„	$t_1 B_{21}$,	$t_2 B_{22}$,	$t_3 B_{23}$,	$E_3 Q_1$,	$E_1 Q_3$,
e_3	„	$t_1 B_{31}$,	$t_2 B_{32}$,	$t_3 B_{33}$,	$E_1 Q_2$,	$E_2 Q_1$,
E_1	„	$T_1 B_{11}$,	$T_2 B_{12}$,	$T_3 B_{13}$,	$e_2 Q_3$,	$e_3 Q_2$,
E_2	„	$T_1 B_{21}$,	$T_2 B_{22}$,	$T_3 B_{23}$,	$e_3 Q_1$,	$e_1 Q_3$,
E_3	„	$T_1 B_{31}$,	$T_2 B_{32}$,	$T_3 B_{33}$,	$e_1 Q_2$,	$e_2 Q_1$,
B_{11}	„	$Q_1 N_1$,	$t_1 e_1$,	$T_1 E_1$,	$B_{22} B_{33}$,	$B_{32} B_{23}$,
B_{12}	„	$Q_1 N_2$,	$t_2 e_1$,	$T_2 E_1$,	$B_{21} B_{33}$,	$B_{31} B_{23}$,
B_{13}	„	$Q_1 N_3$,	$t_3 e_1$,	$T_3 E_1$,	$B_{21} B_{32}$,	$B_{31} B_{22}$,
B_{21}	„	$Q_2 N_1$,	$t_1 e_2$,	$T_1 E_2$,	$B_{12} B_{33}$,	$B_{32} B_{13}$,
B_{22}	„	$Q_2 N_2$,	$t_2 e_2$,	$T_2 E_2$,	$B_{11} B_{33}$,	$B_{31} B_{13}$,
B_{23}	„	$Q_2 N_3$,	$t_3 e_2$,	$T_3 E_2$,	$B_{11} B_{32}$,	$B_{31} B_{12}$,
B_{31}	„	$Q_3 N_1$,	$t_1 e_3$,	$T_1 E_3$,	$B_{12} B_{23}$,	$B_{22} B_{13}$,
B_{32}	„	$Q_3 N_2$,	$t_2 e_3$,	$T_2 E_3$,	$B_{11} B_{23}$,	$B_{21} B_{13}$,
B_{33}	„	$Q_3 N_3$,	$t_3 e_3$,	$T_3 E_3$,	$B_{11} B_{22}$,	$B_{21} B_{12}$.

Das Sextupel QT bildet mit dem Sextupel EN ein Doppelsechs, und zwar sind Q_i und E_i, respective T_i und N_i die sich nicht schneidenden Geraden. Ebenso bildet Qt mit eN ein Doppelsechs und wird hierin Q_i von e_i und t_i von N_i nicht geschnitten. Ebenso bilden die Sextupel tE und Te ein Doppelsechs.

18. Wenn wir die durch R_6 gelegte F_3 das ganze Büschel durchlaufen lassen, so bleiben die Quadrisecanten Q fest, und die sechs Trisecanten T, t beschreiben die Trisecantenfläche θ vom 16ten Grade.

Da jede der neun Bisecanten eine der Quadrisecanten schneidet, so beschreiben die neun Bisecanten jene drei Flächen, welche man erhält, wenn man um Q_i ($i = 1, 2, 3$) eine Ebene rotiren lässt, ihre zwei variablen Schnittpunkte mit R_6 aufsucht und diese durch eine Gerade B verbindet. Die so entstehende Fläche β_i ist vom vierten Grade, geht einfach durch R_6 und hat Q_i zur dreifachen Geraden. Letzteres erkennt man sofort, da ja die Q_i für jeden auf ihr gelegenen Punkt von den neun durch

ihn gehenden Bisecanten sechs absorbirt, so dass durch ihn noch drei von Q_i verschiedene hindurchgehen und diese sind offenbar Erzeugende von β_i; da nun in jeder durch Q_i gehenden Ebene eine Erzeugende von β_i liegt, so ist β_i vom Grade $3+1=4$.

Die Flächen β_i sind somit rationale Flächen.

Die Erzeugenden der β_i gruppiren sich in Tripel, welche eine cubische Involution bilden, so wie sie nämlich durch die einzelnen Punkte von Q_i zu dreien hindurchgehen. Durch eine Bisecante B von R_6, welche einer Q begegnet, ist die diese Bisecante enthaltende F_3 des Büschels gegeben; denn die cubische Fläche des Büschels, welche durch irgend einen Punkt von B geht, muss B enthalten, weil sie mit ihr vier Punkte gemeinschaftlich hat. Unter den neun Geraden der F_3, welche Bisecanten von R_6 sind, wird also B vorkommen, aber ausser ihr noch zwei, welche dieselbe Q schneiden, weil jede Q von drei der neun Bisecanten geschnitten wird. Hieraus erkennen wir, dass sich die Erzeugenden der Fläche β zu Tripeln einer zweiten cubischen Involution gruppiren, nämlich so wie sie zu je dreien auf den einzelnen Flächen F_3 des Büschels liegen.

Für Q_i sind B_{i1}, B_{i2}, B_{i3} die drei Erzeugenden eines Tripels. Die beiden cubischen Involutionen auf β_i werden vier gemeinschaftliche Elementenpaare besitzen; d. h. es gibt auf Q_i vier Punkte von der Beschaffenheit, dass von den drei durch einen solchen Punkt gehenden Bisecanten zwei einer und derselben F_3 angehören. Da nun durch diesen Punkt drei Gerade der F_3 gehen, nämlich jene zwei und Q_i, so ist er ein Knotenpunkt von F_3.

„Es gibt also zwölf durch R_6 gehende cubische Flächen, welche einen auf einer Q-Geraden liegenden Knotenpunkt besitzen; auf jeder Q-Geraden liegen vier solche Knotenpunkte."

19. Jede der sechs einpunktigen Secanten e, E, schneidet zwei der Q-Geraden. Es werden somit diese Secanten jene drei Regelflächen vierter Ordnung beschreiben, für welche zwei Q-Gerade und R_6 Leitcurven sind. Diese Flächen haben die beiden Q-Geraden zu Doppelgeraden und sind vom Geschlechte Eins; e_i beschreibt dieselbe Fläche wie E_i.

Durch eine e-Gerade oder E-Gerade ist die Fläche F_3 eindeutig bestimmt, so dass durch e_i auch E_i eindeutig bestimmt ist

und umgekehrt. Die beiden Geraden e_i, E_i stellen also auf der Regelfläche vierter Ordnung, der sie angehören, Paare einer Paarinvolution (J_1^2) dar.

20. Wir haben gezeigt, dass eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlechte Eins als Schnittcurve zweier Flächen dritter Ordnung auftritt, welche drei windschiefe Gerade gemeinschaftlich haben. Es kann nun auch gezeigt werden, dass die Schnittcurve R_6 sechster Ordnung zweier cubischen Flächen F_3, F'_3, die durch drei windschiefe Geraden Q_1, Q_2, Q_3 hindurchgehen, vom Geschlechte Eins sein muss.

Zu dem Behufe wird zu zeigen sein, dass es unendlich viele Flächenbüschel gibt, deren Flächen die Curve in mit ihnen variablen Punktepaaren schneiden.[1] (Vergl. die Definition einer Curve vom Geschlechte Eins in der ersten Mittheilung über Raumcurven fünfter Ordnung vom Geschlechte Eins. Sitzungsbericht vom 17. Juli 1884.)

Zunächst können wir leicht beweisen, dass die Geraden Q_i vierpunktige Secanten von R_6 sind. Eine durch Q_1 z. B. gelegte Ebene α schneidet F_3. F'_3 in zwei Kegelschnitten C_2, C'_2, welche durch die beiden Punkte hindurchgehen, in denen α von Q_2 und Q_3 geschnitten wird.

Diese Kegelschnitte haben also noch zwei Punkte gemeinschaftlich und diese Punkte gehören offenbar R_6 an und sind die einzigen zwei in α liegenden, mit α variablen Punkte von R_6; daher muss Q_1 vier feste Punkte von R_6 enthalten, d. h. Quadrisecante sein und ebenso Q_2, Q_3.

Legt man nun durch irgend zwei feste Punkte a, b von R_6 zu zwei der drei Quadrisecanten, z. B. zu Q_1, Q_2 die Transversalen A, B, so wird jedes Hyperboloid, welches durch Q_1, Q_2, A, B hindurchgeht, R_6 noch in einem mit diesem Hyperboloid variablen Punktepaare schneiden. Alle jene Hyperboloide bilden aber ein Büschel, und solcher Büschel gibt es also in der That unendlich viele.

---

[1] Büschel, deren Flächen R_6 in je einem Punkte schneiden, kann es nicht geben, weil sonst R_6 rational wäre und als solche nicht auf zwei Flächen zweiten Grades liegen könnte. (Vergl. Über rationale Raumcurven. Sitzber. der königl. böhm. Ges. d. Wiss. Sitzung vom 28. April 1882.)

21. Dass die Curve R_6 vom Geschlechte Eins ist, folgt eigentlich schon aus der Existenz zweier Quadrisecanten. Sind nämlich Q_1, Q_2 zwei Quadrisecanten einer Raumcurve sechster Ordnung R_6 und ordnet man die beiden Ebenen, welche einen variablen Curvenpunkt mit Q_1 und Q_2 verbinden, einander zu, so erhält man zwei zweideutige Ebenenbüschel, deren Erzeugniss eine Fläche vierter Ordnung F_4 ist, auf welcher R_6 liegt. Die Punkte von R_6 erscheinen nun eindeutig auf die Punkte irgend eines ebenen Schnittes von F_4 bezogen. Dieser ebene Schnitt ist aber eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten, von denen je einer auf Q_1 und Q_2 liegt; dieser ebene Schnitt ist vom Geschlechte Eins und folglich ist auch R_6 vom Geschlechte Eins und muss daher nach Früherem noch eine dritte Quadrisecante besitzen. Es kann jedoch geschehen, dass der ebene Schnitt noch einen dritten Doppelpunkt besitzt, welcher nur von einer Doppelerzeugenden von F_4, d. h. von einer die beiden Quadrisecanten Q_1, Q_2 schneidenden Bisecanten herrühren kann. In diesem Falle ist der ebene Schnitt von F_4 und somit auch R_6 rational und wird ausser Q_1, Q_2 noch vier weitere Quadrisecanten besitzen.[1]

„Wenn also eine Raumcurve sechster Ordnung zwei Quadrisecanten besitzt, so besitzt sie wenigstens noch eine dritte Quadrisecante und ist vom Geschlechte Eins, oder sie besitzt noch weitere vier Quadrisecanten und ist rational.“

Es gibt also keine Raumcurve sechster Ordnung mit nur zwei Quadrisecanten.

Anmerkung. In derselben Art ergibt sich, dass eine Raumcurve n^{ter} Ordnung mit zwei $(n-2)$-punktigen Secanten vom Geschlechte Eins ist. Sie wird rational, wenn sie eine Bisecante besitzt, welche die beiden $(n-2)$-punktigen Secanten gleichzeitig schneidet.

[1] Siehe: „Über rationale Raumcurven.“ Sitzber. d. königl. böhm. Ges. d. Wissensch. Sitzung vom 28. April 1882.

Über Berührungscurven und Hülltorsen der windschiefen Helikoide

und ein dabei auftretendes zwei-zweideutiges Nullsystem

von

Theodor Schmid.

(Mit 1 Tafel.)

Die windschiefen Helikoide oder Schraubenregelflächen sind wegen ihrer Wichtigkeit in theoretischer und praktischer Hinsicht schon vielfach Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen. In Bezug auf das Berührungsproblem für das allgemeine Helikoid liegen insbesondere Arbeiten von Olivier[1] (1847), de la Gournerie[2] (1851 und 1864), Burmester[3] (1873 und 1875), Mannheim[4] (1880) und Pelz[5] (1883) vor, in welchen die Analysis, die Kinematik, die Theorie der Berührungsflächen und wohl auch bloss die Conformität von Dreiecken zur Herleitung der Resultate benützt wird.

Im Nachfolgenden soll nun gezeigt werden, dass diese Flächen, obwohl sie transcendenter Natur sind, doch der directen Behandlung nach der Methode der projectiven Geometrie zugänglich sind und für gewisse Probleme Ergebnisse algebraischer Natur liefern.

---

[1] Applications de la géométrie descriptive.

[2] Journal de l'école polytechnique, cahier 34, und „Traité de géométrie descriptive".

[3] Zeitschrift für Mathem. u. Physik, XVIII. Jahrg., und „Theorie und Darstellung der Beleuchtung".

[4] Cours de géométrie descriptive.

[5] Diese Sitzungsber., LXXXVII. Bd.

Die hier zu behandelnden Probleme sind:

Man soll die Hauptprojection[1] der Berührungscurve einer Torse mit gegebenem Richtungskegel finden.

Man soll den Richtungskegel der Hülltorse längs einer Curve mit gegebener Hauptprojection finden.

I. Die Erzeugende einer windschiefen Fläche.

Die Reihe der Punkte einer Erzeugenden einer windschiefen Fläche und das Büschel der zugehörigen Berührungsebenen sind bekanntlich projectivisch und können daher auf unendlich vielfache Art in perspectivische Lage gebracht werden. Am einfachsten geschieht dies dadurch, dass man das Ebenenbüschel um die Gerade des kürzesten Abstandes der Erzeugenden und ihrer Nachbarerzeugenden eine Drehung von 90° ausführen lässt und sodann dasselbe in der Richtung jener Geraden um den Parameter p verschiebt (Drehung und Schiebung in dem durch die Schraubung des windschiefen Elementes[2] angedeuteten Sinne vollzogen), aber auch dadurch, dass man um einen beliebigen Winkel ι dreht und um eine Strecke $i = p . \sin \iota$ verschiebt.

Das erstere folgt unmittelbar aus einem von Mannheim[3] herrührenden Satze; das letztere ist aber leicht zu ersehen (Fig. 1), wenn man beachtet, dass der Berührungspunkt B einer Ebene, welche mit der Centralebene den Keil von 45° bildet, um den

---

[1] So möge der Kürze halber „die Orthogonalprojection auf eine zur Schraubenachse normale Ebene" genannt werden.

[2] Hat ein Geradenpaar a, b den kürzesten Abstand r und den spitzen Winkel ρ, so soll dasselbe „linksgeschraubt" heissen und der Winkel ρ positiv gezählt werden, wenn eine in der Geraden des kürzesten Abstandes aufgestellte Person, welche in den spitzen Winkel schaut, die untere Gerade durch Heben und Linksdrehen mit der oberen zur Deckung bringen kann.

In diesem Sinne sollen „linksgeschraubte" und „rechtsgeschraubte" windschiefe Elemente unterschieden werden. Der Parameter der ersteren ist hienach positiv.

[3] De la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, art. 845:

„Ist die Strecke QO zur Erzeugenden im Centralpunkte Q normal und gleich dem Parameter, so sieht man ein Segment AB der Erzeugenden aus O unter dem Winkel, welchen die Berührungsebenen in A und B mit einander bilden."

Parameter vom Centralpunkte Q entfernt ist, und dass B nach der Drehung und Schiebung der Eckpunkt eines gleichschenkeligen, rechtwinkeligen Dreieckes mit den Katheten i ist.

Die perspectivische Lage ist nicht bloss für das neue Büschel g^* und die ursprüngliche Reihe g, sondern auch für das Büschel g und die Reihe g^* vorhanden. Zu jedem Werte der Schiebung i gehören zwei Drehungswinkel: ι und $(180°-\iota)$.[1]

II. Die Wendelfläche.

1. Bei einer continuierlichen Schraubung[2] um dieselbe Achse x mit gleichbleibendem Quotienten q erzeugt jede die Achse normal schneidende Gerade g eine Wendelfläche. Alle Erzeugenden dieser Fläche haben die Achse als Gerade des kürzesten Abstandes und denselben Parameter

$$p = q = \frac{h}{\pi},$$

wobei $2h$ die Ganghöhe der Schraubung ist. Hienach ergibt sich aus dem in I Gesagten:

Wenn man eine Wendelfläche φ um ihre Achse um einen beliebigen Winkel ι dreht und in der Richtung der Achse um eine Strecke $i = q.\sin\iota$ verschiebt (Drehung und Schiebung in dem durch die Schraubung

---

[1] Die persp. Lage des Büschels g^* und der Reihe g bleibt auch noch erhalten, wenn g^* um g rotiert. Der Ort der Achsen aller Ebenenbüschel, welche dem Büschel g congruent sind und mit der Reihe g perspectivisch liegen, wird daher gebildet von den beiden Geradenscharen eines Systems von Rotationshyperboloiden. Diese Büschel g^* erzeugen mit dem Büschel g alle orthogonalen Hyperboloide, welche die windschiefe Fläche längs der Erzeugenden g berühren.

[2] Ist die elementare Schiebungsstrecke $= 2k$ und der zugehörige Drehungswinkel $= 2\varkappa$, so soll der Schraubungsquotient $q = \frac{k}{\varkappa}$ (in Übereinstimmung mit dem in Anmerkung 2, S. 2 Gesagten) positiv gezählt werden, wenn die Schraubung eine linksgängige ist, d. h. wenn eine in der Achse aufgestellte Person die Bewegung als Heben und Linksdrehen beobachtet.

angedeuteten Sinne vollzogen), so ist die neue Lage φ^* der Fläche mit der früheren in der merkwürdigen Beziehung, dass jede Berührungsebene α^* der neuen Fläche durch den Berührungspunkt A von α und umgekehrt α durch A^* geht.

2. Wird in einem Punkte Q der Achse x eine Normalebene ω gelegt (Fig. 2), so enthält dieselbe eine Erzeugende g der Fläche φ. Ist nun α eine durch g gehende Ebene, so hat die Ebene α^* auf ω eine Spur a^*, welche zu g^* parallel ist, also mit g den Winkel ι bildet. Diese Spur schneidet g im Berührungspunkte A von α.

Anstatt die Ebene ω mit der Erzeugenden zu verändern, soll eine einzige derartige Ebene benützt werden, dafür aber die Erzeugenden der Fläche φ mit ihren Punktreihen g nach Q und jene von φ^* mit ihren Ebenenbüscheln g^* nach Q^* verschoben werden. Die Spur a^* liefert dann die Hauptprojection A' des Berührungspunktes A von α als Schnittpunkt mit der Projection g' der Erzeugenden g.

3. Ist nun die Berührungscurve einer Torse mit gegebenem Richtungskegel gesucht, so verlegt man die Spitze desselben nach Q^* und dreht ihn dann um den Winkel ι (im Sinne der Schraubung) um die Achse x. Hat der Kegel in seiner neuen Stellung auf der Ebene ω die Spur c_ι^*, so ist der Ort der Punkte, in welchen die Tangenten a^* dieser Spur von den Strahlen g' des Büschels Q unter dem constanten Winkel ι geschnitten werden, die Hauptprojection der Berührungscurve. Die Annahme $\iota = 90°$ und $i = q$ lässt unmittelbar erkennen, dass man es mit der Fusspunktcurve von c_{90}^* in Bezug auf Q als Pol zu thun hat. Bezeichnet man den der letzten Annahme entsprechenden Punkt Q^* mit O, so dass $\overline{OQ} = q$ ist, und nennt man den Richtungskegel mit dem Punkte O als Spitze „Hauptdirection" der Hülltorse, so ergibt sich für die Wendelfläche:

Die Hauptprojection c' der Berührungscurve einer Torse t mit gegebenem Richtungskegel ist die Fusspunktcurve der Spur c^* der um 90° (im Sinne der Schraubung) gedrehten

Die Spur der Hauptdirection der Hülltorse längs einer Curve c mit gegebener Hauptprojection ist die negative Fusspunktcurve der um 90° (in dem der Schraubung ent-

Hauptdirection in Bezug auf den Achsenschnittpunkt Q als Pol.[1, 2]

Die Hauptprojection der Berührungscurve eines umschriebenen Cylinders, für welchen c^* in ein Strahlenbüschel L^* übergeht, ist der Kreis mit dem Durchmesser $\overline{QL^*}$.

gegengesetzten Sinne) gedrehten Hauptprojection (c') in Bezug auf den Achsenschnittpunkt Q als Pol.

Die Spur der Hauptdirection der Torse, welche die Fläche längs der Schnittlinie mit einer zur Achse parallelen Ebene berührt, ist eine Parabel mit Q als Brennpunkt und (c') als Scheiteltangente.

Zwischen den Curven c' und c^* besteht also eine sehr bekannte quadratische Verwandtschaft, nämlich die beiden

---

[1] Nebenbei ergibt sich hier durch räumliche Beziehungen die von Herrn Weinmeister in der Zft. f. Math. u. Phys. (XXVIII. Jahrg., S. 256) mitgetheilte Eigenschaft der Fusspunktcurven. Da nämlich der Richtungskegel um den Winkel ι bezw. 90° gedreht und in den Abständen $i = q.\sin\iota$ bezw. q von der Spitze durch parallele Ebenen geschnitten wird, so ist die Fusspunktcurve von c^*_{90} zugleich die Curve constanten Winkelschnittes für c^*_ι, welches sich ergibt, indem man c^*_{90} um $(90-\iota)$ um Q dreht und im Verhältnisse $i : q = \sin\iota$ in Bezug auf Q conform verkleinert. Bei Kegelschnitten bilden die c^*_ι das System der vierfach berührenden Kegelschnitte von c' (Ameseder, diese Sitzungsber., 1881, S. 882).

[2] Wird A' als Hauptprojection des Berührungspunktes der Ebene α^*_{90} für eine Rotationsfläche angesehen (Fig. 3), so muss die Meridiancurve die Eigenschaft haben, dass ihre Subtangente auf der Drehungsachse x constant gleich q sei, was bekanntlich bei der logarithmischen Linie der Fall ist. Daraus folgt:

Die Hauptprojection der Berührungscurve einer Torse mit gegebenem Richtungskegel für die Wendelfläche (Param. $= q$) ist derjenigen für das Logarithmoid (Subt. $= q$) congruent mit dem Drehungscentrum Q und dem Drehungswinkel 90°.

Sucht man auf den Erzeugenden zu jedem Punkte A einen conjugierten Punkt A_0, so dass $A'Q.A'_0Q = -q^2$ wird, und fasst man A'_0 als Hauptprojection des Punktes A_0 auf, in welchem eine zu α^*_{90} parallele Ebene eine Rotationsfläche berührt, so muss die Meridiancurve die Eigenschaft haben, dass ihre Subnormale auf der Drehungsachse x constant gleich q sei, was für die Parabel (Param. $= q$) der Fall ist (Fig. 4). Also:

Die Hauptprojection der Berührungscurve einer Torse mit gegebenem Richtungskegel für das Paraboloid (Brennp. O, Leiteb. ω) und jene für das Logarithmoid (Subt. $= q$) sind verwandt nach dem Principe der reciproken Radien mit Q als Centrum und $-q^2$ als Potenz.

Curven entsprechen sich in dem Nullsystem zweiten Grades, welches Q und die absoluten Kreispunkte von ω als Hauptpunkte hat.

III. Das windschiefe Helikoid.

1. Der Parameter einer Erzeugenden.

Bei einer continuierlichen Schraubung um dieselbe Gerade x mit gleichbleibendem Quotienten q erzeugt eine beliebige Gerade g im allgemeinen ein windschiefes Helikoid. Das Geradenpaar (x, g), für welches der kürzeste Abstand $\overline{QR} = r$ und der spitze Winkel $(f, g) = \rho$ sei (Fig. 5), möge als rechtsgeschraubt (ρ negativ) vorausgesetzt werden, während die Schraubung selbst eine linksgängige (q positiv) sei. Bekanntlich ist R der Centralpunkt der Erzeugenden g, und er beschreibt bei der Bewegung die Strictionshelix.

Alle Erzeugenden haben den gleichen Parameter p. Um zu finden, in welcher Weise derselbe von q, r und ρ abhängt, nehmen wir an, dass g durch Drehung um einen Winkel $2\varkappa$ und Schiebung um eine Strecke $2k$ in eine endlich verschiedene Lage g_0 übergegangen sei, wobei $k : \varkappa = q$ ist. Denken wir uns nun die Gerade y, die zu x parallel ist, und welche die Geraden g, g_0 in den Punkten B, A_0 schneidet, ferner die den letzteren entsprechenden Punkte B_0, A, so ist $AR = RB = A_0R_0 = R_0B_0$. Für die Sehne AA_0 oder s ist wieder der kürzeste Abstand $MN = r$, aber der Winkel $(f, s) = \sigma$ (negativ). Durch blosse Drehung kommt A nach A_0' und dann durch Schiebung von A_0' nach A_0; es ist also

$$\sphericalangle AM'N' = \varkappa \text{ und } \overline{NN'} = k,$$

folglich
$$AN' = r.\mathrm{tg}\,\varkappa = k.\mathrm{tg}\,\sigma.$$

Mit Rücksicht auf den Sinn der Schraubung ergibt sich für eine Schraubungssehne:

Aus einer bekannten Eigenschaft der Parabel folgt noch:

Die Hauptprojection der Berührungscurve einer Torse mit gegebenem Richtungskegel für das Paraboloid (Brennp. O, Leiteb. ω) ist die reciproke Polare der Spur der Hauptdirection (Centrum Q, Potenz $-q^2$).

Hiezu vergleiche man die analytischen Untersuchungen in Burmesters „Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmässig gestalteter Flächen“

$$\frac{r}{\operatorname{tg}\sigma} = -\frac{k}{\operatorname{tg}\varkappa}. \qquad 1)$$

Zieht man durch B parallel zu g_0 eine Gerade g_1, welche mit g den Winkel $(g, g_1) = 2\delta$ bildet, so entsteht ein gleichschenkeliges Dreikant (ygg_1), und fällt man von A_0 auf die Ebene (gg_1) eine Normale $A_0D = 2d$, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck (A_0BD), in welchem $\sphericalangle A_0BD = \beta$ der Winkel ist, den y mit der Ebene (gg_1) bildet. Nun ist leicht zu sehen, dass (g, g_0) bei den hier gemachten Voraussetzungen ein linksgeschraubtes Geradenpaar ist, für welches der kürzeste Abstand $= 2d$ und der spitze Winkel $= 2\delta$ (positiv) ist.

Aus der Fig. 5 ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} AA'_0 &= 2r.\operatorname{tg}\varkappa \\ A_0A'_0 &= -AA'_0.\operatorname{cotg}\sigma \\ BA'_0 &= -AA'_0.\operatorname{cotg}\rho \end{aligned}\right\} ; \text{ daher } A_0B = -2r\operatorname{tg}\varkappa[\operatorname{cotg}\sigma - \operatorname{cotg}\rho].$$

Ferner folgt aus dem Dreikante (ygg_1):

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \operatorname{cotg}\varkappa\operatorname{tg}\delta, \\ \sin\delta &= -\sin\varkappa\sin\rho. \end{aligned} \qquad 2)$$

Nun ist $$A_0D = A_0B.\sin\beta$$

oder $$A_0D = A_0B.\operatorname{cotg}\varkappa\operatorname{tg}\delta,$$

folglich $$d = -r\operatorname{tg}\delta[\operatorname{cotg}\sigma - \operatorname{cotg}\rho],$$

woraus man mit Hilfe von 1) erhält:

$$\frac{d}{\operatorname{tg}\delta} = \frac{k}{\operatorname{tg}\varkappa} + \frac{r}{\operatorname{tg}\rho}. \qquad 3)$$

Aus Gleichung 2) kann δ und aus 3) d gefunden werden.

Die Gleichung 3) gibt den Zusammenhang von (d, δ) mit $(k, \varkappa)$ und (r, ρ) für eine endliche Schraubung der Geraden g um die Achse x an.[1]

Für eine unendlich kleine Bewegung geht die Sehne AA_0 in die Tangente t des Punktes R über, welche mit f den Winkel τ bildet, und es wird

[1]) Die Gleichung 3) ist bisher nirgends abgeleitet.

$$\sigma = \tau,$$

$$\frac{d}{\operatorname{tg} \delta} = p, \qquad \frac{k}{\operatorname{tg} \varkappa} = q,$$

nach 1) $$q = -r \operatorname{cotg} \tau, \tag{4}$$

nach 3) $$p = q + r \operatorname{cotg} \rho. \tag{5}$$

Der Parameter aller Erzeugenden des Helikoides[1] ist also:

$$p = r(\operatorname{cotg} \rho - \operatorname{cotg} \tau). \tag{6}$$

2. Die Berührungsebene und ihr Berührungspunkt.

Ist wieder ω die durch Q normal zur Achse gehende Ebene (Fig. 6), so sei g' die Hauptprojection der Punktreihe g. Wenn nun das Ebenenbüschel g und die Tangente t des Punktes R eine Drehung von 90° (im Sinne der Schraubung) um die durch R zu x parallel gehende Gerade f ausführt, so wird die Achse x von den Geraden (t) und (g) in den Punkten O und P geschnitten. Aus den Gleichungen 4) und 6) ist jetzt sofort zu sehen, dass $OQ = q$ und $OP = p$ ist.

Verschiebt man das Büschel g auch noch in der Richtung der Achse (im Sinne der Schraubung) um die Strecke p, so dass g^* durch O geht, dann ist der Winkel der Geraden g' und g^* gleich 90° und ihr kürzester Abstand $RO^* = -p.\sin \rho$. Da nun jede Strecke $RA' = -RA.\sin \rho$ ist, so muss die Reihe $g'(A')$ mit dem Ebenenbüschel $g^*(\alpha^*)$ sowie mit dem Spurenbüschel $S(\alpha^*)$ des letzteren perspectivisch liegen.

Die Geraden g' bilden ein normales Helikoid φ' und die g^* ein axiales Helikoid φ^*, wobei jede Ebene α^* durch die Projection A' ihres früheren Berührungspunktes A geht. Schiebt man nun alle Erzeugenden von φ' in eine einzige Ebene ω und jene von φ^* nach O, so bilden die ersteren die Tangenten eines

---

[1] Über Gleichung 6) siehe:

De la Gournerie, Traité de géométrie descriptive, art. 960; Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, II. Theil, Art. 227; Mannheim, Cours de géométrie descriptive, p. 357; Buka, Die Krümmung windschiefer Flächen, Zeitschrift für Mathematik und Physik, XXVI. Jahrg.

Kreises (r) mit dem Radius r, die letzteren einen Rotationskegel, dessen Spurkreis (s) den Radius $s = -q \cdot \operatorname{tg} \rho$ hat.[1]

Hiemit ist das Berührungsproblem gelöst. Ist nämlich (Fig. 7) G die Spur und g' die Projection einer Erzeugenden g, ferner a die Spur einer durch g gehenden Ebene α, so fällt man aus Q die Normale auf g', welche den Kreis s im Punkte S schneidet. Dann zieht man aus S die Gerade a^* normal zu a, so wird g' von a^* in der Hauptprojection A' des Berührungspunktes A der Ebene α geschnitten. Umgekehrt kann man a aus A' finden.[2]

3. Die Hülltorse und ihre Berührungscurve (das zweizweideutige Nullsystem).

Handelt es sich nun um eine Hülltorse und die zugehörige Berührungscurve für das windschiefe Helikoid, so möge wieder folgende Bezeichnung gelten:

Sucht man den Schnitt der Hülltorse mit der unendlich fernen Ebene φ_∞ und den Schein k desselben aus O, so soll der Kegel k die Hauptdirection der Hülltorse heissen.

Sucht man den Schein der Berührungscurve aus dem unendlich fernen Achsenpunkte F_∞ und den Schnitt c' desselben mit ω, so soll die Curve c' die Hauptprojection der Berührungscurve heissen.

---

[1] Der Punkt S würde daher nach Gleichung 4) bei der Schraubung eine Tangente haben, welche zu g parallel ist.

[2] Diese einfache Construction des Berührungspunktes ist schon wiederholt auf verschiedenen Wegen gefunden worden.

De la Gournerie [Journal de l'école polytechnique, 34. cahier, 1851] findet dieselbe analytisch (Art. 46) und auch rein geometrisch (Art. 47) mit Hilfe von conformen Dreiecken. In seinem „Traité de géométrie descriptive. 1864" zeigt er die Construction zuerst für ein axiales Helikoid und benützt dann dieses als berührende Hilfsfläche für das allgemeine Helikoid (Art. 1023).

Mannheim [Cours de géométrie descriptive, 1880] findet S als Hauptprojection jenes Durchmessers, welcher der zu g normalen Ebene im linearen Nullsysteme conjugiert ist, das bei einer elementaren Schraubung auftritt, und zeigt, dass dieser Durchmesser auch eine Erzeugende des Normalparaboloides der von g erzeugten Fläche ist, woraus die obige Construction folgt (S. 352).

Pelz [diese Sitzungsber., LXXXVII. Bd., 1883] findet S als Brennpunkt der Contour jenes berührenden Paraboloides, welches ω als Richtebene hat, woraus sich ebenfalls die obige Construction leicht ergibt.

Bezeichnet man mit k^* die um einen rechten Winkel im Sinne der Schraubung um die Achse x gedrehte Hauptdirection, so soll der leichteren Übersicht wegen statt dieses Kegels $k^*(\alpha^*)$ seine Spur $c^*(a^*)$ auf ω in Betracht gezogen und der Zusammenhang der Curven c^* und c' untersucht werden.

Eine Gerade a^* (Fig. 8) schneidet den Kreis s in zwei Punkten S_I und S_{II}; die zugehörigen Radien QS_I und QS_{II} schneiden den Kreis r in zwei Punkten R_I und R_{II}, welche auf einer Geraden a_r^* liegen. Das Feld der Geraden a^* und jenes der a_r^* sind conform mit dem Index $(s:r)$ und dem Centrum Q. Die Tangenten in R_I und R_{II} seien g'_I und g'_{II}.

Jede Gerade a^* wird von dem eindeutig zugewiesenen Tangentenpaare g'_I und g'_{II} des Kreises r in den ihr entsprechenden Punkten A'_I und A'_{II} geschnitten.

Aus einem Punkte A' (Fig. 8) gehen zwei Tangenten g'_1 und g'_2 an den Kreis r; die Radien ihrer Berührungspunkte R_1 und R_2 schneiden den Kreis s in den Punkten S_1 und S_2, welche die Berührungspunkte der Tangenten aus einem Punkte A'_s sind. Das Feld der Punkte A' und jenes der A'_s sind conform mit dem Index $(r:s)$ und dem Centrum Q. Die Geraden, welche A' mit S_1 und S_2 verbinden, seien a_1^* und a_2^*.

Jeder Punkt A' wird mit dem eindeutig zugewiesenen Punktepaare S_1 und S_2 des Kreises s durch die ihm entsprechenden Geraden a_1^* und a_2^* verbunden.

Die Spur $c^*(a^*)$ der gedrehten Hauptdirection einer Hülltorse und die Hauptprojection $c'(A')$ der zugehörigen Berührungscurve sind entsprechende Gebilde eines zwei-zweideutigen Nullsystems, in dem jeder Geraden a^* zwei auf ihr liegende Punkte A'_I, A'_{II} und jedem Punkte A' zwei durch ihn gehende Geraden a_1^*, a_2^* entsprechen.

Das Feld Σ^* hat die absoluten Centralstrahlen (aus Q) als singuläre Geraden. Jeder von beiden entsprechen alle auf ihr liegenden Punkte.

Das Feld Σ' hat die absoluten Kreispunkte als singuläre Punkte. Jedem von beiden entsprechen alle durch ihn gehenden Geraden.

Für das Feld Σ^* ist s ein Verzweigungskreis, indem seinen Tangenten zwei zusammenfallende Punkte der unendlich fernen Geraden entsprechen.

Für das Feld Σ' ist r ein Verzweigungskreis, indem seinen Punkten zwei zusammenfallende Geraden des Büschels Q entsprechen.

Ausserdem gibt es einen Doppelkreis m mit dem Radius $m = \sqrt{rs}$. Seine Tangenten und die zugehörigen Berührungspunkte entsprechen sich doppelt.[1]

Die den Strahlen eines Büschels L^* entsprechenden Geraden g'_{I}, g'_{II} bilden eine quadratische Tangenteninvolution auf dem Träger r mit der Polaren i von L^* in Bezug auf m als Involutionsgerade, welche den Kreis m in den Punkten M' und N' schneidet. Das Büschel L^* und die Tangenteninvolution erzeugen die Nullcurve c'_0 des Büschels.

Die Nullcurve c'_0 eines Strahlenbüschels L^* ist eine rationale Curve vierter Ordnung[2] mit den Doppelpunkten L^*, M', N'.

Die Nullcurve c^*_0 einer Punktreihe l' ist eine rationale Curve vierter Classe mit den Doppeltangenten l', m^*, n^*.

Eine Curve c^* n. Classe hat mit jeder Nullcurve c^*_0 $(4n)$ gemeinsame Tangenten. Den letzteren entsprechen die $(4n)$ Punkte, welche c' mit der Geraden l' gemein hat. Den n Tangenten der Curve c^* aus einem absoluten Kreispunkte entspricht dieser Kreispunkt selbst.

Daraus folgt für das Helikoid:

Die Hauptprojection c' der Berührungscurve einer Torse mit einer Hauptdirection n. Classe ist eine Curve $(4n)$. Ordnung mit zwei n-fachen Punkten in den ab-

Die Spur c^* der gedrehten Hauptdirection der Hülltorse längs einer Curve mit einer Haupt projection n. Ordnung ist eine Curve $(4n)$. Classe mit zwei n-fachen

[1] Eine mehrdeutige Beziehung zweier ebener Gebilde hat zuerst Ch. Wiener im III. Bande der Math. Ann. und eine besondere ein-zweideutige Verwandtschaft hat A. Schwarz im XCIV. Bande (1886) dieser Sitzungsberichte behandelt.

[2] „Über Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" von A. Ameseder, diese Sitzungsber., LXXIX. Bd.

soluten Kreispunkten, mit $(2n)$ Doppelpunkten[1] auf dem Kreise m, $(2n)$ Berührungspunkten auf dem Kreise r und $(2n)$ Asymptoten, welche den Kreis s berühren. Wenn Q ein Brennpunkt der Hauptdirection ist, wird die Ordnung von c' um zwei erniedrigt.

Tangenten in den absoluten Centralstrahlen, mit $(2n)$ Doppeltangenten, die den Kreis m berühren, und $(2n)$ Centralstrahlen, welche den Punkten auf r entsprechen. Wenn die Hauptprojection durch die absoluten Kreispunkte geht, wird die Classe von c^* um zwei erniedrigt.

IV. Die besonderen Arten des Helikoides.

1. Für das axiale Helikoid ist

$$r = 0.$$

Das Feld Σ_r^* wird hier unendlich klein (artet in das Büschel Q aus).

Die Geraden g'_{I} und g'_{II}, welche (Fig. 9 α) zu einer Geraden a^* gehören, gehen durch Q normal zu QS_{I} und QS_{II} und treffen a^* in den ihr entsprechenden Punkten A'_{I} und A'_{II}.

Die Punkte S_1 und S_2, in welchen der zu $A'Q$ normale Durchmesser den Kreis s schneidet, geben mit dem Punkte A' verbunden die ihm entsprechenden Geraden a_1^* und a_2^*.

Das Centrum Q wird hier ein dritter singulärer Punkt. Da auch $m = 0$ ist, wird das Centrum überdies ein unendlich

2. Für das normale Helikoid ist $\rho = 90°$, also

$$s = \infty.$$

Das Feld Σ_r^* wird hier unendlich klein (artet in das Büschel Q aus).

Die Geraden g'_{I} und g'_{II}, welche (Fig. 9β) zu einer Geraden a^* gehören, sind die Tangenten von r in den Endpunkten des Durchmessers a_r^*, welcher zu a^* parallel ist, und treffen daher a^* normal in A'_{I} und A'_{II}.

Jedem Punkte A' entsprechen die Geraden a_1^* und a_2^*, welche zu den Tangenten aus A' an r normal sind.

Die unendlich ferne Gerade wird hier eine dritte singuläre Gerade. Da auch $m = \infty$ ist, wird die unendlich ferne

---

[1] Ausserdem sind noch jene Punkte, deren entsprechendes Geradenpaar die Spur c^* berührt, Doppelpunkte von c'.

kleiner Doppelkreis. Jedem Centralstrahle entsprechen zwei in Q vereinigte Punkte.

Die den Strahlen eines Büschels L^* entsprechenden Geraden g'_I und g'_{II} bilden eine quadratische Strahleninvolution Q.

Die Punkte M' und N' fallen mit Q zusammen.

Die g', welche zu den Tangenten aus Q an die gedrehte Hauptdirection normal sind, bilden n Doppeltangenten im $(2n)$-fachen Punkte Q der Hauptprojection c'.

Wenn Q ein Brennpunkt der Hauptdirection ist, so wird die Ordnung von c' um vier erniedrigt, und Q ist dann nur ein $2(n-2)$-facher Punkt.

Gerade überdies eine Doppelgerade. Jedem ihrer Punkte entspricht sie selbst doppelt.

Die den Punkten einer Reihe l' zugeordneten Punktepaare S_1 und S_2 bilden eine quadratische Punktinvolution auf der unendlich fernen Geraden.

Die Punkte M' und N' gehen in die absoluten Kreispunkte über.

Die Nullcurve c'_0 ist die Fusspunktcurve des Kreises r für den Pol L^*. Die Doppelpunkte auf m und die Asymptoten der Hauptprojection entfallen im allgemeinen.

Wenn die Hauptdirection die unendlich ferne Gerade berührt, so wird die Ordnung von c' um zwei erniedrigt.

3. Für das axiale, normale Helikoid[1] ist

$$r = 0 \qquad \text{und} \qquad s = \infty .$$

Hier treten drei singuläre Punkte und drei singuläre Geraden auf, welche zusammen ein Hauptdreieck bilden. Das Nullsystem reduciert sich, indem (Fig. 10β) jeder Geraden a^* zwei zusammenfallende Punkte A' (Fusspunkt der Normalen aus dem Centrum Q) und jedem Punkte A' zwei zusammenfallende Geraden a^* (Normale zum Centralstrahle QA' im Punkte A') entsprechen. Die Verwandtschaft geht in das circulare Nullsystem zweiten Grades über, was schon S. 6 gefunden wurde.

4. Für das torsale Helikoid[2] ist

$$r = s = m .$$

[1] Flachgängige Schraubenfläche oder Wendelfläche.

[2] Abwickelbare Schraubenfläche.

Jeder Geraden a^* entsprechen hier (Fig. 10α) ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kreise r, und jedem Punkte A' entsprechen seine beiden Tangenten an r. Der Kreis r ist ein singulärer Kreis, indem jeder Tangente alle ihre Punkte und jedem Punkte desselben alle durch ihn gehenden Geraden entsprechen.

Die Hauptprojection c' der Berührungscurve einer Torse mit einer Hauptdirection n. Classe besteht aus dem n-fachen Kreise r und den $2n$ gemeinsamen Tangenten von c^* und r.

5. Das Rotationshyperboloid ist jene besondere Art des Helikoides, bei welcher der Schraubungsquotient $q = 0$ ist; dann ist aber auch

$$s = 0 \text{ und } m = 0.$$

Der Punkt O fällt hier mit Q zusammen, so dass das Spurfeld Σ^* unendlich klein wird (in das Büschel Q ausartet), wodurch die Construction entsprechender Elemente des Nullsystems scheinbar unausführbar wird. Das Hindernis ist aber sofort beseitigt, wenn man beachtet, dass das Feld Σ_r^* nicht unendlich klein ist. Dasselbe ergibt sich unabhängig von Σ^* als Spurfeld eines Bündels, welches man erhält, indem man die gedrehte Hauptdirection von O nach P verschiebt. Dabei ist nach dem früheren (S. 8, Art. 2) $PQ = q - p$ und nach Gleichung 5) $PQ = -r \, . \operatorname{cotg} \rho$.

Schneidet (Fig. 11) eine Gerade a_r^* den Kreis r in den Punkten R_I und R_II, und sind g'_I und g'_II die Tangenten in diesen Punkten, so treffen die letzteren die durch Q parallel zu a_r^* gehende Gerade a^* in zwei ihr entsprechenden Punkten A'_I und A'_II. Jeder durch Q gehenden Geraden a^* entsprechen aber auf diese Art unendlich viele Paare von Punkten, welche auf ihr liegen; denn zu jeder solchen Geraden a^* gehören alle zu ihr parallelen Geraden a_r^*.

Aus einem Punkte A' gehen zwei Tangenten g'_1 und g'_2, welche den Kreis r in den Punkten R_1 und R_2 berühren. Jedem Punkte A' entsprechen zwei zusammenfallende Geraden a^* (die Verbindungsgerade von A' mit Q); die zugehörigen Geraden a_{r1}^* und a_{r2}^* gehen durch R_1, beziehungsweise R_2, parallel zu a^*.

Der Punkt Q ist Scheitel eines Büschels von singulären Geraden von Σ^* und selbst ein singulärer Punkt von Σ'.

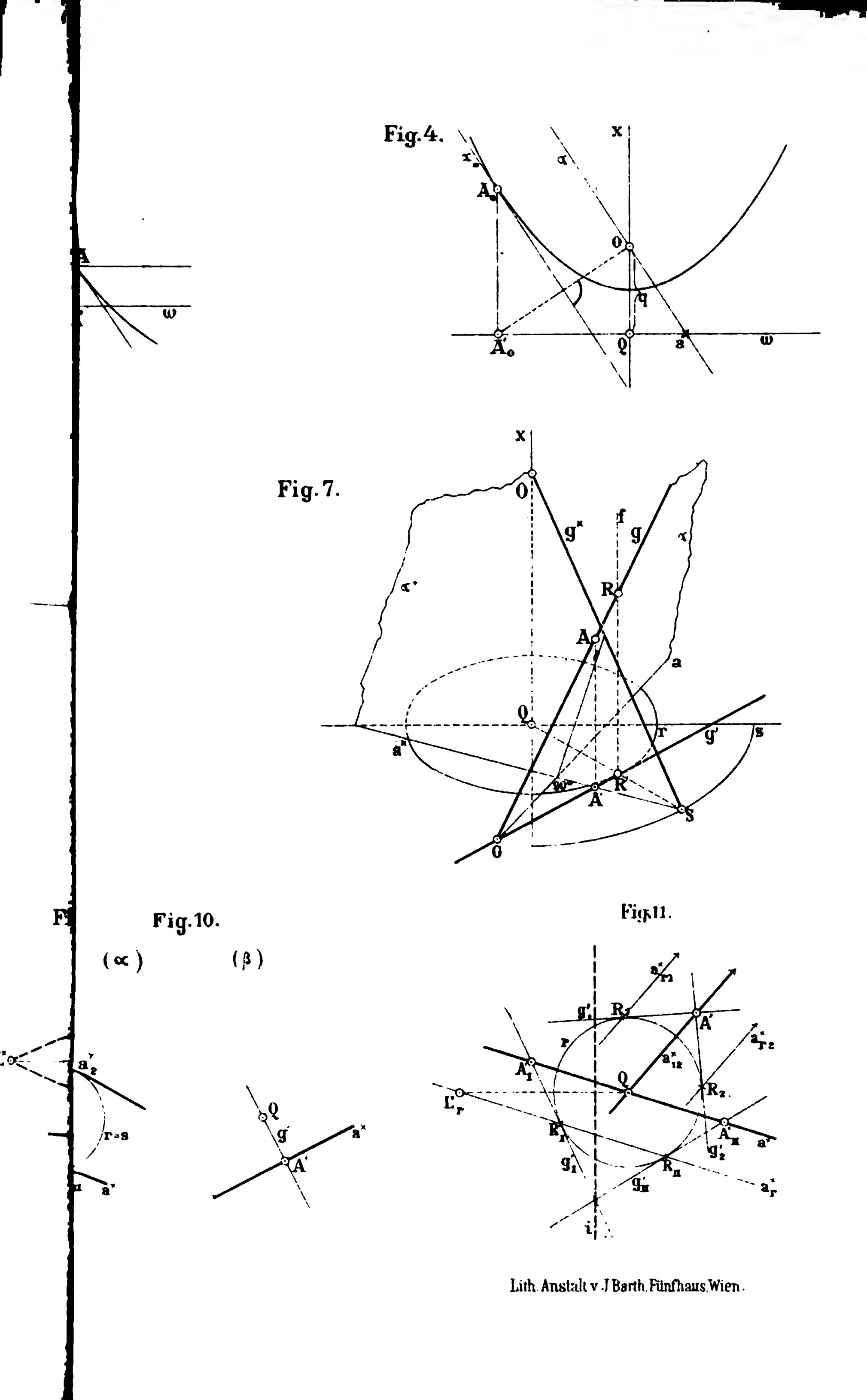
Für Σ_r^* ist r ein Verzweigungskreis, indem seinen Tangenten zwei zusammenfallende Punkte der unendlich fernen Geraden entsprechen.

Die zu den Strahlen eines Büschels L_r^* gehörigen Geraden g_I' und g_{II}' bilden wieder die quadratische Tangenteninvolution i auf dem Träger r. Dieselbe erzeugt mit dem Büschel Q die Nullcurve c_0', welche hier, abgesehen von den absoluten Centralstrahlen, ein Kegelschnitt[1] ist. Auch die Hauptprojection c' besteht aus den beiden n-fach zu zählenden absoluten Centralstrahlen und aus einer Curve $(2n)$. Ordnung; denn jeder absolute Centralstrahl gehört zu n Tangentenpaaren, und da er auch zu sich selbst normal ist, fällt n-mal g' mit dem entsprechenden a^* zusammen.

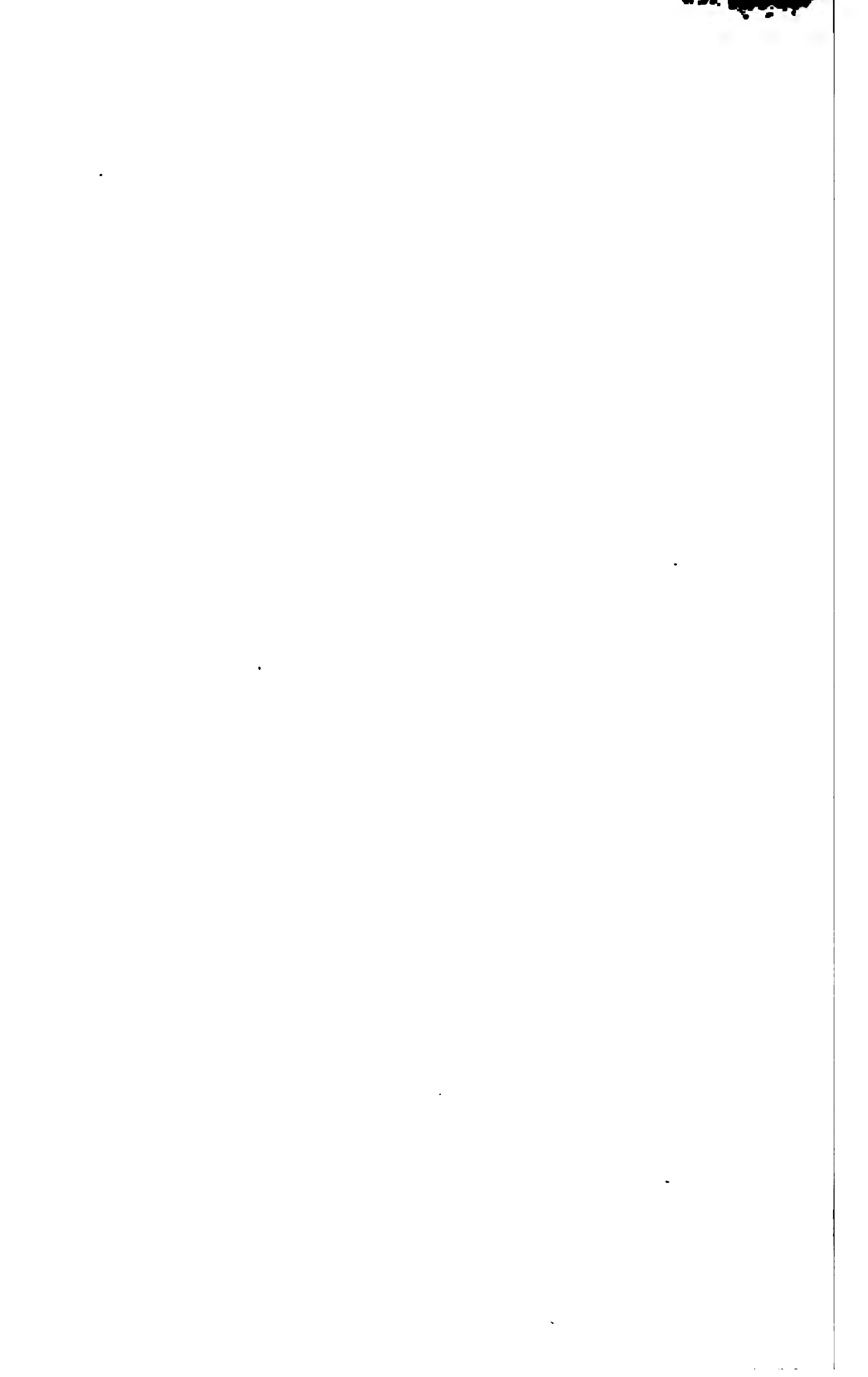
Das hier behandelte Problem enthält jenes der Beleuchtungscurven als besonderen Fall in sich, worüber demnächst eine Mittheilung in den „Monatsheften für Mathematik und Physik" erscheinen wird.

---

[1] Ameseder, l. c., S. 24.



Lith. Anstalt v. J. Barth. Fünfhaus. Wien.



Über die Entstehung organischer Cylindergebilde

von

Karl Fuchs.

(Mit 13 Textfiguren.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1890.)

I.

Die Lehre von den Lebewesen zerfällt äusserlich in zwei Theile. Die Physiologie behandelt die chemischen Stoffe und ihre Wandlungen, ohne Rücksicht auf die geometrischen Formen, unter denen sie auftreten; die Morphologie behandelt umgekehrt die Formen und ihre Wandlungen ohne Rücksicht auf die

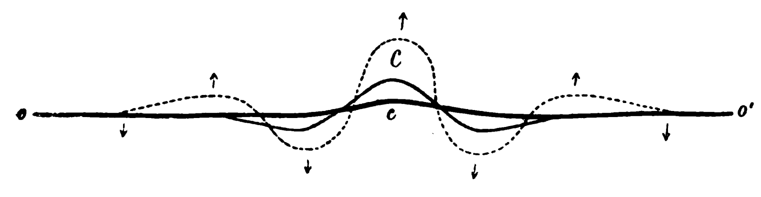


Fig. 1.

chemischen Stoffe, mit denen sie erfüllt sind. Innerlich hängen beide Lehren aufs Innigste zusammen.

Einen grossen Theil der Formen, die die Morphologie behandelt, machen die Cylindergebilde aus. Jede Hyphe, jede Ader, jeder Pflanzenschoss, jeder Mückenfuss ist ein Cylindergebilde. Wie entstehen Cylindergebilde? ist eine der grössten Fragen der theoretischen Morphologie. Die Frage fusst aber in der Physiologie, da die organischen Formen offenbar Functionen der Molecularkräfte der organischen Stoffe sind.

Viel Licht fällt auf unser Problem, wenn wir eine fictive organische Masse sehr zähflüssig sein lassen und (Fig. 1) ihrer Oberfläche oo' allseitig gleichmässige Expansionsspannung p

zuschreiben. Wo nämlich die geringste Convexität c vorhanden ist, tritt ein zur Oberfläche normaler centrifugaler Zug k auf nach der Formel

$$k = p\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right),$$

wobei r_1 und r_2 die beiden Hauptkrümmungsradien im in Rede stehenden Punkte sind. Jede Kuppe wirkt also ansaugend, und zwar umso kräftiger, je kleiner ihre Radien, je kleiner sie ist. Die zähe Masse folgt dem Zug, die Kuppe wächst, hebt sich. Aber stets ist es der Punkt der grössten Krümmung, der am stärksten saugt, also am schnellsten sich hebt. Es wird sich ein Kegel erheben, dessen Basis concav ist, wo also ein centripetaler Druck entsteht, dem die Masse nachgibt, wodurch sich eine Ringfurche bildet, welche wieder einen äusseren convexen Rand besitzt, der seinerseits einen centrifugalen Zug ausübt, der zur Entstehung eines Ringwalles führt etc. Jede Kuppe führt also zur Entstehung einer Reihe abwechselnder concentrischer Ringfurchen und Ringwälle. Solche antagonistische Krümmungen spielen aber bekanntlich in der Embryologie (man denke nur an die Entwicklung des Insecteneies) eine sehr grosse Rolle.

Kehren wir zum centralen Kegel C zurück, betrachten ihn der Einfachheit wegen als Cylinder und unterziehen der Rechnung ein Cylinderstück, das wir mit Endplatten geschlossen denken. Die Gesammtkraft, mit der der Cylindermantel sich longitudinal zu strecken strebt, ist

$$2r\pi . p,$$

wobei r der Radius des Cylinderstückes ist. Dieser Spannung widersteht eine Cylindermasse vom Querschnitt

$$r^2\pi.$$

Die Längsspannung des Mantels erzeugt also im Cylinder per Einheit des Querschnittes die Längsspannung

$$\frac{2r\pi p}{r^2\pi} \text{ oder } \frac{2p}{r}.$$

Der radicale centrifugale Zug jedoch, welchen die peripherische Mantelspannung erzeugt, ist nur

$$\frac{p}{r},$$

nachdem die Cylinderfläche nur Eine Krümmung besitzt.

Da also im Cylinder die verlängernde Kraft doppelt so stark ist, als die erweiternde Kraft, so wird der Cylinder sich unter dem Einflusse einer allseitig gleichmässigen expansiven Oberflächenspannung verlängern und gleichzeitig verdünnen. Theoretisch wird also der centrale Kegel sich in einen unendlich dünnen, unendlich langen Faden umformen, welcher mit unendlicher Kraft an seiner Basis immer neuen Stoff einsaugt, um sich immer weiter zu verlängern. Wer dächte hier nicht an die wunderbaren Fadenstrahlen der Rhizopoden?

Diese Skizze lässt manche Frage offen. Woher kann die oberflächliche expansive Spannung stammen? Wie wird sich der Cylinder verhalten, wenn er, wie es in der Natur meistens der Fall ist, innen hohl oder doch mit einer minder zähen Masse erfüllt ist? Warum bleibt der Querschnitt der Cylinder kreisförmig und wird nicht etwa elliptisch? Wann hört das Dünnerwerden auf? Solche Fragen zu behandeln ist der Gegenstand vorliegender Arbeit. Leider wird es nicht bei jedem Punkte möglich sein, schon in vorliegender Arbeit die morphologische Frage zu entwickeln, in deren Interesse die betreffende Formel abgeleitet worden ist.

II.

In den seltensten Fällen ändert ein Cylinder (oder ein anderer Theil eines Lebewesens) seine Form durch strömende Verschiebung des vorhandenen Stoffes, wie wir bisher angenommen haben. Die inneren Verschiebungen sind in der Regel elastische Deformationen, und die Formänderungen stammen in erster Linie von ungleichförmigem inneren Wachsthum. Hiebei gilt als Regel, dass das Wachsthum am schnellsten in der Richtung des stärksten Zuges, am langsamsten in der Richtung des grössten Druckes erfolgt. Anderseits ist aber offenbar das Wachsthum

auch ein umso rascheres, je reichlicher Bildungsmaterial vorhanden ist, und zwar wollen wir annehmen, dass die Masse P des in der Zeiteinheit in der Volumeinheit neu gebildeten Stoffes einfach proportional ist der Dichte ρ des dort vorhandenen Materiales, d. h. der in der Volumeinheit enthaltenen Masse desselben. Dies drücken wir aus durch

$$\frac{\partial P}{\partial t} = v\rho, \qquad \ldots 1)$$

wobei v eine Proportionalitätsconstante ist.

Wir machen nun die Annahme, dass das Bildungsmaterial von aussen durch die Oberfläche in das Innere unseres wachsenden Objectes eindiffundirt. In der Regel sind es wohl mehrere Stoffe, die, in gewissen Gewichtsverhältnissen auf einander wirkend, die Masse P produciren. In solchem Falle nehmen wir an, dass alle Stoffe in unserem Objecte in jedem Punkte reichlich vorhanden sind, bis auf Einen, der spärlich von aussen durch die Oberfläche eindiffundirt. Dann gestaltet sich die Rechnung gerade so, als wäre er das einzige Bildungsmaterial.

Wir wollen nun berechnen, wie schnell eine homogene Vollkugel in verschiedenen Entfernungen vom Centrum unter den angenommenen Wachsthumsbedingungen wachsen wird. Wir werden finden, dass eine oberflächliche expansive Spannung auftreten wird, wie wir sie für unsere Theorie der Cylinderbildung brauchen. Eine Kugel wählen wir aber statt einem Cylinder, weil wir sonst auf eine zu schwierige Differentialgleichung stossen, und doch nur ein qualitatives Resultat brauchen.

Durch eine Kugelfläche (Fig. 2) vom Radius r diffundirt in der Zeiteinheit in der Richtung des Gefälles der Dichte ρ des Bildungsmateriales N die N-Masse

$$m = 4\pi r^2 \omega \frac{\partial \rho}{\partial r},$$

wobei ω die Diffusionsconstante ist. Durch eine Kugelfläche vom etwas grösseren Radius $r+h$ diffundirt in derselben Zeit und in derselben Richtung die N-Masse

$$m' = 4\pi\omega(r+h)^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial r} + h\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2}\right),$$

oder bei Vernachlässigung höherer Glieder

$$m' = 4\pi r^2 \omega \frac{\partial \rho}{\partial r} + 4\pi r^2 \omega h \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right).$$

In der Kugelschale von der Dicke h staut sich also in der Zeiteinheit die N-Masse $m'' = m' - m$ oder

$$m'' = 4\pi r^2 \omega h \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right).$$

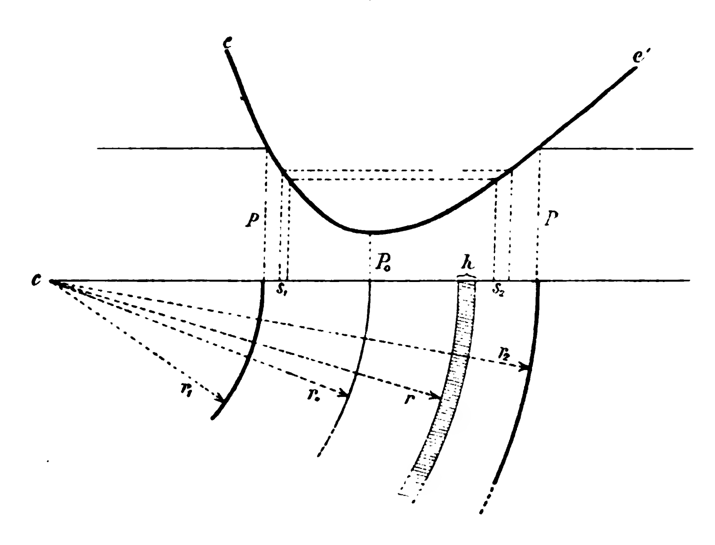


Fig. 2.

In derselben Kugelschale wird in derselben Zeit zur Neubildung die N-Masse verbraucht

$$m''' = 4\pi r^2 h v \rho,$$

wobei v eine Proportionalitätsconstante ist. Der Verbrauch ist gleich der Stauung, wenn gilt $m''' = m''$ oder

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial r_2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho}{\partial r} - \frac{v}{\omega} \rho = 0. \qquad \ldots 2)$$

Wenn wir der Einfachheit wegen setzen

$$\sqrt{\frac{v}{\omega}} = \nu, \qquad \ldots 3)$$

dann wird obiger Differentialgleichung Genüge geleistet durch

$$\rho = \frac{1}{r}(\pm Ae^{+\nu r} \pm Be^{-\nu r}). \qquad \ldots 4)$$

Wenn wir A und B positiv nehmen, dann hat die Curve ungefähr die Form wie in Fig. 2 ee'. Sie veranschaulicht uns dann beispielsweise die Vertheilung des Nährstoffes N im Fleisch einer Hohlkugel von den Radien r_1 und r_2, wenn die Dichte von N innen und aussen gleich P ist. Wir ersehen dann aus der Zeichnung Folgendes.

Die Dichte von N ist in der Nähe der Oberflächen grösser als in der Mittelregion der Hohlkugel. Das Wachsthum ist also in der Nähe der Oberflächen ein schnelleres als in der Mittelregion. Daraus folgt aber, dass in Folge des ungleichförmigen Wachsthums die Mittelregion peripherisch gezogen, die beiden Grenzregionen aber peripherisch gedrückt sein werden.

Die Lamelle der kleinsten Dichte, also des langsamsten Wachsthums (r_0) liegt näher zur concaven Oberfläche; die correspondirenden Lamellen gleichen Wachsthums (z. B. s_1 und s_2) sind also an der convexen Seite dicker als an der concaven Seite der Hohlkugel; die convexe Wachsthumsregion ist dicker als die concave.

Das Gefälle der ρ-Curve ist an der convexen Oberfläche kleiner als an der concaven Oberfläche. Durch erstere dringt also auch per Zeit- und Flächeneinheit weniger N in die Hohlkugel als durch letztere. Wenn man also den Radius der Lamelle geringsten Wachsthums unveränderlich bleiben lässt, dann wird in Folge innerer Neubildungen die convexe Oberfläche langsamer vorrücken als die concave Oberfläche.

Die Differenz zwischen kleinster und grösster Dichte (zwischen P und P_0) ist, wie man aus der Formel leicht findet, um so grösser, als je dicker die Hohlkugel ist; um so mehr ist also auch das oberflächliche Wachsthum dem minimalen Wachsthum überlegen und um so grössere Spannungen werden in der Hohlkugel entstehen.

Diese qualitativen Sätze liessen sich auch ohne Rechnung, lediglich aus dem Factum der Krümmung der Schichten, unabhängig davon ableiten, dass diese Krümmung eine doppelte ist, und sie sind daher einfach auf die Cylinderfläche als convexe Fläche anwendbar.

Der Vollständigkeit halber wollen wir dennoch die allgemeine Formel auf die Vollkugel anwenden. Die allgemeine Formel gibt $\rho = \infty$ für $r = 0$. Da dies bei der Vollkugel nicht der Fall sein kann, muss $B = -A$ sein, wodurch wir erhalten

$$\rho = \frac{A}{r}(e^{+\nu r} - e^{-\nu r}). \qquad \ldots 5)$$

Für $r = 0$ nimmt dieser Ausdruck allerdings die Form an

$$\rho = \frac{0}{0}.$$

Wir klären den Ausdruck aber, indem wir die Exponentialgrössen in Reihen auflösen und schreiben:

$$e^{+\nu r} = 1 + \nu r + \frac{1}{2}\nu^2 r^2 + \frac{1}{2.3}\nu^3 r^3 + \ldots$$

$$e^{-\nu r} = 1 - \nu r + \frac{1}{2}\nu^2 r^2 - \frac{1}{2.3}\nu^3 r^3 + \ldots$$

$$e^{+\nu r} - e^{-\nu r} = 2\nu r + \frac{1}{3}\nu^3 r^3 + \ldots$$

Dies eingesetzt finden wir (Fig. 3)

$$\rho = A\left(2\nu + \frac{1}{3}\nu^3 r^3 + \ldots\right). \qquad \ldots 6)$$

Für $r = 0$ erhalten wir dann den endlichen Minimalwerth von ρ im Centrum der Kugel

$$\rho_0 = 2\nu A \quad \text{oder} \quad A = \frac{\rho_0}{2\nu}.$$

und die Gleichung für ρ nimmt die präcisere Form an

$$\rho = \frac{\rho_0}{2\nu r}(e^{+\nu r} - e^{-\nu r}). \qquad \ldots 7)$$

Hieraus wollen wir den Zusammenhang zwischen der Minimaldichte ρ_0 und der Dichte P von N im äusseren Medium bestimmen. Für die Oberfläche der Kugel, d. h. für $r = R$ muss gelten $\rho = P$ oder

$$P = \frac{\rho_0}{2\nu R}(e^{+\nu R} - e^{-\nu R}). \qquad \ldots 8)$$

Hieraus liest man leicht, dass ρ_0, die centrale Dichte, mit wachsendem Radius bei constanter äusserer Dichte P immer kleiner, der Unterschied zwischen oberflächlichem und centralem Wachsthum also immer grösser, die auftretenden Spannungen also ebenfalls immer grösser werden.

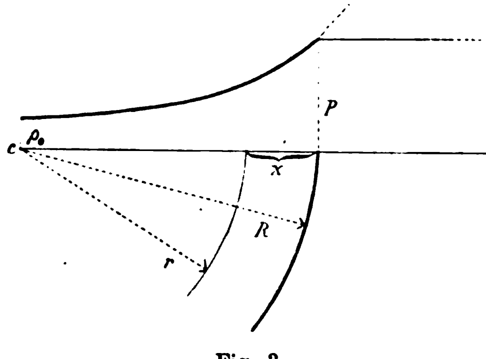


Fig. 3.

Wir wollen nun den Coordinatenursprung in die Kugeloberfläche verlegen, indem wir in Formel 7) $r = R - x$ substituiren. Wenn wir gleichzeitig ρ_0 aus Formel 8) bestimmen und einsetzen, dann erhalten wir

$$\rho = P\frac{R}{R-x} \cdot \frac{e^{-\nu x} - e^{-\nu(2R-x)}}{1 - e^{-2\nu R}}. \qquad \ldots 9)$$

Für grosse R vereinfacht sich die Formel zu

$$\rho = \frac{Pe^{-\nu x}}{\left(1 - \frac{x}{R}\right)} \qquad \ldots 10)$$

und für eine ebene Oberfläche oder $R = \infty$ zu

$$\rho = Pe^{-\nu}. \qquad \ldots 11)$$

Die vorletzte Formel zeigt, dass in einer gewissen Tiefe x_1 die Dichte ρ umso grösser ist, je kleiner R, je gekrümmter also die Oberfläche ist. Umso geringer ist also das Gefälle $\partial\rho/\partial x$ der Dichtigkeitscurve an der Oberfläche und umso weniger Nährstoff N strömt per Zeit- und Flächeneinheit in den wachsenden Körper.

Zwei wichtige Grössen wollen wir für die ebene Oberfläche berechnen.

Durch die Flächeneinheit strömt in der Zeiteinheit die N-Masse $w.\partial\rho/\partial r$. Wenn wir den Differentialquotienten aus Formel 11 bestimmen, für ν seinen Werth aus 3) einsetzen und $x = 0$ nehmen, dann finden wir als „Einströmung", d. h. als N-Masse, die per Zeit- und Flächeneinheit durch die Oberfläche eindringt, den Werth

$$S = P\sqrt{v\omega}. \qquad \ldots 12)$$

In der Tiefe ξ ist der Diffusionsstrom gleich

$$P\sqrt{v\omega}\, e^{-\nu\xi};$$

wenn dieser einen bestimmten Theil α der Einströmung, also etwa deren Hälfte ausmachen soll, dann gilt die Gleichung

$$P\sqrt{v\omega}\, e^{-\nu\xi} = \alpha P\sqrt{v\omega}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{\alpha} = e^{+\nu\xi} \text{ oder } \nu\xi = \log_n\left(\frac{1}{\alpha}\right). \qquad \ldots 13)$$

Hier bedeutet ξ offenbar die Dicke derjenigen Oberflächenschicht, innerhalb deren der Theil $1-\alpha$ (also für $\alpha = 3/4$ der vierte Theil) des eingeströmten Nährstoffes verbraucht, assimilirt wird. Für $\alpha = 0 \cdot 5$ ist die „Dicke der Wachsthumsschicht" ξ gleich

$$\xi = \sqrt{\frac{v}{\omega}} \log_n 2. \qquad \ldots 14)$$

Aus Formel 12 und 14 ersehen wir:

Die Einströmung des Nährstoffes sowohl, als die Dicke der Wachsthumsschicht gravitiren je nach

einem gewissen normalen Werth, insofern als (wie die Wurzelzeichen zeigen) selbst sehr grosse Schwankungen der Constanten v und ω nur sehr kleine Schwankungen in S und ξ verursachen. Die Dicke der Wachthumsschicht ist geraedzu unabhängig von der Reichlichkeit P, in der der Nährstoff vorhanden ist.

Wenn ein Cylindergebilde irgendwie einen elliptischen Querschnitt bekommen hat (Fig. 4), dann wird dieser nach den bisherigen Entwicklungen von selbst zur Kreisform zurückkehren, da die Einströmung an den abgeflachten Seiten eine stärkere sein wird, als an den stärker gekrümmten Kanten, das Dickenwachsthum also auch an den abgeflachten Seiten ein rascheres sein wird, als an den vorspringenden Theilen (punktirte Linie).

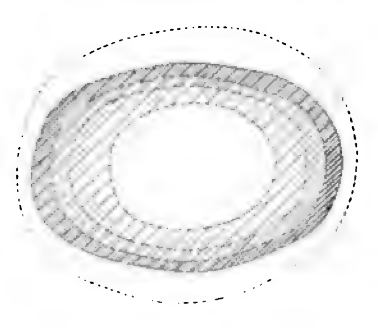


Fig. 4.

Ebenso können wir das qualitative Resultat aussprechen: Wenn der Cylinder sehr dünn ist, dann ist das Oberflächenwachsthum dem Binnenwachsthume so wenig überlegen, dass das Wachsthum im Cylinder ein nahezu gleichmässiges ist und die auftretenden Spannungen so gering sind, dass keine merklichen Streckungen mehr erfolgen.

Zur Verhütung von Missverständnissen müssen wir feststellen, was wir unter Spannung verstehen, wenn wir sagen, dass Spannung das Wachsthum hindert. Wenn wir einen Kautschukstab spannen, dann wird jedes einzelne Volumelement longitudinal verlängert, und wenn wir das Volumen des Kautschuks als unverändert annehmen, wird der Querschnitt der Volumelemente verkleinert. Die in einer Längsreihe liegenden Volumelemente trachten dann einander zu verlängern; die longitudinale Spannung nennen wir dann positiv; sie fördert die Bildung von neuen Querlamellen und macht kleine Querrisse sofort klaffen. Wenn man nun auf die Seitenflächen des Kautschukstabes, ohne seine Form zu ändern, einen grossen Druck ausübt, dann

trachtet der Stab noch länger zu werden und die in einer Längsreihe liegenden Volumelemente trachten einander zu verkürzen. Die longitudinale Spannung nennen wir dann negativ; sie hemmt die Neubildung von Querlamellen und macht kleine Höhlungen sich sofort schliessen. Aus der Deformation eines Volumelementes kann man also durchaus nicht auf seine Spannung schliessen; in unserem Beispiele hatte dasselbe Volumelement bei ganz derselben Deformation einmal positive, einmal negative Längsspannung.

Die bisher behandelten Wachsthumsverhältnisse entsprechen am besten den Verhältnissen, die wir bei niederen Thieren und Pflanzen vorfinden. Bei höheren Pflanzen erfolgt das Wachsthum

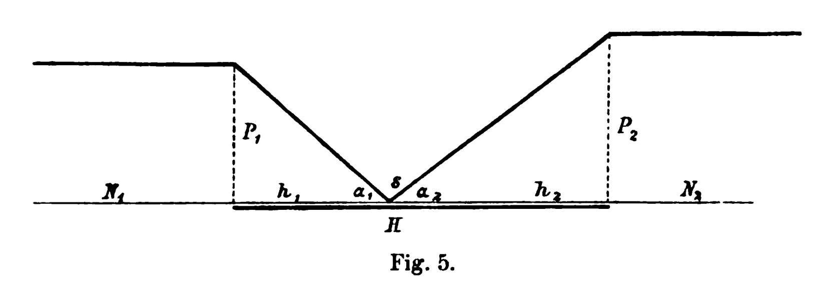


Fig. 5.

vorzugsweise in einer dünnen Schicht, die in einer gewissen Tiefe unter der Oberfläche liegt, und die in der auffallendsten Gestalt als Cambium der Dicotyledonen auftritt. Solches Lamellenwachsthum entspricht auch am besten den Voraussetzungen, unter denen wir im folgenden Abschnitt die Spannungen in Hohlcylindern rechnen werden. Wir wollen daher das Lamellenwachsthum für die einfachsten Verhältnisse berechnen. Wenn wir die Annahme noch besser der Wirklichkeit anpassen, ändert sich dennoch quantitativ und qualitativ nur äusserst wenig.

Wir betrachten eine unendliche ebene Platte S aus der Substanz M und von der Dicke H (Fig. 5). Links von S befindet sich der Stoff N_1 in der constanten Dichte P_1, rechts aber der Stoff N_2 in der constanten Dichte P_2. Beide Stoffe dringen diffundirend in S ein und begegnen einander in einer ebenen Fläche s. Dort bildet sich aus beiden Stoffen durch chemische Reaction das Material M der Platte S, und zwar werden die Stoffe N_1 und N_2 stets im Gewichtsverhältniss $n_1 : n_2$ verbraucht. Wenn n_1 und n_2 die

Massen von N_1 und N_2 sind, die die Masseneinheit von M liefern, dann ist $n_1+n_2=1$. Diese Umwandlung soll so rasch erfolgen, dass in der Ebene s die Dichte ρ_1 und ρ_2 von N_1 und N_1 gleich Null gesetzt werden kann und auch die Dicke von s gleich Null ist. Es gilt nun die Lage der Fläche s in S zu bestimmen.

Die Curven der Dichten ρ_1 und ρ_2 der eindiffundirenden Stoffe N_1 und N_2 sind offenbar Gerade, und wenn h_1 und h_2 die Entfernungen von s von den beiden Oberflächen sind, dann gilt

$$h_1 \operatorname{tang} \alpha_1 = P_1 \qquad h_2 \operatorname{tang} \alpha_2 = P_2.$$

Wenn ω_1 und ω_2 die Diffusionsconstanten von N_1 und N_2 sind, dann erhält s per Zeit- und Flächeneinheit von N_1 die Masse $m_1=\omega_1 \operatorname{tang} \alpha_1$ und von N_2 die Masse $m_2=\omega_2 \operatorname{tang} \alpha_2$. Diese Massen sollen sich wie $n_1:n_2$ verhalten. Wir haben also

$$n_1:n_2 = \omega_1 \operatorname{tang} \alpha_1 : \omega_2 \operatorname{tang} \alpha_2 .$$

Durch Elimination von α_1 und α_2 erhalten wir leicht

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\left(\frac{\omega_1 P_1}{n_1}\right)}{\left(\frac{\omega_2 P_2}{n_2}\right)} = \frac{a}{b},$$

wobei a und b die Symbole für die entsprechenden Brüche sind. Wenn wir bedenken, dass $h_1+h_2=H$ ist, so finden wir leicht

$$h_1 = H\frac{a}{a+b} \qquad h_2 = H\frac{a}{a+b}.$$

Für die Masse $m=m_1+m_2$, die von M per Zeit- und Flächeninhalt erzeugt wird, finden wir leicht

$$\begin{aligned} m &= \omega_1 \operatorname{tang} \alpha_1 + \omega_2 \operatorname{tang} \alpha_2 \\ &= \omega_1 \frac{P_1}{h_1} + \omega_2 \frac{P_2}{h_2} \\ &= \frac{(a+b)\,\omega_1 P_1}{Ha} + \frac{(a+b)\omega_2 P_2}{Hb} \\ &= \frac{a+b}{H}(n_1+n_2) \end{aligned}$$

$$= \frac{a+b}{H}.$$

Wir ersehen hieraus: Die Wachsthumslamelle kann nie in einer Oberfläche liegen. Sie liegt derjenigen Oberfläche näher, deren entsprechender Nährstoff langsamer diffundirt, weniger reichlich vorhanden ist und in grösserer Menge verbraucht wird. Bei einem Pflanzentrieb haben wir allerdings nur eine Oberfläche, durch die der eine Nährstoff N_1 (etwa Oxygen) eindringt, und auf der inneren Seite ist keine Schicht mit einer constanten Dichte P_2, vielmehr wird in der Regel N_2 durch zerstreute Gefässe zugeleitet; dennoch erkennen wir aus der Sachlage das Gesetz:

Die Wachsthumslamelle liegt um so tiefer, je schneller der äussere Nährstoff einzudringen vermag, je reichlicher er aussen vorhanden ist und je weniger vom ihm gebraucht wird.

III.

Wir haben im vorhergehenden Abschnitte gesehen, dass die Oberflächenregion eines Cylindergebildes rascher wächst als die tiefer gelegenen Theile, wenn zum Wachsthum das Eindringen eines Stoffes von aussen erforderlich ist. Da die Cylindergebilde in der Regel hohl oder doch in der Axe weicher sind, so wollen wir nun die Deformationen und Spannungen berechnen, welche durch Oberflächenwachsthum in den verschiedenen Schichten eines Hohlcylinders erzeugt werden.

1. Denken wir uns einen nach den Coordinatenaxen orientirten Würfel aus der Substanz des Cylindergebildes von der Kantenlänge gleich Eins. In den Richtungen der drei Hauptaxen wirken auf die Würfelflächen in positiver (ausdehnender) Richtung die drei Kräfte p_1, p_2, p_3. Die Dimensionen des Würfels ändern sich dann um die Incremente ξ, η, ζ. Wenn wir das Volumen des Würfels unveränderlich sein lassen, dann gilt die Volumgleichung

$$1.1.1 = (1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta),$$

oder bei Vernachlässigung höherer Glieder

$$\xi+\eta+\zeta = 0. \qquad \ldots 15)$$

Wenigstens Ein Increment muss also negativ sein.

Jedes Increment soll nun im Würfel eine ihm, dem Increment proportionale elastische Gegenkraft erzeugen, als wären in dem Würfel parallel den Axen elastische Stäbe gelegt (Fig. 6). Wenn q die betreffende Proportionalitätsconstante ist, dann sind also die erregten elastischen Gegenkräfte gleich $-q\xi$, $-q\eta$ und $-q\zeta$, und die äusseren Kräfte werden dadurch reducirt auf $p_1-q\xi$, $p_2-q\eta$ und $p_3-q\zeta$. Nun wollen wir den plastischen Würfel so betrachten, als wenn er ein mit Wasser gefüllter würfelförmiger Schlauch wäre, in welchen die obigen axialen elastischen Stäbe eingesetzt sind. Dann können wir das Hauptgesetz der Hydro-

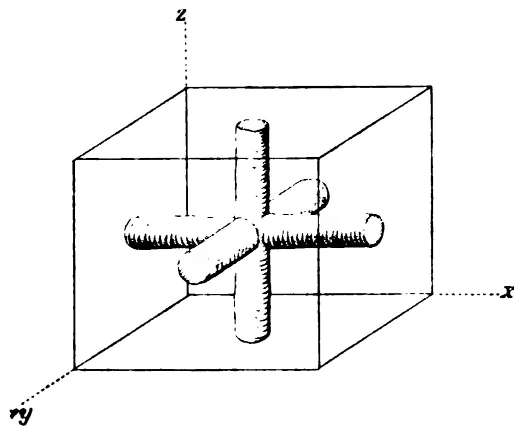


Fig. 6.

statik anwenden und sagen, dass die drei durch die elastischen Stäbe reducirten äusseren Kräfte gleich sein müssen, d. h. dass gelten muss

$$p_1-q\xi=p_2-q\eta=p_3-q\zeta. \qquad \ldots 16)$$

Aus dieser Grundbedingung folgen einige interessante Sätze, z. B.:

$$q=\frac{p_1-p_2}{\xi-\eta}=\frac{p_2-p_3}{\eta-\zeta}=\frac{p_3-p_1}{\zeta-\xi}, \qquad \ldots 17)$$

oder eine andere Gleichung

$$p_1=\left(\frac{p_2+p_3}{2}\right)-3q\left(\frac{\eta+\zeta}{2}\right). \qquad \ldots 18)$$

Die wichtigste Folgegleichung finden wir aber folgendermassen: Wir schreiben

$$
\begin{array}{l}
p_1 - q\xi = p_1 - q\xi \\
p_1 - q\xi = p_2 - q\eta \\
p_1 - q\xi = p_3 - q\zeta \\
\hline
3p_1 - 3q\xi = (p_1 + p_2 + p_3) - q(\xi + \eta + \zeta).
\end{array}
$$

Wenn wir nun für die Summe der drei Kräfte $p_1 + p_2 + p_3 = s$ setzen und beachten, dass $\xi + \eta + \zeta = 0$ ist, dann finden wir aus der letzten Formel (wir setzen die analogen Formeln sofort dazu)

$$
\left.
\begin{array}{ll}
p_1 = q\xi + \frac{s}{3} & a \\
p_2 = q\eta + \frac{s}{3} & b \\
p_3 = \zeta q + \frac{s}{3}. & c
\end{array}
\right\} \ldots 19)
$$

Dies sind unsere Fundamentalformeln für die künftigen Entwicklungen.

Wenn wir dem fictiven, nach der x-Axe gelegten elastischen Stab das Increment $+\xi$ geben, dann müssen wir die Arbeit leisten

$$
\int_{\xi=0}^{\xi=\xi} q\xi\partial\xi = \frac{1}{2} q\xi^2.
$$

Durch analoge Integrationen finden wir für die Arbeit, welche wir bei der Deformation des Würfels durch Überwindung der elastischen Kräfte leisten, den Werth

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{1}{2} q\xi^2 + \frac{1}{2} q\eta^2 + \frac{1}{2} q\zeta^2 \\
&= \frac{1}{2} q(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2). \qquad \ldots 20)
\end{aligned}
$$

Hier können wir jedes einzelne Increment nach der Formel $\xi + \eta + \zeta = 0$ durch die negative Summe der beiden anderen Incremente ersetzen und finden dann die drei analogen Formeln

$$
\left.
\begin{array}{ll}
\varepsilon = q(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2) & a \\
 = q(\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2) & b \\
 = q(\zeta^2 + \zeta\xi + \xi^2). & c
\end{array}
\right\} \ldots 21)
$$

Um eine einfache Anwendung dieser Formeln zu zeigen, wollen wir aus der ersten Formel bestimmen, welchen Werth η und ζ haben müssen, wenn bei einem bestimmten Werthe ξ_1 die Arbeit ε ein Minimum werden soll. Durch Differentiation finden wir

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta} = \xi_1 + 2\eta = 0 \quad \text{oder} \quad \eta = -\frac{1}{2}\xi_1.$$

Aus $\xi_1 + \eta + \zeta = 0$ resultirt dann auch



$$\zeta = -\frac{1}{2}\xi_1. \qquad \ldots 22)$$

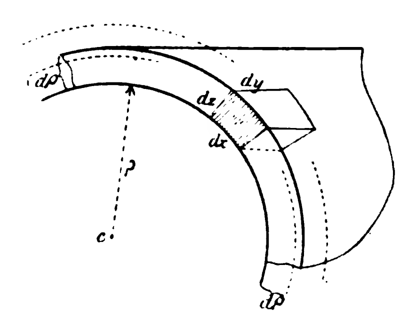


Fig. 7.

Wir geben also einem Würfel mit der kleinsten Arbeit ein Increment ξ_1, wenn wir seinen Querschnitt quadratisch bleiben lassen.

2. Wir wollen nun die Arbeit berechnen, welche wir zu leisten haben, wenn wir eine Cylinderschale vom Radius ρ, von der Dicke $d\rho$ und der Länge H um $\partial\rho$ erweitern und um ∂H verlängern wollen.

Wir nehmen (Fig. 7) ein parallelepipedisches Volumelement der Schale $\partial v = \partial x\, \partial y\, \partial z$ (∂x peripherisch, ∂y longitudinal, $\partial z = \partial\rho$ radial). Die Längeneinheit der Cylinderschale wird offenbar um $\partial H/H$ verlängert. Die Längeneinheit des Schalenumfanges wird um $\partial\rho/\rho$ verlängert, weil der Umfang $2\rho\pi$ um $2(\rho+\partial\rho)\pi - 2\rho\pi = 2\pi\partial\rho$ verlängert wird, also auf die Längeneinheit die Verlängerung $\partial\rho/\rho$ entfällt. Wenn unser Volumelement also eine würfelförmige Volumeinheit wäre, dann wäre für dieselbe

$$\xi = \frac{\partial \rho}{\rho} \qquad \eta = \frac{\partial H}{H}, \qquad \ldots 23)$$

und ihre Deformationsarbeit wäre

$$\varepsilon = q(\xi^2 + \xi\eta + \eta^2)$$
$$= q\left(\frac{\partial \rho^2}{\rho^2} + \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot \frac{\partial H}{H} - \frac{\partial H^2}{H}\right). \qquad \ldots 24)$$

Für unser Volumelement ist sie allerdings nur gleich $\varepsilon \partial x \partial y \partial z$. Wenn wir diese Elementararbeit über die ganze Cylinderschale

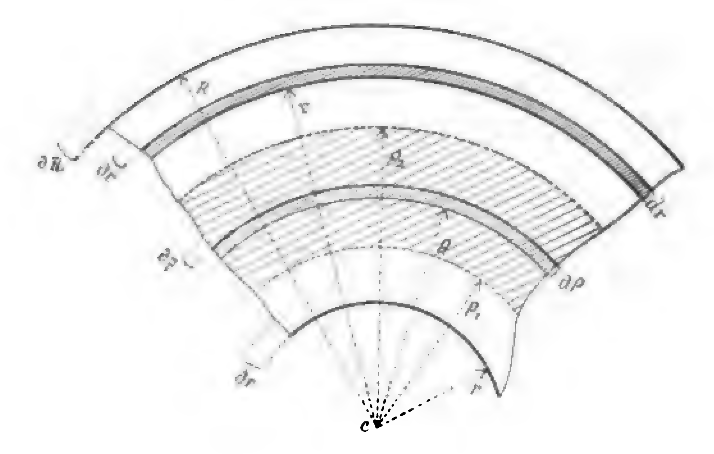


Fig. 8.

integriren, deren Volumen ist $2\rho\pi H d\rho$, dann finden wir als Deformationsarbeit der Cylinderschale von der Dicke $d\rho$

$$\left.\begin{aligned} E_\rho d\rho &= 2\pi q H \rho d\rho \left(\frac{\partial \rho^2}{\rho^2} + \frac{\partial \rho}{\rho} \cdot \frac{\partial H}{H} + \frac{\partial H^2}{H}\right) & a \\ &= 2\pi q H \rho d\rho \left(\left[\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}\right]^2 + \frac{3}{4}\,\frac{\partial H^2}{H^2}\right). & b \end{aligned}\right\} \ldots 25)$$

3. Betrachten wir nun einen Hohlcylinder (Fig. 8) von der Länge H, dem Innenradius r und dem Aussenradius R. Dieser werde irgendwie um ∂H verlängert und um ∂R, respective ∂r erweitert, bei constanten Volumen. Zwischen zwei beliebigen Cylinderschalen von den Radien ρ und $\mathfrak{r}$ muss also das Volumen $\pi(\mathfrak{r}^2 - \rho^2) H$ ebenfalls constant bleiben, d. h. es muss gelten

$$\pi(\mathfrak{r}^2-\rho^2)H = \pi([\mathfrak{r}+\partial\mathfrak{r}]^2-[\rho+\partial\rho]^2)(H+\partial H).$$

Bei Vernachlässigung höherer Glieder finden wir hieraus leicht die Form

$$\rho^2\left(\frac{\partial\rho}{\rho}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}\right)=\mathfrak{r}^2\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}\right). \qquad \ldots 26)$$

Hier steht links nur ρ, rechts nur $\mathfrak{r}$. Wir haben also einen Ausdruck gefunden, der für alle Radien denselben Werth hat und den wir mit

$$\mathfrak{R}$$

bezeichnen wollen.

Unsere Formel erlaubt es uns beispielsweise, die Deformationen 23)

$$\xi=\frac{\partial\rho}{\rho} \qquad \eta=\frac{\partial H}{H} \qquad \zeta=-\left(\frac{\partial\rho}{\rho}+\frac{\partial H}{H}\right), \qquad \ldots 27)$$

welche sich auf eine Cylinderschale vom Radius ρ beziehen, auf eine allgemeinere Form zu bringen. Wenn wir nämlich links in 26) $\xi=\partial\rho/\rho$ isoliren, finden wir sofort

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}+\frac{\mathfrak{R}}{\rho^2} && a\\
\zeta &= -\frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}-\frac{\mathfrak{R}}{\rho^2} && b\\
\eta &= +\frac{\partial H}{H} && c
\end{aligned}\right\} \ldots 28)$$

$$\xi+\zeta+\eta=0.$$

4. Wir fahren fort. Nachdem unser Hohlcylinder von den Radien r und R deformirt ist, wollen wir den Radius $\mathfrak{r}$ noch um ein Stück vergrössern, also $\partial\mathfrak{r}$ noch etwas wachsen lassen. Dann wird die ρ-Schale folgen müssen. Da sie aber bereits erweitert ist, wird sie einer ferneren Erweiterung widerstehen, was sich durch einen radialen Zug äussern wird, den die $\mathfrak{r}$-Schale an ihrer Innenfläche durch das zwischen den beiden Schalen befindliche Material erleiden wird. Diesen centripetalen Zug, den die

$\mathfrak{r}$-Schale durch die ρ-Schale erleidet, wollen wir berechnen. Die Deformationsarbeit der ρ-Schale ist, wenn wir 26) in 25 *b*) einführen

$$E = 2\pi q H \rho d\rho \left(\frac{\mathfrak{r}^4}{\rho^4}\left[\frac{\partial \mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right]^2 + \frac{3}{4}\frac{\partial H^2}{H^2}\right). \quad \ldots 29)$$

Diese Arbeit wird grösser, wenn wir $\partial\mathfrak{r}$ um $\partial^2\mathfrak{r}$ wachsen lassen, und diesen Zuwachs muss die $\mathfrak{r}$-Schale leisten, wenn sie um $\partial^2\mathfrak{r}$ hinausrücken will. Sie hat also eine centripetale Kraft zu überwinden, die wir finden, indem wir E nach $\partial\mathfrak{r}$ differenziren, da die Kraft der Differentialquotient der Arbeit nach dem Wege ist. Wir finden

$$\frac{\partial E}{\partial(\partial\mathfrak{r})} = 2\pi q H d\rho \frac{\mathfrak{r}^3}{\rho^3}\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right).$$

Diese centripetale Kraft vertheilt sich aber über die ganze $\mathfrak{r}$-Schale, deren Mantelfläche ist $2\pi\mathfrak{r}H$. Auf die Flächeneinheit fällt also die Kraft

$$2 q d\rho \frac{\mathfrak{r}^2}{\rho^3}\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right). \quad \ldots 30)$$

Alle (schraffirten) Schichten zwischen den Radien ρ_1 und ρ_2 zusammengenommen, erzeugen also in irgend einer Schicht vom Radius $\mathfrak{r}$ den Radialzug (den wir durch Integration nach ρ von ρ_1 bis ρ_2 finden)

$$\left.\begin{aligned} z &= q\mathfrak{r}^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right)\left(\frac{\partial\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right) & a \\ &= q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2}\right). & b \end{aligned}\right\} \ldots 31)$$

Dieser Werth ist unabhängig von der Natur und dem Zustand der zwischen $\mathfrak{r}$ und ρ_2 liegenden Substanz.

5. Wir nehmen nun an (Fig. 9), dass in der äusseren Mantelfläche M unseres Hohlcylinders eine expansive Querspannung A besteht, welche den Radius R um ∂R vergrössert, während eine expansive Längsspannung B die Länge H um ∂H vergrössert. Wir wollen nun berechnen, welche Spannungen

x, y und z in peripherischer, longitudinaler und radialer Richtung in jeder Entfernung ρ von der Axe herrschen.

Für die Spannungen in den Hauptrichtungen in einem Volumelement, dessen Deformationen per Längeneinheit ξ, η und ζ sind, haben wir die allgemeinen Ausdrücke 19), wo für x, y und z die minder einfachen Zeichen $p_1\ p_2\ p_3$ stehen. Wenn wir dort für ξ,

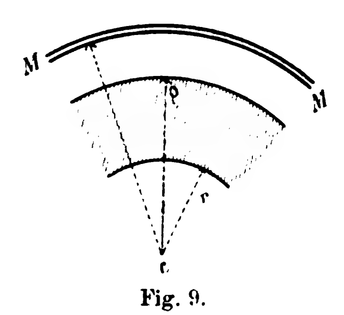


Fig. 9.

η, ζ die für einen Radius ρ geltenden Werthe 28) einführen, dann erhalten wir die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} x &= +q\left(\frac{1}{\rho^2}\mathfrak{R} - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right) + \frac{s}{3} & a \\ z &= -q\left(\frac{1}{\rho^2}\mathfrak{R} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right) + \frac{s}{3} & b \\ y &= q\frac{\partial H}{H} + \frac{s}{3}\,. & c \end{aligned}\right\} \ldots 32)$$

Hierin ist

$$\mathfrak{R} = R^2\left(\frac{\partial R}{R} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right).$$

Unbekannt ist uns aber s. Nun haben wir aber für z oben schon einen Werth gefunden; der centripetale Zug, den die innerhalb ρ liegenden (schraffirten) Schichten in der ρ-Schale erzeugen, ist 31 b)

$$z = q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2}\right),$$

wobei wir $\rho_1 = r$ und $\rho_2 = \rho$ gesetzt haben. Aus den zwei Werthen für z finden wir

$$\frac{s}{3} = q\left(\frac{1}{r^2}\,\mathfrak{R} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H}\right).$$

Den Werth in 32) eingeführt erhalten wir nun die bestimmten Werthe

$$\left.\begin{aligned} x &= q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) && a \\ z &= q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) && b \\ y &= q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{r^2} + 0\right) + \frac{3}{2}\,q\,\frac{\partial H}{H}. && c \end{aligned}\right\}\ldots 33)$$

Wenn wir der Einfachheit wegen setzen

$$\frac{\partial R}{R} = \nu \qquad \frac{1}{2}\,\frac{\partial H}{H} = \lambda \qquad \mathfrak{R} = R^2(\nu+\lambda), \qquad \ldots 34)$$

dann lauten die Gleichungen für die Spannungen vollständiger

$$\left.\begin{aligned} x &= qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) && a \\ z &= qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) && b \\ y &= qR^2(\nu+\lambda)\,\frac{1}{r^2} + 3q\lambda = \text{const.} && c \end{aligned}\right\}\ldots 35)$$

Nun können wir leicht A und B berechnen. Für den Aussenmantel finden wir den centripetalen Zug ($\rho = R$ in 35 b gesetzt)

$$z = qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right).$$

Diesem gleich und entgegengesetzt ist der centrifugale Zug A/R, den die peripherische Oberflächenspannung hervorruft. Aus diesen beiden Werthen resultirt

$$A = qR^3(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right). \qquad \ldots 36)$$

Die Gesammtkraft, mit der sich der Hohlcylinder longitudinal zusammenzuziehen trachtet, ist $y\pi(R^2 - r^2)$. Dieser entgegen wirkt die Gesammtkraft $2R\pi B$, mit der sich der Mantel zu ver-

längern strebt. Aus diesen beiden Werthen resultirt für B nach einigen Umstellungen

$$B = \frac{1}{2} qR^3 \left(\nu + \lambda + \frac{3r^2}{R}\lambda\right)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right). \qquad \ldots 37)$$

Der Vollständigkeit wegen setzen wir auch die Deformationen für verschiedene Radien nach 28) nochmals an

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\lambda + \frac{R^2}{\rho^2}(\nu+\lambda) && a \\ \zeta &= -\lambda - \frac{R^2}{\rho^2}(\nu+\lambda) && b \\ \eta &= +2\lambda. && c \end{aligned}\right\} \ldots 38)$$

6. Wenn die Spannungen und Deformationen dadurch veranlasst werden, dass die Oberflächenschicht schneller wächst als die tieferen Schichten, dann passen wir unsere Formeln am besten dadurch diesen Verhältnissen an, dass wir $A = B = p$ setzen. Durch Gleichsetzung der Werthe von A und B finden wir die Relation

$$\nu = -\lambda\left(1 - \frac{3r^2}{R^2}\right), \qquad \ldots 39)$$

und diese Relation, verbunden mit dem Werth von $A = p$ liefert die Werthe

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= +\frac{2}{3}\left(\frac{R}{R^2 - r^2}\right)p && a \\ \nu &= -\frac{2}{3}\,\frac{1}{R}\left(\frac{R^2 - 3r^2}{R^2 - r^2}\right)p. && b \end{aligned}\right\} \ldots 40)$$

Verlängert wird dann also der Hohlcylinder unter dem Einflusse der Oberflächenspannung p unbedingt, da λ unbedingt positiv ist. Ob der Cylinder aber erweitert oder verengt wird, das hängt vom Verhältniss der Radien R und r ab. Der Zähler im Ausdrucke für ν verschwindet nämlich für

$$R = r\sqrt{3} \quad \text{oder} \quad R = 1\cdot 732\ldots r \quad \text{oder} \quad r = \frac{R}{1\cdot 732\ldots}.$$

Ist der Innenradius kleiner als $R:1 \cdot 73\ldots$, dann wird der Durchmesser $2R$ des Hohlcylinders kleiner (ν negativ), trotz der peripherischen Spannung.

Die relative Grösse von Längen- und Dickenwachsthum beurtheilen wir am leichtesten, wenn wir die erste Bedingungsgleichung 39) so schreiben

$$\frac{\partial R}{R} = -\frac{1}{2}\left(\frac{R^2 - 3r^2}{R^2}\right)\frac{\partial H}{H}. \qquad \ldots 42)$$

Für einen soliden Cylinder, d. h. für $r = 0$ wird hieraus

$$\frac{\partial R}{R} = -\frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}, \qquad \ldots 43)$$

d. h. die Dicke nimmt ab, während die Länge zunimmt, und zwar ist die Dickenabnahme die Hälfte der Längenzunahme (beide auf die Längeneinheit bezogen). Für $r\sqrt{3} = R$ ist $\partial R = 0$, und für grösseres r wächst R fortwährend in positivem Sinne. Der Maximalwerth von ∂R ergibt sich also aus $r = R$; dann ist

$$\frac{\partial R}{R} = +\frac{\partial H}{H},$$

d. h. der Cylinder wächst in der Dicke genau so schnell wie in die Länge. Da aber dieser Fall praktisch keinen Sinn hat, da ja dann der Cylinder verschwunden ist, so können wir sagen: Wenn die Oberfläche allseitig mit gleicher Kraft p wächst, dann streckt sich der Hohlcylinder unbedingt mehr in die Länge als in die Dicke.

Für die Schichtenerweiterung $\partial \rho$ finden wir, in die allgemeine Formel 38 a) unseren Specialwerth von ν (39) einsetzend,

$$\xi = \frac{\partial \rho}{\rho} = -\left(\frac{\rho^2 - 3r^2}{\rho^2}\right)\lambda.$$

Für die Schichtenerweiterung ist also nur der Innenradius, nicht aber der Aussenradius massgebend. Der Radius $\rho_0 = r\sqrt{3}$ bildet eine indifferente Schwelle ohne Erweiterung; alle innerhalb dieser Schwelle gelegenen Schichten erweitern sich unbedingt, während alle jenseits derselben liegenden Schichten sich unbedingt verengen. Das Lumen des Hohl-

7. Endlich wollen wir noch die Formeln 39), 40), 44), 45) für den Fall schreiben, dass der Cylinder massiv ist, also $r = 0$ ist. Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = -\nu = \frac{2}{3}\frac{p}{R} = \frac{\partial\rho}{\rho} && a \\ &x = z = \frac{1}{2}y = 3q\lambda && b \\ &\xi = \zeta = -\frac{1}{2}\eta = -\lambda. && c \end{aligned}\right\} \ldots 46)$$

Die Querspannungen x und y sind also gleich, und zwar gleich der halben Längsspannung; die Querdeformationen sind ebenfalls gleich, und zwar entgegengesetzt gleich der halben Längsdeformation. Der Cylinder wird länger und dünner, und zwar proportional der Oberflächenspannung p, umgekehrt proportional dem Durchmesser des Cylinders.

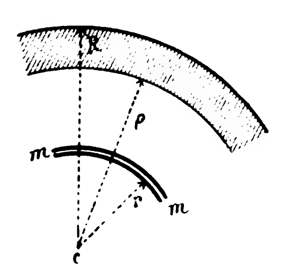


Fig. 11.

8. Nicht selten wird ein Hohlcylinder an seiner Innenfläche von longitudinalen und peripherischen Kräften afficirt (Fig. 11). Das Mark in jungen Pflanzentrieben wirkt regelmässig derart auf den Holzkörper. Unsere allgemeinen Formeln gestatten es uns, die Deformationen und Spannungen im Hohlcylinder zu berechnen, wenn der Innenmantel derart um ∂H verlängert und um ∂r erweitert worden ist. Nach 31) ist die centripetale Kraft, also der Druck, den die ausserhalb der Schale vom Radius ρ liegenden (schraffirten) Schichten auf die ρ-Schale ausüben, gegeben durch

$$z = -q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right),$$

wobei wir $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = R$ gesetzt haben. Als Druck ist die Kraft negativ. Für z gilt aber auch die allgemeine Gleichung 32 b), und aus beiden finden wir

$$\frac{s}{3} = q\left(\frac{1}{R^2}\mathfrak{R} - \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right).$$

Dies in den allgemeinen Formeln 32) eingesetzt, finden wir die Spannungen

$$x = q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R^2}\right)$$

$$z = -q\mathfrak{R}\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right)$$

$$y = q\mathfrak{R}\frac{1}{R^2} + \frac{3}{2}q\frac{\partial H}{H} = \text{Const.}$$

Wenn wir $\mathfrak{R}$ auf den Innenmantel beziehen, also schreiben

$$\mathfrak{R} = r^2\left(\frac{\partial r}{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial H}{H}\right) = r^2(\iota+\lambda),$$

wobei $\iota = \partial r/r$ ist, dann können wir die Spannungen auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} x &= +qr^2(\iota+\lambda)\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R^2}\right) && a \\ z &= -qr^2(\iota+\lambda)\left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{R^2}\right) && b \\ y &= +qr^2(\iota+\lambda)\frac{1}{R^2} + 3q\lambda = \text{const.} && c \end{aligned}\right\} \ldots 47)$$

Die longitudinale und peripherische Spannung b und a im deformirenden Innenmantel können wir genau so berechnen, wie die analogen Spannungen A und B im deformirenden Aussenmantel. Wir finden leicht

$$\left.\begin{aligned} a &= qr^2(\iota+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right) && a \\ b &= \frac{1}{2}qr^3\left(\iota+\lambda+\frac{3R^2}{r^2}\lambda\right)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)\cdot && b \end{aligned}\right\} \ldots 48)$$

9. Aus den Werthen von A und B, sowie für a und b finden wir leicht die interessanten Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} 2B - A &= 3q\frac{\lambda}{R}(R^2 - r^2) && a \\ 2a - b &= 3q\frac{\lambda}{r}(R^2 - r^2). && b \end{aligned}\right\} \ldots 49)$$

Sie erlauben uns, aus den äusseren oder inneren Mantelspannungen die Streckung λ sofort zu berechnen. Wenn wir das gethan haben, dann können wir leicht aus den Mantelspannungen auch die Spannungen x, y, z direct berechnen. Wir können nämlich eine peripherische Kraft immer durch eine radiale ersetzen, wie die Spannung A durch einen centrifugalen Zug $Z_2 = A/R$ ersetzt werden kann. Oft tritt geradezu eine radiale Kraft auf, wie beispielsweise das Mark oft auf den Innenmantel einen radialen Druck ausübt. Der centrifugale Zug Z_2, den der Aussenmantel dem Zuge des Hohlcylinders entgegensetzen muss, ist nach 35 *b*), wenn wir $\rho = R$ nehmen,

$$Z_2 = qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right).$$

Diese Formel erlaubt uns, aus allen drei Gleichungen 35) die Factoren $qR^2(\nu+\lambda)$ zu eliminiren. Wir finden (wenn $3q\lambda$ aus 49*a* bestimmt wird)

$$\left.\begin{aligned} x &= Z_2 \frac{\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)}{\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right)} = Z_2 \frac{R^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2 + r^2}{R^2 - r^2} & a \\ z &= Z_2 \frac{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)}{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)} = Z_2 \frac{R^2}{\rho^2} \cdot \frac{\rho^2 - r^2}{R^2 - r^2} & b \\ y &= Z_2 \frac{\frac{1}{r^2}}{\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2}\right)} + 3q\lambda = \frac{2RB}{R^2 - r^2}. & c \end{aligned}\right\} \ldots 50)$$

Analog können wir die Spannungen in einem von innen deformirten Hohlcylinder durch die Aussenkräfte *a* und *b* ausdrücken, indem wir den centrifugalen Druck $Z_1 = a/r$ einführen. Nach 47 *b*) muss der centrifugale Druck an der Innenfläche sein

$$Z_1 = qr^2(\iota+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{R^2}\right).$$

Diese Formel erlaubt uns abermals, aus 47) die Factoren $qr^2(\iota+\lambda)$ zu eliminiren, wodurch wir erhalten (wenn $3q\lambda$ aus 49 b) bestimmt wird)

$$\left.\begin{aligned}
x &= Z_1 \frac{\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{R^2}\right)}{\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)} = Z_1 \frac{r^2}{\rho^2}\cdot\frac{R^2+\rho^2}{R^2-r^2} && a\\
z &= -Z_1 \frac{\left(\frac{1}{\rho^2}-\frac{1}{R^2}\right)}{\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)} = -Z_1 \frac{r^2}{\rho^2}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R^2-r^2} && b\\
y &= Z_1 \frac{\frac{1}{R^2}}{\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{R^2}\right)} + 3q\lambda = \frac{2rb}{R^2-r^2}, && c
\end{aligned}\right\}\ldots 51)$$

wobei λ durch a und b bereits bestimmt ist. Die Querkräfte x und z sind also sowohl beim von innen, als auch beim von aussen deformirten Hohlcylinder den radialen Aussenkräften direct proportional, die Längsspannung aber der longitudinalen Mantelspannung. Keine Spannung kann durch ρ das Zeichen wechseln.

Es hat keine Schwierigkeiten, vorderhand aber auch keinen Zweck, die Deformationen ξ, η, ζ durch die Aussenkräfte A und B, respective a und b auszudrücken, da wir λ aus 49) und $(\nu+\lambda)$ aus 36), respective 48 a) nehmen können.

10. Interessant sind folgende Sätze. Der Hohlcylinder sei durch Kräfte des Aussenmantels um ν und λ deformirt. Ohne nun diese Incremente ν und λ zu ändern, lassen wir nun auf den Innenmantel einen centrifugalen Druck $+p$ per Flächeneinheit wirken, welcher offenbar den Aussenmantel etwas entlastet. Die Einführung dieses Druckes kommt offenbar auf dasselbe heraus, als hätten wir von der Innenwand eine Cylinderschale von der (nicht näher bestimmten) Dicke r_2-r entfernt. Dann finden wir aber die neuen Werthe der Spannungen, wenn wir in 35) überall r durch $r_2>r$ ersetzen. Wir ersehen auf einen Blick, dass hiedurch alle drei Spannungen um denselben Betrag

$$qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r_2^2}\right)$$

vermindert werden. Wenn wir auf den Innenmantel einen centripetalen Zug $-p$ per Flächeneinheit wirken lassen, dann ist die Wirkung dieselbe, als hätten wir umgekehrt an der Innenwand noch eine Schicht von der Dicke $r-r_1$ hinzugefügt, und wir sehen abermals auf einen Blick, dass hiedurch sämmtliche Spannungen um den Betrag

$$qR^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r_1^2}-\frac{1}{r^2}\right)$$

vergrössert werden, da wir in den Formeln r durch $r_1 < r$ zu ersetzen haben. Wenn wir dieselbe Betrachtung bei einem durch Kräfte des Innenmantels erweiterten und verlängerten Hohl-

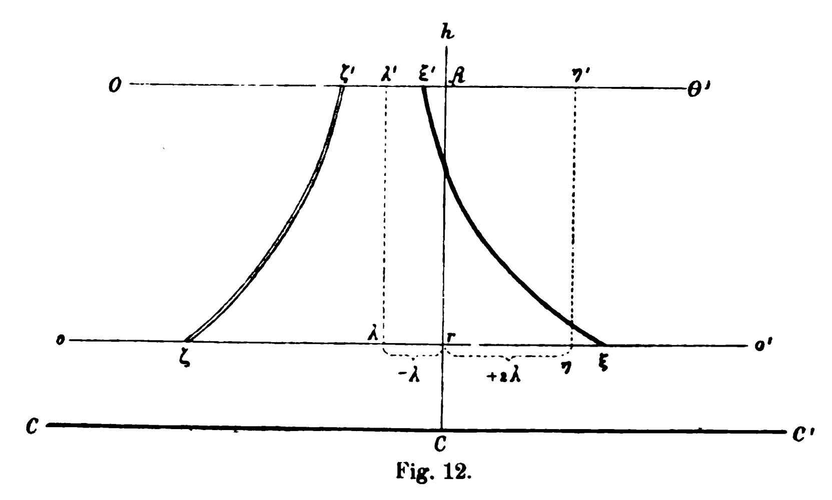


Fig. 12.

cylinder durchführen, wobei wir wieder ν und λ constant bleiben lassen (d. h. nach Einführung der radialen, auf den Aussenmantel wirkenden Kraft die Kräfte des Innenmantels so modificiren, dass ν und λ ihren alten Werth bewahren), dann finden wir den allgemeinen Satz: **Eine auf eine der Mantelflächen bei constant gehaltenem ν und λ centrifugal wirkende Aussenkraft ändert alle Spannungen im Hohlcylinder um den gleichen Betrag in positiver Richtung, während eine centripetale Kraft dasselbe in negativer Richtung bewirkt.**

12. Graphische Darstellung der Deformationen (Fig. 12). Die allgemeinen Gleichungen der Deformationen 38) können wir folgendermassen schreiben:

$$\xi = +\frac{R^2}{\rho^2}(\nu+\lambda)-\lambda$$

$$\zeta = -\frac{R^2}{\rho^2}(\nu+\lambda)-\lambda$$

$$\eta = +2\lambda.$$

In Fig. 12 stellt CC' die Axe unseres Hohlcylinders dar. Die Linie Ch, welche uns als Abscissenaxe dienen soll, ist radial zu denken. Die Strecken Cr und CR drücken die Radien r und R aus, so dass die Ordinatenrichtungslinien OO' und oo' der äusseren und inneren Oberfläche entsprechen. Die Linie $\eta\eta'$ ist die Curve der longitudinalen Deformation η; sie befindet sich im Abstande $+2\lambda$ von der Abscissenaxe Ch. Die punktirte Linie $\lambda\lambda'$ im Abstande $-\lambda$ von der Abscissenaxe wollen wir die Basis der Deformationen nennen, da sich alle Deformationen leicht auf sie beziehen lassen. Wenn wir von der Basis aus symmetrisch nach links und rechts eine hyperbelartige Curve von der Gleichung

$$\frac{R^2}{\rho^2}(\nu+\lambda)$$

verzeichnen, wobei ρ die Abscisse ist, dann ist (falls $\nu+\lambda$ positiv ist) die stark ausgezogene rechte Curve die Curve der peripherischen Deformation ξ, während die linke, doppelt gezogene Curve die Curve der radialen Deformation ζ ist.

Die Summe $\varsigma = \nu+\lambda$ ist massgebend für die Form der Curven der ξ und ζ. Je kleiner diese Summe ist, umso mehr schmiegen die Curven sich der Basis an. Wenn die Summe ς das Zeichen wechselt, dann vertauschen die Curven ihre Lage. Durch Variation von ν allein kann man also den Curven jede beliebige Divergenz geben und kann auch ihre Lage vertauschen.

Nun betrachten wir den Einfluss von λ. Wenn λ wächst, dann rückt die η-Curve nach rechts ins Positive und die beiden anderen Curven verschieben sich um den halben Betrag nach links ins Negative ohne ihre Gestalt zu ändern, wenn wir

$\nu+\lambda =$ const. sein lassen. Umgekehrt verschieben sich die Curven der Querdeformationen ohne Gestaltsänderung nach rechts, die η-Curve aber nach links, sobald sich λ in negativem Sinne ändert und $\lambda+\nu =$ const. bleibt.

Der Einfluss von R besteht darin, dass mit wachsendem R die Divergenz der Querdeformationscurven noch wächst.

Der Innenradius r kommt in den Formeln gar nicht vor.

12. Graphische Darstellung der Spannungen (Fig. 13). Die Formeln für die Spannungen im Cylinder wollen wir insofern

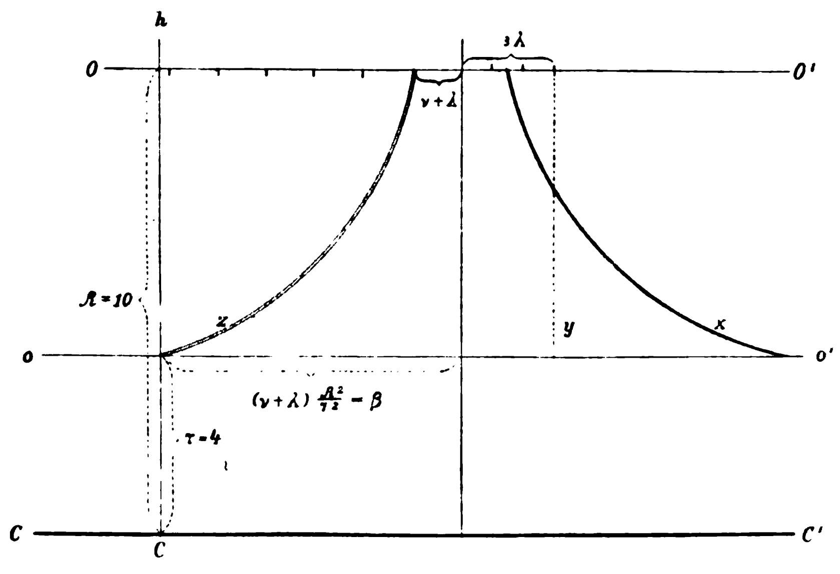


Fig. 13.

umändern, als wir die Kräfte x, y, z auf den Elasticitätscoëfficienten q beziehen, d. h. setzen

$$\mathfrak{x} = \frac{x}{q} \qquad \mathfrak{y} = \frac{y}{q} \qquad \mathfrak{z} = \frac{z}{q}\,.$$

Dann lauten die Formeln 35) für die drei Hauptspannungen:

$$\mathfrak{x} = R^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right) \qquad a \quad \ldots 52)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{z} = R^2(\nu+\lambda)\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2}\right) & b \\ \mathfrak{y} = R^2(\nu+\lambda)\frac{1}{r^2} + 3\lambda. & c \end{array}\right\} \ldots 52)$$

In Fig. 13 ist CC' die Axe des Hohlcylinders; Ch ist in radialer Richtung gezogen. Auf dieser Linie ist $r = 4$ und $R = 10$ aufgetragen und die Ordinatenrichtungen OO' und oo' entsprechen also der äusseren und inneren Oberfläche. Von Ch als Abscissenaxe aus sind die positiven Kräfte nach rechts zu als Ordinaten aufgetragen, und zwar ist die stark ausgezogene Curve die Curve der $\mathfrak{x}$, die doppelt gezogene Curve die Curve der $\mathfrak{z}$ und die punktirte Gerade die Curve der $\mathfrak{y}$.

Vor Allem interessiren uns die Werthe der Kräfte für $\rho = R$ und $\rho = r$. Die Formeln 52) der Kräfte lauten für den ersten Fall

$$\mathfrak{x}_2 = (\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2} + (\nu+\lambda)$$

$$\mathfrak{z}_2 = (\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2} - (\nu+\lambda)$$

$$\mathfrak{y}_2 = (\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2} + 3\lambda.$$

Diesen Formeln entspricht auch die Eintheilung auf OO'. Für unser Beispiel ist $R^2 : r^2 = 6 \cdot 25$. Die Strecken $(\nu+\lambda)$ sind unter der Linie bezeichnet, die Strecken λ aber ober der Linie.

Für die Innenfläche d. i. $\rho = r$ gewinnen wir aus 52) die Ausdrücke

$$\mathfrak{x}_1 = 2(\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2}$$

$$\mathfrak{z}_1 = 0$$

$$\mathfrak{y}_1 = (\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2} + 3\lambda.$$

Wie wir sehen, stützen sich alle Curven auf die Curve

$$(\nu+\lambda)\frac{R^2}{r^2}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck oder auch die denselben darstellende Gerade β die Basis der Spannungen nennen. Aus den allgemeinen Ausdrücken 52) ersehen wir, dass $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$, die beiden Querspannungen, stets auf entgegengesetzten Seiten der Basis liegen; dass mit wachsendem R sie sich asymptotisch dem Werthe β nähern, also immer gleicher werden, dass für $\rho = r$ stets $\mathfrak{x} = 2\beta$ und $\mathfrak{z} = 0$ ist.

Ein Hauptgegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Frage, welche relativen Werthe die Spannungen annehmen können.[1] Jetzt sind wir in der Lage, die erforderlichen Untersuchungen vorzunehmen.

Die Querspannungen x und z haben ihre dargestellten Werthe nicht nur bei Einer Deformation des Cylinders, d. h. nicht nur bei Einem Werthe von ν und λ; vielmehr bleiben die Querspannungen völlig ungeändert, so lange nur die Summe $\nu+\lambda$ constant bleibt. Bei zahllosen Formen des Cylinders bleiben die Querspannungen die gleichen. Die Längsspannung allein erleidet dabei eine Werthänderung. Ihre Abweichung von der Basis ist stets gleich $+3\lambda$. Hieraus ersehen wir, dass wir der Längsspannung jede beliebige Lage rechts oder links von der Basis, also auch einen negativen Werth (links von Ch) geben können, ohne die Querspannungen zu ändern. Wir setzen den dritten Theil ihres Abstandes von β gleich λ, und setzen diesen Werth in die Gleichung $\nu+\lambda = \text{const.}$ und finden den correspondirenden Werth von ν. Wir erkennen sofort die Regel: Die Längsspannung ist grösser als die Basis, wenn der Cylinder verlängert worden ist (λ positiv ist); sie ist kleiner als die Basis, wenn der Cylinder verkürzt worden ist.

Wir haben bis jetzt die Summe $\varsigma = \nu+\lambda$ constant und positiv sein lassen. Um ς variiren zu können, wollen wir die allgemeinen Spannungsformeln 25) entsprechend schreiben. Wir haben

---

[1] Die Erfahrung zeigt nämlich, dass in organischen Cylindern Fasern, namentlich Muskelfasern, regelmässig in den drei geometrischen Hauptrichtungen: longitudinal, radial und peripherisch, und zwar besonders oft in den Mantelflächen auftreten. Es ist nun Grund zur Annahme vorhanden, dass die Richtung, in der neu entstehende Fasern sich bilden, von der absoluten und relativen Grösse der im betreffenden Punkte herrschenden Spannungen abhängt.

$$\mathfrak{x} = \varsigma R^2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\mathfrak{z} = \varsigma R^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$\mathfrak{y} = \varsigma R^2 \frac{1}{r^2} + 3\lambda.$$

Wenn also ς wächst, dann wird die Basis proportional nach rechts verschoben und die Querkräfte proportional vergrössert. Wenn ς abnimmt, verkleinern sich die Querkräfte proportional, und für $\varsigma = 0$ sind beide Querkräfte gleich Null. Wir wiederholen:

Für $\nu = -\lambda$ verschwinden die Querspannungen.

Wenn ς einen negativen Werth besitzt, dann erscheinen die Curven der Querspannungen als Spiegelbilder der Curven, welche einem gleichen positiven ς entsprechen. Der numerische Werth der Querspannungen wird also durch den blossen Zeichenwechsel von ς nicht geändert. Anders verhält es sich mit der Längsspannung. Die Basis ändert wohl ihre Lage stets proportional zu ς, die Längsspannung aber ändert ihre Lage zur Basis nicht wenn λ unverändert bleibt.

IV.

Unsere Resultate gewinnen sehr an Verwendbarkeit, wenn wir die Deformationen und Spannungen nach den bisherigen Methoden auch auf eine Hohlkugel anwenden, weil wir dann durch Vergleichung der Resultate erkennen, welche Eigenthümlichkeiten der Formeln dem speciellen Umstande zugeschrieben werden müssen, dass der Cylinder nur Eine Krümmung besitzt, und welche den Kuppen im Allgemeinen zugeschrieben werden können.

Der wesentliche Unterschied in den beiden Rechnungen wird darin liegen, dass die Deformation η, welche im Cylinder longitudinal liegt, für die Hohlkugel ebenfalls eine peripherische und gleich ξ ist. Ebenso werden die Spannungen x und y bei der Kugel gleichwerthig und identisch sein.

Den Umfang einer Kugelfläche vom Radius ρ ist $2\rho\pi$; der Umfang derselben Kugelfläche ist, wenn der Radius ρ zu $\rho + \partial\rho$ angewachsen ist,

$$(1+\xi)2\pi\rho \quad \text{oder} \quad 2\pi(\rho+\partial\rho),$$

wobei ξ die Verlängerung des Umfanges per Längeneinheit bedeutet. Hieraus ergibt sich, wenn wir sofort alle drei Deformationen ansetzen:

$$\xi = +\frac{\partial\rho}{\rho} \qquad \eta = +\frac{\partial\rho}{\rho} \qquad \zeta = -2\frac{\partial\rho}{\rho}\cdot \qquad \ldots 53)$$

Die Deformationsarbeit per Volumeinheit einer Kugelschale vom Radius ρ, der Dicke $d\rho$ und der Radiusverlängerung $\partial\rho$ ist also

$$q(\xi^2+\xi\eta+\eta^2) = 3q\frac{\partial\rho^2}{\rho^2}$$

und die Deformationsarbeit der ganzen Kugelschale ist

$$3.4\pi q\rho^2 d\rho\frac{\partial\rho^2}{\rho^2}\cdot$$

Das Volumen zwischen zwei beliebigen Kugelflächen von den Radien ρ und $\mathfrak{r}$ muss constant sein, also gelten

$$4\pi(\mathfrak{r}^3-\rho^3) = 3c,$$

woraus folgt

$$\mathfrak{r}^2\partial\mathfrak{r} = \rho^2\partial\rho,$$

d. h. das Product $\rho^2\partial\rho$ muss für alle Radien denselben Werth behalten. Mit Hilfe dieses Satzes können wir die Deformationsarbeit einer Kugelschale vom Radius ρ auch auf das Increment $\partial\mathfrak{r}$ eines anderen Radius $\mathfrak{r}$ beziehen. Wir erhalten den Ausdruck

$$3.4\pi q d\rho\frac{\mathfrak{r}^4}{\rho^4}\partial\mathfrak{r}^2.$$

Wenn wir diese Arbeit nach $\partial\mathfrak{r}$ differenziren, dann finden wir die Kraft, mit der die $\mathfrak{r}$-Schale in centrifugaler Richtung wirken muss, um die ρ-Schale deformirt zu erhalten. Diese Kraft ist also

$$2.3.4.\pi q d\rho\frac{\mathfrak{r}^4}{\rho^4}\partial\mathfrak{r}.$$

Diese radiale Kraft vertheilt sich auf die ganze Fläche der $\mathfrak{r}$-Schale; deren Grösse ist $4\mathfrak{r}^2\pi$. Auf die Flächeneinheit fällt also die centrifugale Kraft

$$2.3 q d\rho \frac{\mathfrak{r}^2}{\rho^4} \partial \mathfrak{r}.$$

Wenn die $\mathfrak{r}$-Schicht alle Schichten von ρ_1 bis ρ_2 deformirt erhalten soll, dann muss sie die Radialkraft ausüben, welche wir durch Integration nach ρ erhalten zu

$$2q\left(\frac{1}{\rho_1^3} - \frac{1}{\rho_2^3}\right)\mathfrak{r}^2 \partial \mathfrak{r}.$$

Diese allgemeine Formel wollen wir zunächst auf die Kugel anwenden, deren äussere Oberfläche gewaltsam ausgedehnt wird. Eine Kugelschale vom Radius ρ hat dann alle zwischen $\rho_1 = r$ und $\rho_2 = \rho$ liegenden Schichten zu tragen, welche einen centripetalen Zug ausüben gleich

$$2q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)\rho^2 \partial \rho,$$

oder, wenn wir $\rho^2 \partial \rho$ ersetzen durch $R^2 \partial R$, gleich

$$2q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)R^2 \partial R. \qquad \ldots 54)$$

Dies ist ein Zug, welcher die Volumeinheit der ρ-Schicht radial spannt (d. h. nicht drückt), also positiv zu nehmen ist; er ist also nichts Anderes, als die Radialspannung $+z$. Für die Spannungen haben wir die allgemeinen Gleichungen (19)

$$x = q\xi + \frac{s}{3} \qquad y = q\eta + \frac{s}{3} \qquad z = q\zeta + \frac{s}{3}\cdot$$

Wenn wir für ξ, η und ζ ihre Werthe 53) einsetzen, dann lauten diese Formeln

$$x = y = q\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{s}{3} \qquad z = -2q\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{s}{3}\cdot \qquad \ldots 55)$$

Wenn wir setzen $\rho^2 \partial \rho = R^2 \partial R$, dann lauten die Formeln auch

$$x = y = \frac{qR^2 \partial R}{\rho^3} + \frac{s}{3} \qquad z = -\frac{2qR^2 \partial R}{\rho^3} + \frac{s}{3}. \quad \ldots 56)$$

Wenn wir nun die zwei Werthe von $+z$ in 54) und 56) einander gleichsetzen, dann finden wir leicht

$$\frac{s}{3} = 2q\frac{1}{r^3}R^2\partial R.$$

Diesen Werth in 55) eingesetzt, finden wir

$$\left.\begin{array}{ll} x = 2q\left(\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3}\right)R^2\partial R & a \\ z = 2q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}\right)R^2\partial R. & b \end{array}\right\} \quad \ldots 57)$$

Für die von innen deformirte Kugel gestaltet sich die Rechnung folgendermassen. Auf einer Schicht vom Radius ρ lagern die Schichten von $\rho_1 = \rho$ bis $\rho_2 = R$ und üben den centripetalen Zug

$$2q\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right)\rho^2\partial\rho,$$

oder wenn wir $\rho^2\partial\rho$ durch $r^2\partial r$ ersetzen

$$2q\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right)r^2\partial r. \quad \ldots 58)$$

Dieser Druck trachtet die Volumelemente der ρ-Schicht zusammenzudrücken, muss somit als $-z$ bezeichnet werden. Da aber der allgemeine Ausdruck für z gegeben ist durch 55)

$$z = -2q\frac{\partial\rho}{\rho} + \frac{s}{3} = -2q\frac{1}{\rho^3}r^2\partial r + \frac{s}{3}, \quad \ldots 59)$$

so finden wir durch Gleichsetzung der beiden Werthe (58 und 59) von z

$$\frac{s}{3} = 2q\frac{1}{R^3}r^2\partial r.$$

Diesen in 56) eingesetzt, finden wir ($R^2\partial R$ durch $r^2\partial r$ ersetzt)

$$\left.\begin{array}{ll} x = +2q\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{R^3}\right)r^2\partial r & a \\ z = -2q\left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}\right)r^2\partial r. & b \end{array}\right\} \quad \ldots 60)$$

Wenn die Aussenfläche der Hohlkugel mit der Kraft A expansiv gespannt ist, dann erzeugt sie einen radialen centrifugalen Zug $Z_2 = 2A/R$. Dieser muss gleich sein dem Werthe von z in 57 b) für $\rho = R$. Hieraus finden wir die Oberflächenspannung

$$A = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) R^3 \partial R. \qquad \ldots 61)$$

Ganz analog finden wir als Spannung a in der deformirenden Innenfläche aus 60 b) den Werth

$$a = q\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) r^3 \partial r. \qquad \ldots 62)$$

Aus den Formeln 57) und 61) finden wir für die von aussen deformirte Kugel durch Elimination von ∂R

$$x = 2\frac{A}{R} \frac{\frac{1}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3}}{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}} \qquad z = 2\frac{A}{R} \frac{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\rho^3}}{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}}. \qquad \ldots 63)$$

Aus den Formeln 60) und 62) aber finden wir ebenso für die von innen deformirte Kugel

$$x = 2\frac{a}{r} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\rho^3} + \frac{1}{R^3}}{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}} \qquad z = -2\frac{a}{r} \frac{\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{R^3}}{\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}}. \qquad \ldots 64)$$

Wenn wir die Formeln 50) und 63) vergleichen, kommen wir zu folgenden unerwarteten Resultaten:

Wenn ein Hohlkörper durch Oberflächenwachsthum deformirt wird, dann sind die erzeugten radialen Spannungen immer kleiner als die tangentialen Spannungen. Mit der Tiefe nehmen erstere ab, letztere zu. Bei relativ engen Höhlungen sind weitaus die stärksten tangentialen Spannungen in der Höhlenwandung, in einer ziemlich dünnen Schicht.

V.

Es wäre sehr schwer, all die morphologischen Entwicklungen, welche auf den soeben dargelegten Rechnungen beruhen, in eine zusammenhängende Studie zusammenzufassen; sie beziehen sich auf allzu heterogene Objecte. Anderseits wäre es aber kaum räthlich, dieselben Cardinalrechnungen in jeder Theilstudie aufs Neue zu entwickeln. So mögen denn die Rechnungen dastehen als Basis einer Reihe künftiger Entwicklungen aus dem Gebiete der theoretischen Organik.

XXVII. SITZUNG VOM 18. DECEMBER 1890.

Der Secretär legt den eben erschienenen 57. Band der Denkschriften vor.

Das c. M. Herr Prof. L. Gegenbauer in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Zur Theorie der regulären Kettenbrüche.“

Der Secretär legt eine Abhandlung von Herrn Dr. Theodor Gross, Privatdocent an der technischen Hochschule in Berlin, vor, betitelt: „Chemische Versuche über den Schwefel“.

Das w. M. Herr Director E. Weiss überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. G. v. Niessl in Brünn, betitelt: „Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 17. Jänner 1890.“

Das w. M. Herr Director E. Weiss spricht über den Kometen, den der Assistent der Wiener Sternwarte Herr R. Spitaler in den Morgenstunden des 17. November d. J. entdeckte.

Herr Prof. Dr. J. M. Pernter überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Die Windverhältnisse auf dem Sonnblick und einigen anderen Gipfelstationen.“

Herr Dr. Gustav Kohn, Privatdocent an der Wiener Universität, überreicht eine Abhandlung: „Über einige projective Eigenschaften der Poncelet'schen Polygone.“

Herr Dr. Gottlieb Adler, Privatdocent an der k. k. Universität zu Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über eine Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie.“

Elektrische Beobachtungen auf dem Hohen Sonnblick

von

J. Elster und **H. Geitel,**

Oberlehrern am herzoglichen Gymnasium in Wolfenbüttel.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 20. November 1890.)

§. 1.

Einleitung.

Während des Juli dieses Jahres haben wir uns zwei Wochen lang theils auf der meteorologischen Warte des Hohen Sonnblick, theils in der Fussstation Kolm-Saigurn aufgehalten. Wir verfolgten in erster Linie den Zweck, mittelst eines auf die Erscheinung der lichtelektrischen Entladung gegründeten Photometers die Intensität gewisser, dem brechbarsten Theile des Spectrums angehöriger Strahlen des Sonnenlichtes in verschiedenen Meereshöhen zu bestimmen und so eine etwaige Absorption derselben in der Atmosphäre nachzuweisen. In bereitwilliger Weise wurde uns für diesen Zeitraum das sogenannte Gelehrtenzimmer der Sonnblickwarte von Seiten der österreichischen meteorologischen Gesellschaft zur Verfügung gestellt; wir benützen auch diese Gelegenheit, unseren verbindlichsten Dank auszusprechen.

Über die Ergebnisse dieser photometrischen Beobachtungen im Zusammenhange mit solchen, die nun ein Jahr lang in Wolfenbüttel durchgeführt sind, hat einer von uns einen kurzen Bericht auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte (Section für Physik) in Bremen erstattet; wir hoffen in einiger Zeit eine zusammenfassende Darstellung aller unserer Messungen auf diesem Gebiete geben zu können. Nur soviel möge bemerkt werden, dass die Intensität der ultravioletten Sonnenstrahlung, gemessen durch die lichtelektrische Entladung negativ elek-

trisirter Flächen von amalgamirtem Zink, in 3100 *m* Meereshöhe über das Doppelte der bei gleichem Sonnenstande im Tieflande gemessenen beträgt.

Wir hatten von vorneherein uns darauf eingerichtet, unseren Aufenthalt auf der Sonnblickwarte auch noch nach anderen Richtungen hin zu verwerthen, und ausser der oben genannten Hauptaufgabe noch drei weitere Ziele ins Auge gefasst. Zuerst wollten wir untersuchen, ob in jener Höhe die Reihe der Substanzen, welche die lichtelektrische Entladung durch Sonnenlicht zeigen, eine umfassendere ist als im Tieflande, und besonders, ob solche Stoffe, welche im Hochgebirge die Erdoberfläche bilden, wie Gesteine und Schnee, zu den wirksamen zählen. Zweitens sollte, wenn thunlich, der eine von uns den täglichen Gang des Potentialgefälles auf dem Sonnblickgipfel durch möglichst viele Messungen festlegen, während der Andere zeitlich correspondirende Beobachtungen in Kolm-Saigurn durchführte. Schliesslich beabsichtigten wir, während des Falles von Niederschlägen (besonders bei Elmsfeuern) auf dem Sonnblick den Verlauf des Zeichenwechsels des Potentialgefälles zu verfolgen, wie wir es gelegentlich unserer Beobachtungen, betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge schon in unserem Wohnorte Wolfenbüttel gethan hatten.

Die Beobachtungen, die wir innerhalb der uns zu Gebote stehenden Zeit nach diesen drei Richtungen hin austellen konnten, bilden den Gegenstand der folgenden Mittheilung.

§. 2.

Lichtelektrische Beobachtungen in 3100 *m* Meereshöhe.

Wir schicken voraus, dass unsere Bestrebungen, auf der Höhe des Sonnblick neue Substanzen zu den bekannten (nämlich den Amalgamen der Alkalimetalle, ferner Magnesium, Aluminium, Zink, sowie der Balmain'schen Leuchtfarbe[1] zu finden,

[1] Vergl. J. Elster u. H. Geitel, Über die Entladung negativ elektrischer Körper durch das Sonnen- und Tageslicht. Wied. Ann., 38. S. 497 ff, 1889.

für welche der Zerstreuungscoëfficient für negative Elektricität in deutlicher Weise von der Bestrahlung durch Sonnenlicht abhängt, unserer Auffassung nach zu keiner Erweiterung jener Reihe geführt haben. Wir theilen unsere Versuchsanordnung, sowie die Resultate im Folgenden dennoch mit, weil einerseits dieselben vielleicht einer anderen Deutung zugänglich sein könnten, anderseits aber auch dem rein negativen Ergebnisse ein gewisser Werth für die Theorie der atmosphärischen Elektricität zukommen würde.

Folgende Substanzen haben wir auf ihr lichtelektrisches Verhalten auf dem Hohen Sonnblick am 18. Juli d. J. unter Mittag geprüft:

1. Abgeschmirgeltes und rostiges Eisen; kreisrunde Platte von circa 15 *cm* Durchmesser.

2. Frisch abgeschabte Elementenkohle; quadratisches, ungebrauchtes Stück von 5 *cm* Seitenlänge.

3. Glimmerschiefer, dem Grat des Sonnblick entnommen; eine Platte von der ungefähren Grösse der Eisenplatte.

Ferner vermittelst einer weiter unten beschriebenen besonderen Vorrichtung:

4. Quarz; Splitter von 12 cm^2 Oberfläche, aus einem grossen Krystall.

5. Eosin in Pulverform.

6. Fuchsin in Krystallen und schliesslich auch, aber zu anderer Tageszeit

7. frisch gefallenen Schnee.

Dabei befanden sich die drei erstgenannten Substanzen isolirt aufgestellt im Innern eines einen kleinen Tisch von 58 *cm* Länge und 48 *cm* Breite überdeckenden würfelförmigen Drahtkastens von circa 75 *cm* Höhe. Letzterer war durch einen Kupferdraht mit dem Blitzableiter des Hauses verbunden. Der Tisch stand auf einem auf der Südseite der Station von dem Beobachter auf dem Schnee errichteten Podium, auf dem wir auch unsere photometrischen Messungen ausführten. Mittelst einer Zamboni-schen Säule ertheilten wir dem belichteten Körper zuerst eine positive Ladung und beobachteten die Abnahme $\delta+$ dieser Ladung an einem mit ihm leitend verbundenen Exner'schen Elektroskope in dem Zeitraume von einer Minute. Alsdann

wiederholten wir den Versuch mit einer gleich hohen negativen Anfangsladung und bestimmten auch hier den Elektricitätsverlust $\delta-$ in dem gleichen Zeitintervall. In beiden Fällen betrug die mitgetheilte Ladung sehr nahe 140 Volt.

Es wurden in der Minute folgende Abnahmen in Volt beobachtet:

	δ_+	δ_-
1. Eisen (rostig)	16	24
2. Eisen (blank)	16	31
3. Kohle (frisch geschabt)	11	25
4. Glimmerschiefer	12	26

Aus diesen Zahlen geht unzweifelhaft eine schnellere Zerstreuung der negativen Elektricität als der positiven hervor, und man könnte versucht sein, diesen Unterschied auf den Einfluss des Lichtes zurückzuführen, doch halten wir die gefundenen Resultate nicht für einwurfsfrei.

Als nämlich ein Collector im Innern des Drahtkastens angebracht wurde, lud sich das mit demselben leitend verbundene Elektroskop, wenn auch äusserst schwach, so doch deutlich sichtbar, mit positiver Elektricität. Es drangen also doch noch Kraftlinien des äusseren Feldes in den Drahtkasten ein.

Der schwache Ausschlag des Elektroskopes mochte etwa +30 Volt entsprechen. Eine Verengerung der Drahtmaschen hätte denselben vielleicht verringern, aber schwerlich völlig beseitigen können. Der belichtete Körper liess sich daher auf diesem Wege der Wirkung des äusseren positiven Potentialgefälles nicht völlig entziehen, d. h. also bei negativer Ladung desselben war — für gleichen Ausschlag des Elektroskopes — schon an sich ein stärkeres Potentialgefälle in der Richtung der Normalen seiner Oberfläche angewandt, als bei positiver, woraus allein schon die grössere Zerstreuung negativer Elektricität sich erklären lässt. Diese Auffassung wird dadurch bestätigt, dass Beschattung des exponirten Körpers durch einen Schirm die Zerstreuung nicht merklich änderte, lichtelektrische Wirkungen also schwerlich im Spiele gewesen sind.

Fast zur Gewissheit wird sie durch den Umstand, dass bei Anstellung analoger Versuche am Fusse des Sonnblick, in Kolm-Saigurn, sich genau das entgegengesetzte Verhalten zeigte; hier

entwich die positive Elektricität leichter als die negative; zugleich hatte das Potentialgefälle hier einen hohen negativen Werth, eine Anomalie, auf die wir weiter unten noch eingehend zurückzukommen gedenken.

Für die oben erwähnte Eisenplatte waren z. B. die Zahlen: $\delta_+ = 41$; $\delta_- = 12$, während auf der Sonnblickspitze, wie oben mitgetheilt, sich die Werthe: $\delta_+ = 16$; $\delta_- = 24$ ergeben hatten.

Die unter 4., 5. und 6. genannten Substanzen, bei denen wegen ihres krystall-elektrischen Verhaltens oder ihrer lichtelektrischen Wirksamkeit (bei Verwendung von Zinkbogenlicht) positive Resultate erwartet werden konnten, Quarz, Eosin, Fuchsin wurden innerhalb eines an einer Seite durch eine Gypsplatte geschlossenen, sonst aber metallischen, zur Erde abgeleiteten Kastens auf ihre Lichtempfindlichkeit geprüft. Ein Metallschirm gestattete, wenn nothwendig, die Substanzen vom Lichte abzuschliessen. Es fand sich für diese Stoffe aber im Mittel die nicht anormale Abnahme von etwa 17 Volt pro Minute bei einer Anfangsladung von 140 Volt, u. zw. ohne Unterschied, ob belichtet war oder nicht. Ein mit pulverförmiger Balmain'scher Leuchtfarbe gefülltes Eisenschälchen verlor dagegen im Sonnenlichte in der gleichen Zeit fast die gesammte, ihm mitgetheilte negative Ladung.

In Bezug auf die lichtelektrische Wirksamkeit des Schnees, die festzustellen in Rücksicht auf die Theorie der atmosphärischen Elektricität von Wichtigkeit wäre, hatten wir schon in Wolfenbüttel Versuche mit negativem Erfolge angestellt. Es schien nicht unmöglich, dass dieser Misserfolg auf die ungünstigen Versuchsbedingungen zurückzuführen war, die im Tieflande unvermeidlich sind. Man muss im Winter, wenn (wie wir feststellen konnten) die lichtelektrische Intensität des Sonnenlichtes auf etwa den 22. Theil der sommerlichen Kraft gesunken ist, experimentiren und hat auf Tage so niedriger Mittagstemperatur zu warten, dass der Schnee im Sonnenlichte seine trockene Beschaffenheit bewahrt. Wir wiederholten daher diese Versuche unter den günstigeren Verhältnissen auf dem Sonnblickgipfel. Hier ist in den Morgenstunden der Schnee nach einer klaren Nacht unter Null Grad abgekühlt und die ultraviolette Sonnenstrahlung hat schon um 9^h *a.* eine Intensität erreicht, welche die winterliche Mittagsstrahlung im Tieflande um circa das 37fache übersteigt.

Als wir eine kreisrunde Eisenschale von 9 *cm* Durchmesser mit frisch gefallenem Schnee füllten, dieselbe elektrisirten und innerhalb des Drahtkastens dem Sonnenlichte exponirten, erhielten wir:

$$\delta_{+} = 10, \quad \delta_{-} = 41 \text{ Volt},$$

während die Schale ohne Schneefüllung lieferte:

$$\delta_{+} = 10, \quad \delta_{-} = 36$$

Mehrfache Controlversuche ergaben das gleiche Resultat.

Es ist demnach kein deutlich erkennbarer Unterschied in dem Verhalten einer mit Schnee gefüllten und einer leeren Eisenschale zu constatiren, die grössere Zerstreuung der negativen Elektricität kann daher einer besonderen Wirksamkeit des Schnees nicht zugeschrieben werden und hat wahrscheinlich in der oben angegebenen Fehlerquelle ihren Grund.

Wir schliessen aus unseren Ergebnissen nur, dass die gesuchten lichtelektrischen Wirkungen, wenn sie vorhanden sind, im Vergleich mit den der bis jetzt bekannten lichtempfindlichen Substanzen klein sein müssen, sonst würden sie sich der Auffindung nicht entzogen haben.

Eine Wiederholung der Versuche in grosser Meereshöhe mit empfindlicheren Elektrometern und unter vollständigem Ausschluss der atmosphärischen Elektricität dürfte durchaus angezeigt sein, zumal Nodon[1] in Paris eine spontane positive Elektrisirung von Kohlen- und Kupferplatten durch Sonnenlicht bekannt gemacht hat.

§. 3.

Beobachtungen des atmosphärischen Potentialgefälles.

A. In Kolm-Saigurn.

Unmittelbar nach unserer Ankunft in Kolm-Saigurn, bevor wir zum Sonnblickgipfel übersiedelten, hatten wir mit Zusammenstellung der Apparate begonnen, die zur Messung des atmosphärischen Potentialgefälles an diesem Orte dienen sollten. Wir

---

[1] Nodon, Über die durch Sonnenstrahlen hervorgerufenen elektrischen Erscheinungen. C. R., 109, S. 219—221 u. Beibl. 13, S. 976. 1889.

benützten die von F. Exner[1] angegebene Vorrichtung, nur mit der Abänderung, dass an Stelle der Lichtflamme die gegen Luftzug widerstandsfähigere Petroleumflamme trat. Zu unserer Verwunderung fanden wir bald, dass an dem ersten Tage (9. Juli) die luftelektrische Spannungsdifferenz gegen die Erde im Thale so klein war, dass sie selbst bei Verlängerung des Exner'schen isolirenden Statifs auf etwa 3 *m* am Elektroskop nicht wahrgenommen werden konnte. Erst auf der dem Kolbenhause gegenüberliegenden Thalwand zeigten sich in einiger Höhe über der Thalsohle schwache Anzeichen positiver Elektricität. Der Tag war nicht wolkenfrei; es schien daher nicht ausgeschlossen, dass Störungen obwalteten, und dass wolkenlose Tage die Möglichkeit sicherer Messungen bringen würden. Auch die nächstfolgende Zeit war den Beobachtungen der Schönwetterelektricität nicht günstig; am 12. Juli Morgens lagerte dichter Nebel im Thale. Im Flachlande herrscht unter solchen Umständen öfters hohes positives Potentialgefälle, wir waren daher erstaunt, hohe negative Werthe von mehreren Hundert Volts per Meter zu finden. (Die Zahlen lagen zwischen 300 und 600 Volt.) Der im Laufe des Tages eintretende Regen, der das bekannte Gewitter einleitete, das in der folgenden Nacht die Alpenthäler bis tief hinab in Schnee hüllte, liess uns indessen auch hierin noch keine abnorme Erscheinung erblicken. Am 14. Juli trat endlich, während eine Decke hohen Schnees den Thalboden überzog, gegen 10 *a.* klarer Himmel und sehr durchsichtige Luft ein.

Das Potentialgefälle erwies sich nun zwischen —400 und —600 Volt per Meter schwankend und hielt sich nahezu constant bis zu der letzten Messung um 8^h *p.*; auch am anderen Morgen 7^h *a.* erwies es sich noch als, wenn auch schwächer, negativ.

Da vollständig reiner Himmel herrschte, so konnte kein Zweifel sein, dass hier eine aussergewöhnliche Störung vorhanden sein musste, und es lag nahe, sie in ganz localen Vorgängen zu suchen. Die Erfahrungen, die wir gelegentlich einer Beschäftigung mit den elektrischen Eigenschaften sich auflösender Wasserstrahlen gemacht hatten, brachte uns auf den Gedanken, in den

---

[1] F. Exner, Über transportable Apparate zur Beobachtung der atmosphärischen Elektricität Wien. Ber., XCV, II. a, S. 1084, Mai-Heft 1887.

zahlreichen Wasserfällen, die in das Thalbecken von Kolm-Saigurn herabstürzen, die Ursache jener Abnormität zu vermuthen. Der Gedanke bewährte sich als der richtige; in der Nähe eines der Wasserfälle fanden wir ein Potentialgefälle von über —1000 Volt und konnten, indem wir uns weiter und weiter von demselben auf die gegenüberliegende — von Wasserfällen freie — Thalwand entfernten, ein Herabsinken der Spannung bis unter $-50 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ feststellen.

Mit der Wahrnehmung dieser eingreifenden Störung war der Plan, den Gang des Potentialgefälles im Thale und auf dem Sonnblick durch correspondirende Beobachtungen festzulegen, hinfällig geworden. Das schöne Wetter mahnte dazu, den zu den photometrischen Messungen unerlässlichen Sonnenschein auf der Gipfelstation nicht zu versäumen. Wir stiegen desshalb am 16. Juli früh zum Sonnblick auf, benutzten aber die Gelegenheit, festzustellen, wie weit die negative Elektrisirung durch die Wasserfälle sich nach oben bemerklich machte. Wir fanden in Kolm-Saigurn (1600 *m* über dem Meere) um $2^1/_3{}^h$ *a.* das Potentialgefälle noch unverändert stark negativ; bei dem von dem Goldberggletscher gespeisten Wasserfalle nahm die Spannung in der schon festgestellten Weise noch beträchtlich zu; am Maschinenhause (2177 *m* über dem Meere) war das Gefälle Null, von hier an fanden wir beim weiteren Anstieg zunehmende positive Werthe, die auf dem Sonnblickgipfel so hoch wurden, dass sie ohne besondere Vorrichtungen mittelst des Exner'schen Elektroskopes nicht messbar waren.

Während unseres Aufenthaltes auf dem Gipfel haben wir an klaren Tagen niemals negatives Gefälle beobachtet; die nähere Angabe der Messungen folgt weiter unten.

Am 23. Juli waren wir nach Beendigung unseres Aufenthaltes auf dem Gipfel wieder in Kolm-Saigurn angekommen und fanden im Wesentlichen dieselbe Abnormität wieder vor. Auch andere Wasserfälle, als die bis dahin untersuchten, erwiesen sich als Quellen negativer Elektrisirung, nur war es an diesem Tage möglich, durch einen geringen Anstieg an der Nordseite aus der negativen Schicht aufzutauchen und positives Gefälle zu erhalten. Am 24. gingen wir bei fast völlig wolkenlosem

Himmel über die Bockartscharte nach Gastein. Unterwegs erhielten wir negatives Gefälle in Kolm-Saigurn, positives beim Anstiege zur Scharte und auf der Passhöhe selbst, im Nassfeld fanden wir Null und im weiteren Verlaufe des Gasteiner Thales zunehmende negative Werthe, unter anderem auch in den Strassen von Wildbad-Gastein.

Dass in der Nähe von Wasserfällen starke negative elektrische Spannungen beobachtet werden können, ist bekannt (Vergl. Hoppe, Geschichte der Elektricität, S. 157, 1884); neu dürfte die Bemerkung sein, dass durch verhältnissmässig kleine, zerstäubende Wasserläufe in einem ausgedehnten Thalgrunde, und zwar bis in grosse Höhe hinauf (bis nahe 500 *m*) negatives Gefälle erzeugt werden kann. Von wesentlicher Bedeutung scheint uns der Sinn der Elektrisirung zu sein.

Über die muthmassliche Ursache der Erscheinung möchten wir uns einige Bemerkungen erlauben.

Es liegt am nächsten, an eine Elektricitätserregung durch Reibung des Wassers beim Aufschlagen auf den benetzten Boden zu denken.

Dem steht entgegen, dass Laboratoriumsversuche eine einigermassen bedeutende Elektrisirung unter ähnlichen Bedingungen nicht erkennen lassen, ja selbst als wir Wasser mittelst einer Brause auf ein schräg gestelltes Brett aus einer Höhe von circa 5 *m* herabfallen liessen, konnten wir mittelst eines in die reflectirten Tropfen gehaltenen Collectors keine am Aluminiumblattelektroskop wahrnehmbare Spannung erhalten. Zudem ist zu beachten, dass Wasser, wenn es durch Tröpfchenreibung wirklich stark elektrisirt wird, wie in der Armstrong'schen Maschine oder beim Contact mit heissen oder wachsüberzogenen Flächen, sowie gewissen Pflanzenblättern[1] stets positive Erregung zeigt.

Wir glauben in Übereinstimmung mit Hoppe (l. c.) die Erklärung in einem anderen Vorgange suchen zu müssen, nämlich in demselben, der unserer Meinung nach auch bei dem Zustandekommen der Niederschlagselektricität im Spiele ist. Es

---

[1] Vergl. J. Elster u. H Geitel, Über die Elektricitätsentwicklung bei der Tröpfchenreibung. Wied. Ann., Bd. 32, S. 74, 1887.

wären demnach die beobachteten Elektrisirungen im Wesentlichen auf Influenzwirkungen des positiven atmosphärischen Potentialgefälles auf das fallende Wasser zurückzuführen. In der That, wenn an irgend einer Stelle feine Wassertropfen von dem Continuum des herabsinkenden Wassers sich loslösen, so müssen sie durch Influenz mit negativer Elektricität geladen sein.

Sind die Tröpfchen zum Theil so klein, dass sie beim Herabsinken bis auf minimale Stäubchen verdunsten, so muss auf diesen die negative Elektricität verbleiben, und wenn der Vorgang ein continuirlicher ist, so wird sich unter dem Wasserfalle eine Schichte negativer Staubluft ansammeln müssen, deren elektrische Volumdichtigkeit so lange wächst, bis ihre Influenz auf die sich loslösenden Tropfen die des atmosphärischen Potentialgefälles compensirt. Dann würde ein stationärer Zustand zu erwarten sein, indem nun die freien Tropfen unelektrisch herabfielen. Wir möchten indessen vermuthen, dass der eben geschilderte Vorgang in diesem Zeitpunkte noch nicht nothwendig seinen Abschluss erreicht zu haben braucht.

Nimmt man an, in eine auf der Erde lagernde negativ elektrische Staubluftschicht fallen von oben unelektrische, freie und so grosse Wassermassen ein, dass sich von ihnen in Folge der gesteigerten Fallgeschwindigkeit kleine Tröpfchen nach oben loslösen, die nun in ihrer Bewegung zurückbleiben, so müssen die kleinen negativ, die grösseren positiv elektrisch werden. Die letzteren geben bei dem Passiren der Staubluftschicht nur geringe Mengen positiver Elektricität an diese ab und werden dann bei dem Aufschlagen auf die Erde entladen, die kleineren negativen folgen nach, die kleinsten negativen aber verdunsten vor dem Erreichen des Bodens und ihre elektrisirten Kerne vermehren die elektrische Dichtigkeit der angenommenen Staubluftschicht. Wenn durch diese zugeführten negativen Staubkerne die elektrische Dichtigkeit um einen grösseren Betrag vermehrt wird, als durch Zerstreuung oder Contact mit den positiven Tropfen oder dem Erdboden verloren geht, so muss diese Dichtigkeit zunehmen und damit auch die Intensität des elektrischen Feldes oberhalb der Staubluftschichte.

Es ist also auch hier das Princip der Selbstinfluenz angewandt worden, das wir zur Erklärung der intensiven Elektrici-

tätsentwicklung beim Falle von Niederschlägen herangezogen haben;[1] im Wesentlichen beruhend auf der Vorstellung von der räumlichen Trennung grosser und kleiner Niederschlagstheile durch die Fallbewegung, bei der die ersteren die positive Elektricität rasch abführen, während die negative auf den letzteren weit langsamer und unvollständiger zur Erde gelangt.

Für die hier versuchte Erklärung spricht die Thatsache, dass wir die negative Elektrisirung der Luft nicht an allen Tagen fanden. In der That, wenn einmal durch Wind die elektrische Schicht entfernt wurde, so konnte sie sich nur unter dem Einflusse eines positiven Potentialgefälles allmälig wieder bilden. War dies Gefälle bei regnerischem Wetter im Zeichen wechselnd gewesen oder nahe gleich Null, so durfte auch keine Elektrisirung der Luft gefunden werden; überhaupt muss ein im Zeichen constantes Gefälle längere Zeit angedauert haben, um die Erscheinung deutlich hervorzurufen. Es wäre wichtig, zu entscheiden, ob nicht auch durch anormales negatives Gefälle bis in die höchsten Luftschichten hinein, wie es an gewissen Stellen der Niederschlagsgebiete vorübergehend auftritt, Störungen im positiven Sinne veranlasst werden können; doch dürfte es kaum möglich sein, bei dem vorübergehenden Charakter der negativen Luftelelektricität etwas Sicheres festzustellen.

Wir fügen hinzu, dass die hier vorgetragene Anschauung nur insofern einen gewissen Werth haben dürfte, als man sich von ihr bei eingehenderem Studium der Wasserfallelektricität zunächst leiten lassen kann. Es wäre ohne Frage viel gewonnen, wenn es gelänge, die letztere als aus verwandter Quelle mit der Niederschlagselektricität stammend nachzuweisen. Doch liegt eben in dieser Aussicht und der äusseren Analogie der beiden Erscheinungen soviel Bestechendes, dass die schärfste Prüfung auf Grund eingehender Beobachtungen geboten erscheint.

---

[1] Vergl. J. Elster u. H. Geitel, Beobachtungen, betreffend die elektrische Natur der atmosphärischen Niederschläge. Wien. Ber., XCIX, Abtheilung II. a., S. 443, Mai 1890. (Wir benützen die Gelegenheit, einen Irrthum in dieser Abhandlung richtig zu stellen: S. 447, 19. Zeile von oben ist der Satz von: „Es ist bemerkenswerth“ bis „100.000 Volt liegen“ zu streichen. Die bei weitem zu grosse Zahlenangabe beruht auf einer unrichtigen Voraussetzung.)

Zur Vorsicht mahnen die mitgetheilten Beobachtungen ferner in der Verwerthung elektrischer Messungen, die in tiefen von Wasser durchflossenen Thälern gewonnen wurden.

Bemerkt mag noch werden, dass ein Staubgehalt der Luft mit Hilfe des Auges in keiner Weise zu erkennen war.

B. Auf dem Hohen Sonnblick.

War aus den im Vorigen auseinandergesetzten Grunde der ursprüngliche Plan, den Gang des atmosphärischen Potentialgefälles an zwei benachbarten Stationen von beträchtlichem Höhenunterschiede festzustellen, vereitelt worden, so suchten wir für den Sonnblickgipfel wenigstens den ungefähren Betrag des elektrischen Gefälles zu ermitteln und möglichst viele Beobachtungen zu sammeln, die über die tägliche Periode Aufschluss geben konnten.

Der Zahlenwerth des normalen mittleren atmosphärischen Potentialgefälles auf der Sonnblickspitze kann allerdings nur als merkwürdige Einzelheit einiges Interesse bieten. Bekanntlich ist nach den Untersuchungen Exner's das normale Potentialgefälle für irgend einen Punkt einer Ebene — unabhängig von der geographischen Lage — durch das in der Volumeinheit der Luft enthaltene Wasserquantum bestimmt; im Gebirge dagegen treten durch die Gestaltung des Terrains erhebliche Deformationen der Niveauflächen ein und zumal um Bergspitzen drängen sich diese so dicht zusammen, dass das Gefälle abnorm hohe Werthe erreichen kann. Da dasselbe somit von der geometrischen Gestalt des Berges abhängt, lassen sich allgemeine Schlüsse aus seiner Kenntniss nicht ziehen.

Exner[1] bestimmt das Potentialgefälle an irgend einer Stelle der freien Atmosphäre in der Weise, dass er von zwei in verschiedener Höhe entzündeten Flammen die eine mit dem Knopf, die anderen mit dem Gehäuse des isolirten Elektroskopes verbindet und die abgelesene Anzahl der Volts durch die Verticalentfernung der Flammen dividirt. Die Schwierigkeit, an einer Flamme den Punkt zu fixiren, in dem die erhitzten Gase aufhören

---

[1] F. Exner, Wien. Ber., l. c., S. 1099.

als Continuum zu leiten, würde bei Beobachtungen in dem starken elektrischen Felde des Sonnblickgipfels eine erhebliche Fehlerquelle bewirken, da man bei Verwendung eines calibrirten Aluminiumblattelektroskopes die Flammen bis auf wenige Centimeter Verticalabstand bringen muss, um ein Durchschlagen der Blättchen zu verhindern. Zudem setzt der Gebrauch von Flammen als Collectoren so geringe Luftbewegung voraus, wie sie auf Bergen selten zu treffen ist. Wir verwandten daher, entsprechend einem schon früher von uns gemachten Vorschlage,[1] zwei blank geschmirgelte, horizontale und parallele Aluminiumdrähte, deren einer am Knopf, deren anderer am Gehäuse des isolirten Elektroskopes befestigt war. Im Sonnenlichte wirken dieselben in Bezug auf positive Elektricität wie zwei Collectoren. Vor dem Gebrauch wird Knopf und Gehäuse mit der Hand leitend verbunden, dann der Apparat hoch emporgehalten und, wenn der Maximalausschlag erreicht ist, die Ablesung vorgenommen. Der Beobachter der Sonnblickstation, Peter Lechner, führte diese Ablesungen auf der Spitze des Thurmes, unmittelbar am Schalenkreuz des Anemometers aus, während wir gleichzeitig vom Ostfenster des Hauses aus mittelst eines anderen Instrumentes den hier natürlich kleineren Werth des Gefälles feststellten, um so den Reductionsfactor: Sonnblickspitze-Ostfenster zu gewinnen. Der Beobachter fand nun im Mittel zwischen den Blättchen des Elektroskopes und dem isolirten Gehäuse eine Potentialdifferenz von 104 Volt; es würde sich also, da der Abstand der Aluminiumdrähte 10 *cm* betrug, für das Potentialgefälle $\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ die Zahl 1040 ergeben. Die von uns vorgenommene gleichzeitige Bestimmung am genannten Standpunkt lieferte: $\frac{\partial v}{\partial n} = 208$; der gesuchte Factor ist also 5. An dem letzteren Standpunkte wurden noch weitere 29 Messungen bei klarem Himmel ausgeführt; der aus diesen resultirende Mittelwerth ist 221, so dass also das mittlere Potentialgefälle am Anemometerkreuz in der Zeit vom 16. bis 20. Juli $1105 \frac{\text{Volt}}{\text{Meter}}$ betrug. Diesem Werthe haftet natürlich eine nicht

---

[1] J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann., 38, S. 511ff, 1889.

geringe Unsicherheit an, selbst abgesehen davon, dass Factorenbestimmungen zu verschiedenen Zeiten voraussichtlich etwas verschiedene Werthe ergeben haben würden.

Es mag darauf aufmerksam gemacht werden, dass der gefundene Mittelwerth 1105 nicht allzuweit entfernt liegt von dem Werthe 1410, der nach Exner[1] auf der ganzen Erde herrschen würde, wenn alle Feuchtigkeit aus der Luft niedergeschlagen wäre. Das elektrische Feld auf dem Sonnblick konnte demnach damals eine Vorstellung von diesem gedachten Zustande geben.

Wichtiger als die Ermittlung dieser Zahl war es, die tägliche Periode des Potentialgefälles auf dem Sonnblickgipfel zu untersuchen. Wir wandten zu diesem Zwecke die folgende Methode an.

In das eine Ende eines etwa 2 *m* langen Stabes war ein Ebonitstab eingefügt, der einen Wassercollector trug. An dem Holzstabe befanden sich drei Marken, 0, 1, 2, so dass der Tropfensammler in verschiedenen Entfernungen von der Hauswand in Thätigkeit gesetzt werden konnte, je nachdem Marke 0, 1 oder 2 mit der linken Ecke des östlichen Fensters der sogenannten Gelehrtenstube abschnitt. Ein Metalldraht verband den Collector leitend mit dem calibrirten Exner'schen Elektroskope, das auf einem Tische in unmittelbarer Nähe des Fensters Aufstellung gefunden hatte. Schlug das Elektroskop bei Marke 0 durch, so wurde der Holzstab bis zur Marke 1 oder 2 zurückgezogen, bis ein Messen möglich war. Die Reductionsfactoren für die verschiedenen Stellungen des Tropfensammlers erwiesen sich sehr nahe umgekehrt proportional den Entfernungen des letzteren von der Hauswand.

In der folgenden Tabelle sind die gewonnenen Zahlen, auf eine bestimmte Stellung des Tropfensammlers einheitlich reducirt, nebst einigen der meteorologischen Elemente der Beobachtungstage zusammengestellt.

---

[1] F. Exner, Beobachtungen über atmosphärische Elektricität in den Tropen, II. Wien. Ber., XCIX, Abth. II. a., S. 601, Juli-Heft, 1890.

Datum	Mittlere Temperatur + °C.	Mittl. relative Feuchtigkeit Haarhygrom.	Mittlere Bewölkung	Mittlerer Dampfdruck [1]	5 *a.*	6 *a.*	7 *a.*	8 *a.*	9 *a.*	10 *a.*	11 *a.*	12 Mittag	1 *p.*	2 *p.*	3 *p.*	4 *p.*	5 *p.*	6 *p.*	7 *p.*	7 *p.*	9 *p.*	Stundenmittel
16/7	4·9	66%	3·0	4·8						203	204	205	230	241	gewitterig							217
17/7	5·5	84	3·3	6·2	187	202	244	211	206	244	234	244	247	230	bewölkt		224	220	244	208	230	225
18/7	4·7	85	5·0	5·8	—	197	224	224	242	244	256	192	214	202	gewitterig							222
Mittel:	5·0	78%	3·8	5·6	187	200	234	218	223	230	231	214	230	224			224	220	244	208	230	Tagesmittel: 221
															Anzahl der Beobachtungen = 29.							

Zeichen stets +.

Dieses — allerdings sehr spärliche Beobachtungsmaterial — scheint für den Sonnblickgipfel im Juli auf eine nur geringe Variaton des Potentialgefälles hinzudeuten.[2]

[1] Psychrometrisch bestimmt.

[2] Am 18. und 19. September des Jahres 1887 hat F. Exner ähnliche Messungen auf dem Schafberg (1780 *m*) bei St. Gilgen angestellt. Auch hier zeigte sich der Verlauf des Potentialgefälles nahezu constant. Die gleichzeitig in St. Gilgen beobachteten Morgen- und Abendmaxima fehlten dort. Vergl. hierüber: F. Exner, Weitere Beobachtungen über atmosphärische Elektricität. Wien. Ber., XCVII., Abth. II. a., S. 299, März 1888.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass an wolkenlosen Tagen das Potentialgefälle auf dem Sonnblick selbst im Juli ein derartig hohes ist, dass das Exner'sche Elektroskop auch bei Anwendung der Peltier'schen Methode der Potentialbestimmung durchaus zuverlässige Werthe gibt.

Da dieses Verfahren von Wind und actinischer Wirkung des Lichtes ganz unabhängig ist, so dürfte es ohne Frage diejenige Methode sein, welche für elektrisch exponirt gelegene Stationen einzig in Anwendung gebracht werden sollte.

Aus diesem Grunde haben wir auch einen beweglichen isolirten Conductor auf dem Sonnblickobservatorium zurückgelassen.

Da wir unsere Messungen einmal mit dem Wassertropfencollector begonnen hatten, so wollten wir die luftelektrischen Bestimmungen auch einheitlich zu Ende führen und die Gleichartigkeit der Resultate nicht durch Überspringen zu einer anderen Methode trüben.

§. 4.

Elmsfeuer-Beobachtungen.

Es ist vor Kurzem von Herrn v. Obermayer[1] eine systematische Beobachtung von Elmsfeuern gefordert worden, um den ursächlichen Zusammenhang zwischen Elmsfeuern und den atmosphärischen Niederschlägen klarzustellen. Die von ihm empfohlene Methode, das Zeichen der ausströmenden Elektricität aus der Form der Büschel zu bestimmen, lässt im Stich, wenn Elmsfeuer am Tage auftreten. Wir benutzten desshalb zur Zeichenbestimmung ein Bohnenberger'sches Elektroskop, das wir zu dem Zwecke mit uns führten. Bei unserer Abreise haben wir es auf der Station zurückgelassen. Stellte sich das charakteristische Rauschen an den Blitzableitern und der Fahnenstange des Stationsgebäudes ein, so wurde ein etwa 20 *cm* breiter, kreisrunder Elektrophordeckel so in das geöffnete Fensterchen unseres Beobachtungsraumes hineingehalten, dass seine Vorderfläche mit der Ebene des Fensters abschloss. Alsdann wurde er einen Moment zur Erde abgeleitet und nun mit dem Knopf des Bohnen-

[1] v. Obermayer, Über die bei Beschreibung von Elmsfeuern nothwendigen Angaben. Meteorolog. Zeitschr., 5, S. 324, August 1888.

berger'schen Elektroskopes in Berührung gebracht. Bei diesem Verfahren besitzt, wie leicht ersichtlich, der in das Zimmer hineingeführte Elektrophordeckel stets eine der ausströmenden Elektricität gleichnamige Ladung. Hielt man während lebhaften Elmsfeuers den Deckel etwa auf Armeslänge zum Fenster hinaus, berührte ableitend und nahm ihn dann in das Zimmer zurück, so liessen sich ihm Fünkchen von 2—3 *mm* Länge entziehen.

Elmsfeuer, sowohl positive wie negative, von zum Theil stundenlanger Dauer wurden in den Nachmittags- und Abendstunden des 16., 18. und 20. Juli beobachtet, während meistens gleichzeitig im Thale Gewitter niedergingen.

Am schönsten war die Erscheinung ausgebildet am 18. Juli.[1] Bald nach 7^h *p.* stellte sich lebhaftes Nebeltreiben ein, während dessen das vorher noch positive Potentialgefälle auf Null herabsank. Um $8^1/_2$ *p.* trat Schneetreiben auf, indem zugleich das Potentialgefälle negative Werthe annahm. Bald darauf entwickelte sich lebhaftes positives Elmsfeuer, das nach einem heftigen Blitze von bläulicher Farbe sein Zeichen wechselte, um bald darauf wieder in positives überzugehen. Das Elmsfeuer wurde bis gegen 11 *p.* beobachtet; wahrscheinlich hat es die ganze Nacht gedauert, da die sonstige elektrische Thätigkeit erst circa 5 *a.* erlosch.

Am 20. Juli führten wir nach der oben angegebenen Methode eine systematische Zeichenbestimmung der ausströmenden Elektricität während des durchaus gewitterigen Nachmittages durch. Am Morgen des 20. Juli herrschte positives Potentialgefälle, das während spärlichen Schneefalles langsam auf Null herunterging und von 1 *p.* bis 3 *p.* auf diesem Werthe beharrte. Erst $3^h\,45^m$ zeigte sich die Luftelektricität plötzlich stark positiv, während zugleich negatives Elmsfeuer einsetzte, das ohne Unterbrechung bis $4^h\,40^m$ andauerte. Von $3^3/_4$ bis $7^1/_4{}^h$ fielen reichliche Mengen staubigen Schnees. Um $4^h\,45^m$ wechselte die Luftelektricität und mit ihr das Elmsfeuer das Zeichen; $5^h\,20^m$ wurde ein abermaliger Zeichenwechsel notirt, so dass also von $5^h\,20^m$ bis $5^h\,40^m$ wieder

[1] Die elektrischen Ausströmungen und die damit verknüpften Lichterscheinungen dürften an diesem Tage den von Herrn Trabert (Meteorol. Zeitschrift, VI, S. 342, September 1889) am 2. August des Jahres 1889 beobachteten an Intensität etwa gleichgekommen sein

negatives Elmsfeuer herrschte, das $5^h\ 41^m$ erlosch, um $5^h\ 42^m$ wieder als positives aufzutreten. Dann blieb es positiv bis $6^h\ 30^m$, verschwand dann auf fünf Minuten, um $6^h\ 35^m$ als negatives wieder zu erscheinen. Letzteres erlosch $7^h\ 15^m$, in welchem Zeitpunkte die elektrische Thätigkeit für diesen Tag ihr Ende fand.

In der Zeit von $3^3/_4$ bis $7^1/_4$ ist also zweimal positives, dreimal negatives Elmsfeuer beobachtet worden.

Nach den Berichten über das Auftreten derselben Gewitter in Kolm-Saigurn scheint es, dass der eigentliche Herd der Elektricitätsentwicklung unter der Sonnblickspitze gelegen hat; die Blitzentladungen waren im Allgemeinen seltener und von geringerer Intensität als in der Fussstation. Schon durch Herrn Trabert[1] ist die Wahrnehmung des Beobachters Peter Lechner bestätigt, dass nach bläulichem Blitze negatives, nach röthlichem positives Elmsfeuer eintritt. Auch während der Gewitter, die wir oben beobachteten, konnten wir dies Zusammentreffen constatiren. Dabei hatten wir den Eindruck, dass diese Blitze die Felsen des Nordabsturzes trafen. Es würde sich demnach ein merkwürdiger Unterschied in der Farbe der Blitze ergeben, je nachdem der Erdboden die Anode oder Kathode der elektrischen Entladung bildet.

§. 5.

Zusammenstellung der Ergebnisse.

Aus unseren Versuchen und Beobachtungen am Hohen Sonnblick haben wir demnach folgende Ergebnisse zu verzeichnen:

1. Die Intensität der brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes, gemessen durch ihre entladende Wirkung auf negativ elektrisirte Flächen amalgamirten Zinks erfährt mit der Erhebung über die Erdoberfläche eine Steigerung derart, dass sie in einer Meereshöhe von 3100 *m* bereits doppelt so stark ist als im Tieflande.

2. Trotz dieser Zunahme der entladenden Kraft des Lichtes gelang es nicht, neue actinoelektrisch wirksame Substanzen mit Sicherheit aufzufinden; auch ganz reiner, frisch gefallener Schnee,

[1] Trabert, l. c.

sowie trockenes, dem Sonnblickgrat entnommenes Gestein wurden durch das Licht nicht merklich entladen.

3. Wasserfälle sind im Stande, in einem Thalbecken negatives Potentialgefälle zu erzeugen, und zwar bis zu sehr beträchtlichen Höhen (500 *m*) hinauf.

(Muthmasslich wird diese auffallende Erscheinung nicht durch Reibungsvorgänge, sondern durch Influenz des normalen positiven Potentialgefälles auf den sich von grösseren Wassermassen abtrennenden feinen Wasserstaub hervorgebracht. Dabei ist vielleicht die Annahme zulässig, dass — ähnlich wie wir es bei einer regnenden Wolke voraussetzen — der Process der Selbstinfluenz die anfänglich schwachen negativen Ladungen einer am Fusse des Falles lagernden Staubluftschicht zu höheren Werthen steigert.)

4. Im Juli dieses Jahres war an dreien bis 1 *p.* nahezu wolkenlosen Tagen das normale positive Potentialgefälle auf dem Sonnblickgipfel merklich constant. Das in der Ebene und in den Alpenthälern mit grosser Regelmässigkeit zwischen 7 *a.* und 9 *a.* auftretende Morgenmaximum wurde in 3100 *m* Höhe nicht beobachtet.

5. Vor dem Ausbruche der von uns am 16., 18. und 20. Juli beobachteten Gewitter sank innerhalb der schon spärliche Niederschläge entsendenden Wolke das positive Potentialgefälle gegen die Erde langsam bis zum Werthe Null herab, auf dem es dann lange Zeit — bisweilen zwei bis drei Stunden — bis zur definitiven Auslösung des elektrischen Processes in der Wolke beharrte.

6. In den Gewitterwolken wechselt die Luftelektricität meist nach vorausgegangener Blitzentladung ihr Vorzeichen, wie bei Gewittern im Tieflande.

7. Die Elmsfeuer charakterisirten sich als constant auftretende Begleiterscheinungen der Gewitter; dabei war negatives Elmsfeuer nicht seltener als positives.[1]

8. Die Wahrnehmung des Beobachters, dass auf bläulichen Blitz negatives, auf röthlichen positives Elmsfeuer auftritt, wurde

---

[1] Auf den Zusammenhang zwischen der Natur der Niederschläge und dem Zeichen der Elmsfeuer hoffen wir später — gestützt auf ein reichhaltigeres Beobachtungsmaterial — zurückkommen zu können.

mehrfach auch von uns bestätigt. Die Richtung des die Atmosphäre als Blitzentladung durchsetzenden elektrischen Stromes scheint demnach auf die Färbung der Blitze von Einfluss zu sein.

Schliesslich dürfen wir nicht unterlassen, mit Dank das Interesse hervorzuheben, welches sowohl der (leider inzwischen verstorbene) Herr Rojacher, wie auch der Beobachter Peter Lechner unserem Unternehmen zu jeder Stunde entgegengebracht haben.

Über die Abhängigkeit des specifischen Volumens gesättigter Dämpfe von dem specifischen Volumen der zugehörigen Flüssigkeiten und der Temperatur

von

Dr. **Gustav Jäger.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. December 1890.)

Die Grundgleichung der Hydrostatik lässt sich schreiben

$$vdp = Sds,$$

wenn v das specifische Volumen, p der Druck, S die Kraft, welche auf die Masseneinheit Flüssigkeit wirkt, und s der Weg ist, auf welchem die Kraft wirksam ist.[1] Sds ist dann die Arbeit, welche bei der Verschiebung der Masseneinheit Flüssigkeit um den Weg ds die Kraft leistet. Ist das Gesetz der Abhängigkeit zwischen v und p bekannt, so lässt sich dp als Function von v ausdrücken, und die Gleichung ist integrirbar. Es ergibt sich dann

$$\int_{v_1}^{v_2} vdp = A;$$

hiebei ist A die Arbeit, welche von den wirkenden Kräften geleistet wird, wenn man die Masseneinheit Flüssigkeit von einer Stelle der Flüssigkeit vom specifischen Volumen v_1 zu einer anderen vom specifischen Volumen v_2 überführt. Diese Gleichung erleidet an ihrer Richtigkeit keine Einbusse, wenn man sie auch auf den Dampf der Flüssigkeit ausdehnt, da ja die Grundgleichung der Statik für den flüssigen und gasförmigen Aggregatzustand dieselbe ist. Es sei daher in unserer Gleichung

---

[1] S. J. Stefan, Wied. Ann. XXIX, S. 658.

v_2 speciell das specifische Volumen der Flüssigkeit unter dem äusseren Drucke des gesättigten Dampfes, dessen specifisches Volumen v_1 sein soll. A ist dann jene Arbeit, welche bei der Überführung der Masseneinheitflüssigkeit in die Gasform zur Überwindung der Capillarkräfte geleistet werden muss. Wir erhalten somit

$$\int_{v_1}^{v_2} v dp = \frac{a}{m}, \qquad 1)$$

wenn die bewusste Arbeit, welche die Molekel von der Masse m leisten muss, gleich a ist.

Um zu einer Beziehung zwischen v_1 und v_2 zu gelangen, brauchen wir nur noch den Zusammenhang zwischen v und p zu kennen. Nach der kinetischen Gastheorie ist

$$p(v-b) = \frac{Nmc^2}{3}, \qquad 2)$$

wenn b der von den Wirkungssphären der Molekeln ausgefüllte Raum, N die Anzahl der Molekeln und c deren mittlere Geschwindigkeit ist.[1] Diese Formel gilt aber nur für den Fall, als man die Zeit, welche bei der Berührung zweier Molekeln verfliesst, als verschwindend klein gegen jene Zeit betrachtet, welche zwischen zwei Zusammenstössen verfliesst. Wollen wir daher obige Formel auch auf Flüssigkeiten anwenden, so haben wir diesen Umstand mit zu berücksichtigen. Der Erfolg ist der, dass die mittlere Geschwindigkeit c umso kleiner erscheint, je mehr Zusammenstösse in der Zeiteinheit eine Molekel erfährt. Die Zahl der Zusammenstösse ist sowohl von der Temperatur als vom specifischen Volumen der Flüssigkeit abhängig. Insofern wir nur kleine äussere Drucke in Betracht ziehen, können wir wegen des überaus kleinen Compressionscoëfficienten der Flüssigkeiten das specifische Volumen als Function der Temperatur darstellen, mithin kann für diesen Fall die Geschwindigkeit c als Function des specifischen Volumens allein ausgedrückt werden. In erster Annäherung können wir aber die Abhängigkeit zweier Veränderlichen dadurch kennzeichnen, dass wir die eine

---

[1] Siehe Wüllner, Experimentalphysik, 1882. I., S. 454.

als lineare Function der anderen, oder des reciproken Werthes der anderen ansehen. Wir gestatten uns daher

$$c^2 = c'^2\left(1 + \frac{\beta}{v}\right)$$

zu setzen. Es ist zu bemerken, dass wir durch diese Gleichung bloss die Verzögerung beim Zusammenstosse der Molekeln in Rechnung ziehen wollen. Was den Einfluss der Temperatur auf die Änderung der lebendigen Kräfte in der Flüssigkeit betrifft, so drücken wir denselben in der gewöhnlichen Weise aus, indem wir $c'^2 = c_0^2(1+\alpha t)$ setzen, woraus

$$c^2 = c_0^2(1+\alpha t)\left(1 + \frac{\beta}{v}\right) \tag{3}$$

folgt. Zur Formulirung des Einflusses des Volumens auf die Geschwindigkeit wurde deshalb der reciproke Werth von v gewählt, weil dieser Einfluss mit wachsendem Volumen immer geringer wird, so dass man ihn für den gasförmigen Zustand bei geringem Drucke in der Regel ganz vernachlässigt.

Wir wollen in Folgendem unsere Rechnungen immer auf die Masseneinheit Flüssigkeit beziehen. Es wird also $Nm = 1$, und wir erhalten aus den Gleichungen 2) und 3)

$$\frac{c_0^2(1+\alpha t)\left(1 + \frac{\beta}{v}\right)}{3(v-b)} = p.$$

Hier ist p die Summe aus dem äusseren und dem im Verhältnisse zu diesem gewöhnlich überaus grossen inneren Drucke. Differenzirt gibt die Gleichung

$$dp = -\frac{c_0^2(1+\alpha t)}{3}\left[\frac{\beta}{v^2(v-b)} + \frac{v+\beta}{v(v-b)^2}\right] dv,$$

und

$$v dp = -\frac{c_0^2(1+\alpha t)}{3}\left[\frac{\beta}{v(v-b)} + \frac{v+\beta}{(v-b)^2}\right] dv.$$

Durch Integration und Zuziehung der Gleichung 1) erhalten wir schliesslich

$$\int_{v_1}^{v_2} v dp = \frac{c_0^2(1+\alpha t)}{3}\left[\frac{\beta}{b} l \frac{v_2(v_1-b)}{(v_2-b)v_1} - l\frac{v_2-b}{v_1-b} + \right.$$
$$\left. + (\beta+b)\left(\frac{1}{v_2-b} - \frac{1}{v_1-b}\right)\right] = \frac{a_0(1-\varepsilon t)}{m},$$

wenn wir $a = a_0(1-\varepsilon t)$ setzen, wobei ε der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten ist. v_1 ist sowohl gegen v_2 als auch gegen b sehr gross, wir können daher b gegen v_1, desgleichen $\frac{1}{v_1-b}$ gegen $\frac{1}{v_2-b}$ vernachlässigen. Wir erhalten so nach leicht übersehbarer Reduction

$$\frac{c_0^2(1+\alpha t)}{3}\left(\frac{\beta+b}{v_2-b} + \frac{\beta+b}{b} l \frac{v_2}{v_2-b} + l\frac{v_1}{v_2}\right) = \frac{a_0(1-\varepsilon t)}{m}.$$

Setzen wir noch $\beta+b = \gamma, \frac{3a_0}{mc_0^2} = \delta$, so

$$\frac{\gamma}{v_2-b} + \frac{\gamma}{b} l \frac{v_2}{v_2-b} + l\frac{v_1}{v_2} = \delta\frac{1-\varepsilon t}{1+\alpha t}. \qquad 4)$$

Sind v_2 und v_1 für drei verschiedene t bekannt, so lassen sich daraus die Constanten b, γ und δ berechnen, und es kann dann die Gleichung dazu dienen, aus dem bekannten specifischen Volumen der Flüssigkeit für beliebige Temperaturen das zugehörige specifische Volumen des gesättigten Dampfes zu berechnen.

Die Gleichung 4) wurde am Wasser und Äther auf ihre Richtigkeit geprüft, und es war, wie aus dem Folgenden zu ersehen ist, das Resultat ein sehr günstiges. Da das Material der directen Beobachtungen der Dichten gesättigter Dämpfe ziemlich lückenhaft ist, und die Angaben der verschiedenen Beobachter beträchtlich von einander abweichen, so zog ich es vor, jene Werthe zu benützen, welche Winkelmann[1] nach der Formel

$$r = uAT\frac{dp}{dt} \qquad 5)$$

berechnet hat. Hiebei ist r die Verdampfungswärme, u das specifische Volumen des Dampfes, A das calorische Äquivalent der Arbeit, T die absolute Temperatur und p der Dampfdruck.

---

[1] Wied. Ann., IX. S. 237 u. 364.

Winkelmann gibt für die auf 0° und den Druck einer Atmosphäre reducirten Dichten d_n des gesättigten Dampfes bei verschiedenen Temperaturen folgende Werthe an:

Wasser		Äther	
t	d_n	t	d_n
+ 3·61	0·6234	—13·86	2·562
13·95	0·6234	+ 0·50	2·562
25·14	0·6237	16·70	2·562
37·31	0·6251	34·96	2·596
50·64	0·6272	55·87	2·634
65·36	0·6302		
81·71	0·6350		
100	0·6425		

Selbstverständlich sind die d_n auf die Dichte der Luft gleich Eins bezogen. Die Dichte der letzteren setzte ich gleich 0·001293. Aus obigen Werthen der Dampfdichte bestimmte ich durch lineare Interpolation die Dichten des Wasserdampfes bei 10°, 20°..100°, des Ätherdampfes bei 0°, 5°...50° und berechnete daraus mit Hilfe des Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetzes die specifischen Volumina. Die dazu nöthigen Dampfspannungen entnahm ich für Wasser der Tabelle von Broch,[1] für Äther den Angaben von Regnault.[2] Die specifischen Volumina der Flüssigkeiten schliesslich entstammen für Wasser den Berechnungen von Rosetti,[3] für Äther wurden sie nach einer Formel von der Form

$$v_t = v_0(1+at+bt^2+ct^3+dt^4)$$

berechnet, wobei nach Hirn[4]

$$a = 0·001349, \qquad b = 0·000006554,$$
$$c = -0·00000003449, \quad d = 0·0000000003377,$$

und für die Dichte des Äthers bei 0° 0·7366 gesetzt wurde. Der Temperaturcoëfficient der Capillaritätsconstanten des Wassers ist 0·00230[5]. Für Äther berechnete ich ihn aus Brunner's An-

---

[1] Ostwald, Allg. Chemie, I., S. 280.

[2] Wüllner, Experimentalphysik, III (1885), S. 691.

[3] Ebenda, S. 77.

[4] Ebenda. S. 84.

[5] Ostwald, Allg. Chemie, I., S. 486.

gaben.[1] Danach ist die Steighöhe des Äthers in einer Capillarröhre von 1 *mm* Radius

$$h = 5\cdot354 - 0\cdot02810\, t,$$

worin t die Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers bedeutet. Der Zusammenhang der Steighöhe h und der Capillaritätsconstanten a ist durch die Formel

$$h + \frac{r}{3} = \frac{2a}{\rho g r}$$

gegeben, wenn r der Radius des Rohres, ρ die Dichte der Flüssigkeit und g die Beschleunigung der Schwere ist. Indem ich die beiden letzten Formeln für $t = 0°$ und $50°$ anwandte, fand ich für den Temperaturcoëfficienten des a den Werth

$$\varepsilon = 0\cdot00580.$$

Beim Wasser ging ich unter 10° nicht herab, weil in der Nähe des Gefrierpunktes die Constitution der Flüssigkeit schwerlich derjenigen in höheren Temperaturen gleicht. Beim Äther musste ich mich innerhalb der Grenzen 0° und 50° halten, weil mir nur für dieses Intervall das nöthige Beobachtungsmaterial zur Verfügung stand.

Aus den Werthen von v_1 und v_2 bei 10°, 60° und 100° für Wasser, bei 0°, 25° und 50° für Äther, berechneten sich die drei Constanten der Gleichung 4), wie folgt:

	b	γ	δ
Wasser	0·9703	0·07736	15·33
Äther	1·171	—0·9475	0·144.

Diese Constanten wurden nun zur Berechnung der log v_1 von 10 zu 10°, beziehungsweise 5 zu 5° benützt, wie aus den folgenden Tabellen ersichtlich ist. In denselben bedeutet log v_1(1) die aus der Gleichung 5), log v_1(2) die nach Gleichung 4) berechneten Werthe der Logarithmen der specifischen Dampfvolumina. Die Dampfspannungen p sind in Millimetern Quecksilbersäule angegeben.

[1] Wüllner, Experimentalphysik, I. (1882), S. 340.

Wasser:

t	v_2	d_n	p	$\log v_1(1)$	$\log v_1(2)$
10°	1·0002	0·6234	9·140	5·029	5·030
20	1·0017	0·6235	17·36	4·765	4·715
30	1·0043	0·6243	31·51	4·521	4·481
40	1·0077	0·6255	54·87	4·293	4·263
50	1.0120	0·6271	91·98	4·081	4·070
60	1·0169	0·6291	148·9	3·884	3·884
70	1·0226	0·6316	233·3	3·700	3·711
80	1·0289	0·6345	354·9	3·528	3·541
90	1·0357	0·6384	525·5	3·367	3·376
100	1·0431	0·6425	760	3·216	3·217

Äther:

t	v_2	d_n	p	$\log v_1(1)$	$\log v_1(2)$
0°	1·3576	2·562	183·3	3·098	3·098
5	1·3645	2·562	230·1	3·006	3·007
10	1·3717	2·562	286·4	2·919	2·919
15	1·3792	2·562	353·6	2·835	2·835
20	1·3870	2·568	433·3	2·753	2·752
25	1·3950	2·577	526·9	2·675	2·674
30	1·4033	2·587	636·3	2·598	2·596
35	1·4119	2·596	763·3	2·525	2·523
40	1·4207	2·605	909·6	2·454	2·453
45	1·4299	2·614	1077	2·386	2·385
50	1·4393	2·623	1271	2·319	2·319

Die Übereinstimmung der nach beiden Methoden berechneten $\log v_1$ ist eine sehr gute zu nennen. Es betragen die grössten Unterschiede bei Wasser etwa ein Procent, bei Äther noch nicht ein Promille. Wir schliessen daraus, dass beim Wasser in flüssiger Form innerhalb der obigen Grenzen die Verzögerung der Geschwindigkeit der Molekeln, welche durch die Zusammenstösse derselben herbeigeführt wird, angenähert, beim Äther jedoch vollständig durch eine lineare Function der Dichte der Flüssigkeit ausgedrückt werden kann.

Man könnte nun einwenden, dass sich vielleicht noch manche Theorie ausfindig machen liesse, die mit Hilfe von drei willkürlichen Constanten eine angenähert richtige Beziehung zwischen Dampfdichte und Flüssigkeitsdichte ergibt. Das hiesse aber den Zweck obiger Arbeit gänzlich verkennen; denn es handelte sich

mir durchaus nicht darum, überhaupt die bewusste Beziehung aufzufinden, sondern ich wollte lediglich zeigen, dass auch diese Folgerung aus der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, wie sie in ihren Grundzügen Clausius bereits im Jahre 1857[1] entwickelt hat, nirgends mit den Thatsachen im Widerspruche steht.

---

[1] Pogg. Ann. C.

Eine neue magnetische Aufnahme Österreichs

(II. vorläufiger Bericht)

von

J. Liznar.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. December 1890.)

Im Sommer dieses Jahres (1890), und zwar vom 16. Juni bis 21. September, wurden Messungen der erdmagnetischen Elemente an 5 Stationen in Böhmen, an 6 Stationen in Mähren, an 2 Stationen in Schlesien, in Krakau, an 2 Stationen in Niederösterreich, an 3 Stationen in Oberösterreich und an 3 Stationen in Salzburg vorgenommen. Leider war die Witterung auch in diesem Sommer grösstentheils ungünstig, wodurch der Fortgang der Messungen sehr beeinflusst wurde.

Die zu den Beobachtungen verwendeten Instrumente habe ich in meinem ersten Berichte[1] bereits angeführt und darin auch hervorgehoben, dass ich zum Schutze gegen die Witterung bei den magnetischen Messungen eine zerlegbare Holzhütte anfertigen liess, die mir auch bei meinen diesjährigen Messungen vorzügliche Dienste leistete, da ich ohne dieselbe bei dem meist windigen Wetter entweder gar keine oder höchst unsichere Messungen hätte vornehmen können. An der Station Lundenburg war ich in grosser Gefahr, die Hütte zu verlieren, wodurch ein unliebsamer Aufenthalt von einigen Tagen verbunden gewesen wäre. Am 14. August, circa 7^h p. m., trat nämlich, kaum dass die Hütte nach Vollendung der astronomischen Messungen aufgestellt war, plötzlich ein sehr heftiger Gewittersturm ein, der gerade an dem Beobachtungspunkte derart wüthete, dass in der unmittelbaren Nähe desselben viele alte und starke Bäume (24 *m* hoch, 0·8 *m* dick)

[1] Diese Berichte, Bd. XCVIII, Abth. II. a., 1889.

von dem Sturme umgeworfen wurden. Als ich nach circa $1^1/_2$ Stunden seit der Aufstellung an die Stelle kam, wo meine Hütte stand, sah ich die Verwüstung, war aber angenehm überrascht, meine Hütte zwar umgeworfen, jedoch an der Stelle zu finden, wo sie zusammengestellt worden war. Selbstverständlich mussten am folgenden Tage vor Aufstellung derselben einige nothwendige Reparaturen ausgeführt werden, die aber nur einen Aufenthalt von einem Tage und eine kleine Geldausgabe zur Folge hatten.

Das durch einige Tage anhaltende Regenwetter zu Ende August und Anfang September zwang mich zu einem längeren Aufenthalte in der Station Schärding, da es mir bei dem stets trüben Himmel unmöglich war, die Zeit- und die Azimutalmessungen auszuführen.

Beim Aufsuchen der Beobachtungspunkte an den einzelnen Stationen habe ich mich von den in meinem ersten Berichte aufgestellten Grundsätzen leiten lassen, da es nur an einigen wenigen Orten möglich war, dieselben Punkte zu benützen, an welchen Kreil seine Messungen vorgenommen hatte.

Während des oben angeführten Zeitraumes habe ich 37 Zeit-, 35 Azimutal-, 103 Declinations-, 210 Intensitäts- und 210 Inclinationsmessungen ausgeführt. Zu jeder Declinationsbestimmung gehören 14 Einstellungen nebst den zur Bestimmung der Torsionsconstante nöthigen Messungen; bei der Intensitätsmessung wurde jedesmal die Schwingungsdauer und der Ablenkungswinkel gemessen. Die Reiseinstrumente wurden vor und nach der Reise mit den zu den regelmässigen Beobachtungen an der k.k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus verwendeten sorgfältig verglichen. In Brünn und Příbram habe ich keine Zeit- und Azimutalmessungen vorgenommen, da am ersteren Orte das Wetter ungünstig war, und ich vom Herrn Regierungsrathe Prof. v. Niessl die Zusage erhielt, dass er die Güte haben werde, das Azimut der gewählten Mire nachträglich zu bestimmen. Ich habe den Aufstellungspunkt (am gelben Berge) durch einen Holzpflock markiren lassen, und da die Mire (Thurmspitze von Turas) weit entfernt ist, konnte aus einer nachträglichen Bestimmung auf ein vollkommen verlässliches Resultat gerechnet werden. Herr Regierungsrath v. Niessl hat die zugesagte Messung ausgeführt und mir durch seine freundliche Unterstützung einen grossen

Dienst erwiesen, wofür ich ihm hier meinen herzlichsten Dank ausspreche. In Příbram konnte die Azimutalmessung entfallen (sie wäre auch nicht möglich gewesen, da das Wetter trüb war), weil hier die Richtung des Meridians aus früheren Messungen des Herrn Oberstlieutenants v. Sterneck bekannt ist, und ich diese Richtung nur auf meinen Aufstellungspunkt zu übertragen brauchte. Die nöthigen Daten, sowie auch anderweitige Unterstützung erhielt ich von Seite des Herrn Obermarkscheiders Schmid, der auch mit Erlaubniss der k. k. Bergdirection auf dem von mir gewählten Beobachtungspunkte einen Steinpfeiler aufführen liess, über dem ich meine Holzhütte aufstellte. Auch diesem Herrn sei für seine freundliche Unterstützung mein wärmster Dank ausgesprochen. Bei der Ausführung meiner schwierigen Aufgabe wurde ich von Seite der Bahnverwaltungen, insbesondere der Generaldirection der k. k. Staatsbahnen, der Gemeindebehörden, sowie von Corporationen und einzelnen Personen vielfach unterstützt, wodurch ich mich zu grossem Danke verpflichtet fühle.

In der nachfolgenden Tabelle I gebe ich eine Zusammenstellung der Beobachtungsorte mit ihren geographischen Coordinaten, und zwar in derselben Reihenfolge, wie sie besucht worden sind. Die Länge und Breite der Beobachtungspunkte wurde den Messtischblättern des k. und k. Militär-geographischen Institutes möglichst genau entnommen. Ich habe, um hiebei grössere Fehler zu vermeiden, von jeder Station nach den erwähnten Messtischblättern eine Skizze auf Pauspapier zeichnen lassen und in diese den Beobachtungspunkt sorgfältig eingetragen. Nach meiner Rückkehr nach Wien sind diese Skizzen auf das betreffende Blatt gelegt worden, um die Coordinaten des Punktes abmessen zu können. Ich bin überzeugt, dass die dadurch erzielte Genauigkeit mehr als hinreichend ist, jedenfalls wenigstens ebenso gross, als sie durch Reisebeobachtungen erzielt werden könnte, selbst wenn man ein vorzügliches Instrument zur Verfügung hätte.

Die erwähnten Skizzen werden den Originalbeobachtungen beigelegt, die in der Bibliothek der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus zur Aufbewahrung gelangen werden, so dass in späterer Zeit meine Beobachtungspunkte mit grosser Sicherheit zu finden sein werden, selbst wenn ihre

Umgebung bedeutende Veränderungen erlitten haben sollte. Dies ist nach meiner Ansicht ein besseres Mittel, den Beobachtungspunkt kenntlich zu machen, als jede noch so genaue Beschreibung, da ein Blick auf die Skizze genügt, um eine vollkommene Orientirung über die Lage des Punktes zu erlangen.

In Přibram und Göding hat Kreil keine Messungen ausgeführt. Ich habe den ersteren Ort desshalb in das Stationsnetz einbezogen, weil mir westlich von Prag eine Beobachtungsstation wünschenswerth erschien und weil hier von Seite der k. k. Bergdirection seit einigen Jahren magnetische Variationsapparate aufgestellt worden sind und auch zeitweise absolute Messungen ausgeführt werden. Göding habe ich gewählt, weil hier seinerzeit Schenzl beobachtet hatte.

I. Geographische Coordinaten der magnetischen Stationen (der Beobachtungspunkte).

Nr.	Station	φ	λ, E v. Gr.
1	Horn	48°39'36"	15°40' 4"
2	Gratzen	48 47 41	14 47 27
3	Budweis	48 58 34	14 27 47
4	Pilsen	49 45 36	13 22 46
5	Přibram........	49 41 44	13 59 37
6	Neuhaus	49 8 25	15 0 24
7	Iglau	49 23 36	15 35 1
8	Znaim	48 51 35	16 2 52
9	Brünn	49 11 48	16 35 22
10	Olmütz.........	49 36 1	17 15 15
11	Troppau	49 57 14	17 54 44
12	Teschen	49 44 32	18 38 37
13	Krakau	50 3 51	19 58 4
14	Göding	48 50 54	17 8 27
15	Lundenburg	48 45 36	16 52 48
16	Melk	48 13 50	15 20 5
17	Linz...........	48 18 2	14 16 52
18	Schärding......	48 27 29	13 26 22
19	Altheim	48 14 53	13 14 51
20	Salzburg.......	47 48 14	13 1 57
21	Golling	47 36 8	13 10 27
22	Radstadt.......	47 22 35	13 27 44

In den Tabellen II, III und IV sind die von mir im Jahre 1890 beobachteten Daten, sowie jene auf das Jahr 1850·0 reducirten Werthe Kreil's zusammengestellt. Die Declination und Intensität, unter der Überschrift *D* (1890), respective *H* (1890), ist auf das Monatsmittel des August 1890 reducirt, so dass die Daten der einzelnen Stationen unter einander streng vergleichbar sind; bei der Inclination, unter *J* (1890), konnte diese Reduction noch nicht ausgeführt werden. Um die Veröffentlichung dieses Berichtes nicht allzu lange hinausschieben zu müssen, habe ich mich entschlossen, die Inclinationswerthe so zu publiciren, wie sie die Beobachtung ergeben hat, da ja durch die Reduction die einzelnen Werthe nur wenig geändert werden. In jeder der drei Tabellen sind auch die Differenzen der Werthe von 1890 und 1850 angeführt. Dass diese Differenzen nicht für alle Orte constant sind, wird Niemanden überraschen, wenn berücksichtigt wird, dass die Unterschiede von der geographischen Lage der Stationen abhängen dürften, worauf ich erst später bei der ausführlichen Publication meiner Messungen näher eingehen werde. Einige besonders abweichende Werthe der Differenzen, so speciell bei Brünn, dürften von einem Localeinflusse bei den Messungen Kreil's herrühren, da diese Werthe auch in die von Kreil entworfenen magnetischen Karten absolut nicht hineinpassten. Manche Unregelmässigkeiten in den Differenzen werden nach einer Revision der Daten Kreil's ganz verschwinden, wie ich mich hievon bei einigen Stationen überzeugt habe.

In der Tabelle II sind auch die diesjährigen Declinationsmessungen von Pilsen aufgenommen worden, obwohl ein Werth dieses Elementes bereits in meinem vorjährigen Berichte enthalten war. Ich habe die Absicht gehabt, die Declinationsmessungen an den Stationen Pilsen und Plan heuer zu wiederholen; da aber zur Zeit meines Aufenthaltes in Pilsen das Wetter sehr schlecht war, wodurch ich gezwungen wurde, an dieser Station drei Tage zuzubringen, sah ich mich genöthigt, auf die Wiederholung der Messungen in Plan zu verzichten. Reducirt man den im Jahre 1889 in Pilsen beobachteten Werth der Declination auf das Monatsmittel des August 1890, so ergibt sich $D = 10°29'8$, während die Messungen dieses Jahres den Werth $D_1 = 10°28'6$ ergeben. Es muss bemerkt werden, dass in beiden Jahren an

derselben Stelle und ohne jede Schutzvorrichtung gegen den Wind, der die Einstellungen ziemlich erschwert hat, beobachtet worden ist. Der Unterschied von 1'·2 in den Werthen der Declination rührt übrigens nicht von der Unsicherheit in den Einstellungen auf den Magnetstab her, sondern zeigt sich in den Werthen des Azimutes. Im Vorjahre wurde das Azimut an einem sehr heissen und ruhigen Nachmittage, in diesem Jahre dagegen an einem kühlen und windigen Vormittage gemessen. Bei den diesjährigen Messungen konnte infolge des Windes, der das ganze Instrument in Schwankungen versetzte, der Durchgang des Sonnenrandes nicht ganz scharf beobachtet werden.

II. Declination.

Nr.	Station	D (1890)	D_1 (1850)	$D_1 - D$
1	Horn	9°16'3	13°39'9	4°23'6
2	Gratzen......	9 55·9	14 22·0	4 26·1
3	Budweis	10 5·1	—	—
4	Pilsen	10 28·6	—	—
5	Přibram......	10 11·2	—	—
6	Neuhaus	9 49·7	14 25·9	4 36·2
7	Iglau	9 29·1	13 56·3	4 27·2
8	Znaim	9 7·6	13 35·2	4 27·6
9	Brünn	8 54·3	13 50·4	4 56·1
10	Olmütz.......	8 44·3	13 5·6	4 21·3
11	Troppau	8 24·4	12 46·2	4 21·8
12	Teschen	8 0·5	12 34·0	4 23·5
13	Krakau	7 16·7	11 39·0	4 22·3
14	Göding	9 0·4	—	—
15	Lundenburg ..	8 58·2	13 11·3	4 13·1
16	Melk	9 44·3	13 56·6	4 12·3
17	Linz	10 12·7	14 42·5	4 29·8
18	Schärding	10 37·4	14 51·7	4 18·3
19	Altheim	10 37·5	14 52·5	4 15·0
20	Salzburg	10 51·5	15 16·6	4 25·1
21	Golling	10 42·1	12 0·1	4 18·0
22	Radstadt.....	10 35·1	14 52·0	4 16·9

III. Horizontale Intensität.

Nr.	Station	H (1890)[1]	H_1 (1850)	$H-H_1$
1	Horn	2·0349	1·9609	0·0740
2	Gratzen	2·0266	1·9340	0·0926
3	Budweis	2·0156	1·9396	0·0760
4	Přibram	1·9839	—	—
5	Neuhaus	2·0119	1·9272	0·0847
6	Iglau	2·0017	1·9322	0·0695
7	Znaim	2·0352	1·9636	0·0716
8	Brünn	2·0228	1·9309	0·0919
9	Olmütz	2·0010	1·9327	0·0683
10	Troppau	1·9972	1·9352	0·0620
11	Teschen	2·0126	1·9429	0·0697
12	Krakau	2·0055	1·9378	0·0677
13	Göding	2·0479	—	—
14	Lundenburg	2·0497	1·9742	0·0755
15	Melk	2·0491	1·9724	0·0767
16	Linz	2·0383	1·9622	0·0761
17	Schärding	2·0293	1·9439	0·0854
18	Altheim	2·0383	1·9489	0·0894
19	Salzburg	2·0484	1·9647	0·0837
20	Golling	2·0670	1.9801	0·0869
21	Radstadt	2·0810	1·9980	0·0830

IV. Inclination.

Nr.	Station	J (1890)	J_1 (1850)	J_1-J
1	Horn	63°42'	64°42'	1° 0'
2	Gratzen	63 57	64 55	0 58
3	Budweis	64 7	65 4	0 57
4	Přibram	64 37	—	—
5	Neuhaus	64 6	65 6	1 0
6	Iglau	64 18	65 17	0 59
7	Znaim	64 50	64 48	0 58

[1] Die hier angeführten Intensitätswerthe sind, wie dies bereits in meinem ersten Berichte (S. 6, resp. 1414) hervorgehoben worden ist, um circa 0·0040 G. E. zu klein.

Nr.	Station	J (1890)	J_1 (1850)	$J_1 - J$
8	Brünn	64°14'	65°14'	1° 0'
9	Olmütz.......	64 27	65 19	0 52
10	Troppau	64 35	65 21	0 46
11	Teschen	64 18	65 14	0 56
12	Krakau	64 28	65 22	0 54
13	Göding	63 42	—	—
14	Lundenburg ..	63 46	64 43	0 57
15	Melk	63 28	64 35	1 7
16	Linz.........	63 38	64 46	1 8
17	Schärding....	63 49	64 44	0 55
18	Altheim......	63 39	64 44	1 5
19	Salzburg	63 28	64 33	1 5
20	Golling	63 12	64 25	1 13
21	Radstadt.....	62 56	64 11	1 15

Über eine Consequenz der Poisson-Mosotti'schen Theorie

von

Dr. Gottlieb Adler,

Privatdocent an der k. k. Universität in Wien.

Poisson's Theorie der magnetischen Induction ergibt die Magnetisirungszahl k als in sehr einfacher Weise abhängig von dem Verhältnisse g des von den Molecülen magnetischer Substanz wirklich eingenommenen Raumes e zum Gesammtvolum v.

Es ist nämlich[1]

$$k = \frac{3g}{4\pi(1-g)}. \qquad 1)$$

wo

$$g = \frac{e}{v} \qquad \text{I.)}$$

ist.

Mosotti hat die Poisson'sche Theorie auf die diëlektrisch polarisirten Substanzen übertragen, indem er die Molecüle derselben als leitend und in einem nichtleitenden Äther gebettet voraussetzte. Mosotti findet durch wörtliche Übertragung der Poisson'schen Betrachtungen, bei gleichen Bedeutung der Grössen e, v und g, diese mit der Diëlektricitätsconstante K durch die Gleichung verknüpft

$$\frac{K-1}{4\pi} = k = \frac{3g}{4\pi(1-g)}. \qquad 1a)$$

---

[1] S. Wiedemann, Lehrb. d. Elektricität, Bd. II, S. 18. Maxwell, Lehrb. d. Elektricität, Bd. II, §. 430.

Da sich für Eisen das Verhältniss $g = \frac{134}{135}$ herausstellte, die Raumerfüllung durch die Molecüle als eine so vollständige sich ergab, wie sie unter Voraussetzung gleich grosser, kugelförmiger Molecüle gar nicht erreichbar ist, so sah sich Betti[1] veranlasst, die Poisson'sche Grundannahme in etwas zu modificiren und er wurde hiedurch für k zum Ausdrucke geführt

$$k = \frac{3g}{4\pi(1-3g)} \qquad 2)$$

aus welchem für Eisen speciell $g = \frac{134}{403}$ sich ergab; damit kam die ebenerwähnte, von Maxwell[2] zuerst hervorgehobene, Schwierigkeit in Wegfall.

Für die Beschreibung der Erscheinungen der magnetischen, beziehungsweise diëlektrischen Polarisation ist es, da diese auf die Grösse k selbst sich aufbaut, ganz irrelevant, ob man k durch die Ausdrücke 1, respective 2 definirt ansieht, oder schlechtweg als empirische Constante auffasst; wohl aber ist eine Entscheidung hierüber insoferne von Interesse, als Formel 1) von einigen Autoren zum Ausgangspunkte für die Bestimmung der Grösse der Molecüle aus ihrer Raumerfüllung g gemacht wurde.

Es ist nun vielleicht bemerkenswerth, dass, sowie man k nicht als empirische Constante, sondern als durch die Gleichungen 1, beziehungsweise 2 definirte Function von g auffasst, damit gleichzeitig über eine zweite durch Helmholtz[3] und Kirchhoff[4] eingeführte und zur Beschreibung der an magnetisch oder diëlektrisch polarisirten Körpern auftretenden Druckkräfte verwendete Constante

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v}$$

verfügt wird; k' ist bestimmt durch die Änderung, welche k durch eine allseitig gleichmässige Volumszunahme erfährt.

---

[1] Betti, Lehrb. der Potentialtheorie S. 377 und 378.

[2] S. Maxwell, Lehrb. der Elektricität und Magnetismus, Bd. II, §. 430. S. auch Mascart u. Joubert, Lehrb. der Elektricität, S. 147.

[3] S. Helmholtz, Wied. Ann.

[4] S. Kirchhoff, Wied. Ann., Bd. 25 und 26.

Es ist nämlich

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = \frac{\partial k}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial \log v}.$$

Nun folgt aber aus I):

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -\frac{e}{v^2},$$

somit

$$\frac{\partial g}{\partial \log v} = -\frac{e}{v} = -g$$

und sonach ergibt sich:

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = -g\frac{\partial k}{\partial g}.$$

Unter Zugrundelegung der Poisson'schen Formel 1) ergibt sich also

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = -k\left(1 + \frac{4\pi k}{3}\right) \tag{2}$$

unter Zugrundelegung der Betti'schen Formel 2)

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log x} = -k(1+4\pi k). \tag{4}$$

Beide Formeln 3) und 4) ergeben für die Magnetisirungszahl k, beziehungsweise die Diëlektricitätsconstante $K = 1+4\pi k$, eine Abnahme bei gleichmässiger Volumzunahme.

Beide ergeben für sehr schwach magnetisch, respective diëlektrisch polarisirbare Substanzen, bis auf Glieder höherer Ordnung

$$k' = \frac{\partial k}{\partial \log v} = -k; \tag{5}$$

sonst k' als quadratische Function von k, also in der Grössenordnung übereinstimmend.

An der Hand experimenteller Ergebnisse über die Abhängigkeit des k von der Volumzunahme ist also eine Entscheidung darüber möglich, ob und inwieweit Poisson's, beziehungsweise Betti's Formel mit den Thatsachen in Einklang steht.

Directe Versuchsergebnisse nach dieser Richtung liegen nur rücksichtlich der Gase vor.

Die durch Boltzmann[1] für dieselben geführten Messungen haben zunächst ergeben, dass ihre Diëlektricitätsconstante mit dem Druck in linearer Weise zunimmt. Macht man mit Boltzmann die weitere Annnahme, „dass die Proportionalität des Zuwachses der Diëlectricitätsconstante mit dem Druckzuwachse bis zur absoluten Evacuirung giltig sei", dann lassen seine Versuchsergebnisse in die zwei von ihm aufgestellten Formeln sich fassen, von denen die erste die Diëlektricitätsconstante für den Normaldruck einer Atmosphäre

$$K_1 = 1+\lambda \tag{6a}$$

ergibt, während die andere ihre Abhängigkeit vom Drucke p durch

$$K = (1+\lambda p) \tag{6}$$

feststellt.

Aus 6) folgt

$$p\frac{\partial K}{\partial p} = \frac{\partial K}{\partial \log p} = \lambda p = K-1 = 4\pi k.$$

Nun ist aber für ein Gas $pv = \text{const}$, und dementsprechend $d\log p = -d\log v$, daher

$$-\frac{\partial K}{\partial \log p} = \frac{\partial K}{\partial \log v} = -4\pi k' = -4\pi k,$$

woraus sich also in Übereinstimmung mit der aus Poisson's und Betti's Formeln 1) und 2) gefolgerten Formel 5)

$$k' = -k$$

ergibt.[2]

Für andere Substanzen als Gase liegen directe Versuchsresultate über die Änderung des k mit Volumänderung nicht vor.

---

[1] S. Boltzmann, „Experimentelle Bestimmung der Diëlektricitätsconstante einiger Gase". Diese Berichte, Bd. 96_2, S. 800 und 801.

[2] Die gleiche Abhängigkeit vom Druck scheint für die Magnetisirungszahl der Gase durch die Versuche Quincke's (Wied. Ann. Bd. 34, S. 405 und 431—434) erwiesen zu sein.

Es ist jedoch nach der von Helmholtz und Kirchhoff gegebenen Theorie der Formveränderung magnetisch oder diëlektrisch polarisirte Körper die Grösse von k' mit k gemeinsam entscheidend für die Volumänderung, die diese Körper im elektrischen, beziehungsweise magnetischen Felde erfahren.

Versuche, welche Quincke[1] an Flüssigkeiten im elektrischen Felde angestellt hat, haben ergeben, dass Substanzen nahezu gleicher Diëlektricitätsconstante in Bezug auf die resultirende Volumänderung ein total verschiedenes Verhalten[2] zeigen. Es scheint dies dafür zu sprechen, dass wenigstens hier k' eine selbstständige, für die einzelnen Substanzen charakteristische Constante ist. Für diese Substanzen scheint also Poisson's Formel 1), respective Betti's 2), welche k' in ganz bestimmter, durch Formeln 3) und 4) festgelegter Weise an k binden, mit der Erfahrung im Widerspruche zu stehen, k scheint für diese Substanzen als lediglich empirische Constante aufzufassen zu sein

Die Resultate der vorstehend geführten Untersuchung lassen sich also folgendermassen zusammenfassen:

Fasst man im Sinne der Poisson-Mosotti'schen Theorie die Magnetisirungszahl, beziehungsweise die Diëlektricitätsconstante als Function der Raumerfüllung g durch die Molecüle auf, so verfügt eine solche Annahme auch gleichzeitig schon über die Änderung, die jene Grössen durch Vornahme einer Volumänderung erfahren; es ist diese durch einfache Differenziation aus der Definitionsgleichung 1), respective 2) abzuleiten.

Für Gase stehen die solchergestalt durch Rechnung gefolgerten Werthe mit den von Boltzmann durch directe Messungen gefundenen in voller Übereinstimmung.

Für andere Substanzen liegen directe Bestimmungen nach dieser Hinsicht nicht vor; es lassen jedoch Versuche über die Volumänderung diëlektrisch polarisirter Flüssigkeiten es als wahrscheinlich erscheinen, dass für diese jene Übereinstimmung

---

[1] Wied. Ann., Bd. X, 1880, S. 523 ff.

[2] Es ergab sich für Terpentinöl dessen $K = 2\cdot412$ ist $\frac{\Delta v}{v}.10^6 = 1\cdot7$, für Steinöl, dessen $K = 2\cdot124$, $\frac{\Delta v}{v}.10^6 = 5\cdot66$, für Rüböl, dessen $K = 2\cdot442$ $\frac{\Delta v}{v} = -18\cdot24.10^{-6}$, also eine Volumabnahme.

nicht besteht, für sie die Poisson'sche Formel 1) also nicht mehr richtig ist.[1]

Die Verwendung der Poisson'schen Formel 1) zur Bestimmung des von den Molecülen wirklich eingenommenen Bruchtheils g der Volumeinheit und damit zur Berechnung der Grösse derselben scheint nur für die Gase statthaft zu sein, für andere Substanzen aber der Strenge zu entbehren.

---

[1] Ein Grund für die Unrichtigkeit der Poisson'schen Formel 1) in diesen Fällen liegt schon darin, dass, wie Mascart und Joubert (Lehrb. der Elektricität, Bd. 1, S. 147) gezeigt, für Substanzen grösserer Diëlektricitätsconstanten die der Herleitung von Formel 1) zu Grunde gelegte Vernachlässigung der Wechselwirkung der Molecüle nicht mehr statthaft ist.

Bahnbestimmung des grossen Meteors vom 17. Jänner 1890

von

Prof. G. v. **Niessl** in Brünn.

Am Abende des 17. Jänner 1890, um $5^h 11^m$ mittl. Wiener Z., zog ein ansehnliches Meteor über die südöstlichen Gegenden der Monarchie und erregte sowohl durch Lichteffecte als auch durch die zurückgebliebene rauchähnliche Spur, sowie endlich durch die in den nordwestlichen Theilen Bosniens und den angrenzenden kroatischen Gebieten vernommenen heftigen „erderschütternden" Detonationen grosses Aufsehen.

Es drückt sich dies deutlich in den telegraphischen Anzeigen aus, welche darüber von verschiedenen Seiten sowohl bei der k. k. Universitätssternwarte, als auch bei der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien einliefen.

Dieses Meteor ist, obgleich die Dämmerung noch nicht vorüber war, fast in der ganzen Monarchie gesehen worden, nämlich von Schärding am Inn bis in die östlichen Comitate Ungarns, von Mähren bis an die Südspitze Dalmatiens, auf einer Fläche, welche sich ungefähr 800 *km* von West nach Ost und 1000 *km* von Nord nach Süd ausdehnt.

Das wirkl. Mitglied der kais. Akademie, Herr Prof. Dr. Edmund Weiss, Director der k. k. Universitätssternwarte in Wien, dessen Güte ich die ersten Nachrichten über diese bedeutende Erscheinung verdanke, forderte, meiner Bitte entsprechend, in mehreren Tagesblättern die Beobachter auf, über ihre Wahrnehmungen an die Sternwarte zu berichten, wie dies nun schon mehrmals mit dem günstigsten Resultate geschehen ist. Infolge dieser Anregung lief der grössere Theil des allerdings durch

weitere Erkundigungen meinerseits ergänzten, sehr reichhaltigen Materiales ein. Allein auch dem wirkl. Mitgliede und Director der k. k. meteorologischen Centralanstalt, Herrn Hofrathe Prof. Dr. Julius Hann, bin ich für die Überlassung aller dort eingegangenen Mittheilungen lebhaft verpflichtet. Ich kann ferner nicht umhin, mit aufrichtiger Freude zu erwähnen, dass ich auch sonst noch sehr wirksam unterstützt wurde, indem einzelne Persönlichkeiten, theils aus eigenem Antriebe, theils infolge meines Ansuchens in ihrer Umgebung Beobachtungen sammelten und die Resultate ihrer Bemühungen mir mittheilten, so Herr Gustav Freiherr v. Schreiner, k. und k. Viceconsul i. z. R. in Friesach, Herr k. u. k. Corvettencapitän Fr. Laschober, Leiter der Marinesternwarte in Pola, Herr k. k. Bergrath Fr. Seeland in Klagenfurt, Herr Prof. A. Prey in Krems und Herr Prof. Milan Marek in Gospić, welcher, nahe am Hemmungspunkte, mich insbesondere auf die zahlreichen wichtigen Notizen in kroatischen Localblättern, die mir sonst sicher entgangen wären, aufmerksam machte. Auch von Seite derjenigen k. und k. Militärpost- und Telegraphenämter in Bosnien, an welche ich mich wendete, sind mir in entgegenkommendster Weise werthvolle Aufklärungen zu Theil geworden. Rechne ich dazu das freundliche Interesse, mit welchem von den meisten Beobachtern meine Anregungen zu genaueren Feststellungen aufgenommen wurden, so ist es eine reichliche Dankesschuld, der ich mich hier vor Allem zu entledigen habe.

Nach den ersten telegraphischen Berichten durfte man erwarten, bald auch über den Niederfall oder über die Auffindung von Meteoriten Nachrichten zu erhalten, da alle charakteristischen Erscheinungen bei Meteoritenfällen sonst vorhanden waren; allein diese blieben aus. Wie die nähere Untersuchung herausstellte, lag der Hemmungsort über einer schwach besiedelten Karstgegend, so dass die Umstände der Wahrnehmung des thatsächlichen Falles nicht günstig waren.

Obgleich es, wie sonst, auch bei der folgenden Bearbeitung zunächst hauptsächlich in meiner Absicht lag, durch sorgfältige Bestimmung der Bahnverhältnisse, die gegenwärtig noch immer äusserst dürftigen Materialien zur endgiltigen Lösung wichtiger und entscheidender Fragen der Meteorastronomie zu vermehren,

und wiewohl ich daher insbesondere nach dieser Richtung hin bemüht war, jede neue Erfahrung aus früheren Fällen auf diesem so wenig gepflegten Gebiete auszunützen, konnte es doch nicht unterlassen werden, dem so reichlich eingegangenen Beobachtungsmateriale auch in anderer Beziehung das Wichtigste abzugewinnen.

Es ist, wie hier wieder bemerkt werden mag, nicht ganz leicht, aus einer so ungemein grossen Anzahl von Berichten, welche oft sehr umständlich Nebensächliches behandeln, dasjenige herauszuheben, was schon gegenwärtig als wesentlich gelten muss, dabei aber auch jenes nicht zu übersehen, das nach den Wendungen, welche die Forschung über diesen Gegenstand in Zukunft nehmen kann, erst später möglicherweise wichtig werden könnte. Darin liegt ja eben das völlig Unzureichende der alten Berichte über Meteoritenfälle, dass sie zumeist gerade das nicht enthalten, was gegenwärtig für wesentlich gilt.

Die Angaben, welche zur Bahnbestimmung dienen können, sind im Folgenden ausnahmslos mitgetheilt, selbst dann, wenn ich im Verlaufe der Untersuchung genöthigt war, sie auszuschliessen. Soweit als möglich ist auch überall angeführt, wie die betreffenden Zahlenwerthe erhalten worden sind. Es finden sich dabei einige Abkürzungen: zur Bezeichnung des Ortes am Himmel (Azimuth: A, scheinbare Höhe: h), der scheinbaren Neigung gegen den Horizont (Ng) und der Dauer (D). Wo die Azimuthe vom Beobachter auf den magnetischen Meridian bezogen sind, habe ich sie in der Regel ebenso angeführt, aber durch Beifügung des Zeichens (m) als solche kenntlich gemacht.

Die Wiedergabe aller einzelnen Mittheilungen über die Farbe des Lichtes, die Form der Feuerkugel, den Lichtschweif etc. würde zu überflüssigen Wiederholungen geführt haben, da auf dieselben an der betreffenden Stelle ohnehin Bezug genommen worden ist. Besonders charakteristische Schilderungen habe ich jedoch fast durchwegs mit den Worten der Beobachter angeführt. Dies gilt insbesondere von den Berichten aus Gegenden in der Nähe der Bahn.

Die rechnungsmässigen Beobachtungsfehler, dann die Einzelheiten, welche sich auf die Abschätzung der Geschwindigkeit beziehen, habe ich diesmal wegen der grossen Anzahl der Beob-

achtungen, um den Zusammenhang nicht zu stören, in einem Anhange zusammengestellt.

Endlich will ich noch erwähnen, dass am Abende des 17. Jänner bald hintereinander eigentlich drei grössere Meteore über unsere Gegenden hingezogen sind, welche sehr wahrscheinlich alle dem gleichen Radiationspunkte entstammten. Man findet die Nachweise dafür am Schlusse dieser Abhandlung.

Beobachtungen.

(Mähren, Niederösterreich und Oberösterreich.)

1. Hradisch (35° 7·5′; 49° 4′) 5^h 14^m. Anfang, wo am 1. Februar 11^h Vorm. die Sonne steht ($A = 341°$), doch tiefer; Ende gegen SW, 4° hoch (gemessen), Neigung: 22° (gezeichnet). *D*: 5—6^s (Herr Advocat Dr. J. Frendl).

2. Czeitsch (34° 38′; 48° 57′). Durch die Luft flog von E nach S ein feuriger Streifen, welcher sich verlängerte, als ob er gerissen wäre, dann im hinteren Theile hellblau wurde und erlosch. *D*: 5^s. Beobachter bemerkte übrigens: „Eine Sternschnuppe war dies nicht, solche sah ich oft, aber diese Erscheinung war ganz anders“. Am Himmel sah man noch keine Sterne (Herr Lehrer Oplustil).

3. Karlstein (33° 4·5′; 48° 52·5′) 5^h und einige Minuten. Zug in der Richtung von Thuma (*A*: 250°) gegen Goschenreuth (*A*: 25°), zuletzt sehr niedrig. Eine grosse blaue „Flamme“, vorne etwas röthlich, doppelt so lang als breit. In dem Augenblicke fielen davon „faustgrosse“ blau leuchtende Kugeln zur Erde nieder (durch Herrn Oberlehrer Paulusch).

4. Waidhofen a. d. Thaya (32° 57′; 48° 49′), Rchtg.: ENE—WSW; Anfang 50° östlich von S und halb so hoch als die Sonne am Mittag des 15. Februar (*h*: 14·3°). Ende westlich von S. Das Meteor zog einen aus Funken bestehenden Schweif nach sich und verschwand, ohne eine Spur zu hinterlassen. *D*: 8^s (Herr Bürgerschuldirector Bodo).

5. Grafenberg, 1 *km* östlich (33° 32′; 48° 38′), 5^h 3^m Prager Z. Rchtg.: NE—SW, Ng.: etwa 30°, geschätzt; Anfang $A = 335°$ (eingezeichnet), Ende nur wenig östlich von der Kirche in Stranning (deren Azimuth: 8°). „Für 1 *km* Distanz wäre die

Höhe am Anfange 0·4 *km*, am Ende 0·1 *km* zu schätzen.“ Diesen gewiss nur sehr beiläufig geltenden Verhältnisszahlen würden die scheinbaren Höhen h: 22° und h: 5·5° entsprechen. D: über 1ˢ (Herr Pfarrer Mayerhofer).

6. Mistelbach (34° 15′; 48° 34′). Rchtg.: NE—SW. Ende im Sonnenazimuth um 1ʰ am 13. Februar (12·4°); Ng.: 6°, Bahnlänge etwa 15°. Die Feuerkugel hinterliess einen „dem Anscheine nach aus Funken gebildeten feurigen Streifen, der nach dem Erlöschen langsam verschwand“. D: 10ˢ (Herr Steuerinspector Fitzka).

7. Nieder-Kreuzstetten (34° 8·7′; 48° 29′). 5ʰ 10ᵐ. Richtung nach SW, Ng.: 7·2° (Stud. Treixler).

8. Krems (33° 16′; 48° 7·8′). Herrn Gymnasialprofessor Dr. A. Prey verdanke ich die fachgemässe Sicherstellung mehrerer Beobachtungen von hier, da die Azimuthe mit der Boussole (die magn. Declination ist mit 9° bereits angebracht), die Höhen mit dem Gradbogen gemessen wurden. Die abgeleitete mittlere Bahn wird sich eines besonderen Gewichtes erfreuen.

a) Beobachter Herr Prof. J. Forstner gibt an: Anfang: $A = 309°$, $h = 5°$, Ende: $A = 358·5°$, $h = 1·5°$. Hiezu bemerkt Herr Prof. Prey bezüglich des Endpunktes, dass die südlich vorliegenden Berge einen grösseren Höhenwinkel geben als 1·5°, D: 6—7ˢ.

b) Frau Kramer sah nur ein kleines Bahnstück, welches durch die Fensterumrahmung begrenzt war. Das Meteor verschwand hinter einer Dachecke in $A = 4°$, $h = 6°$.

c) Nach den Angaben des Herrn Prof. Rastbichler war der Anfang in $A = 298·5°$, $h = 5°$, das Ende in $A = 335·5°$, $h = 2°$. Der Endpunkt trifft in die halbe Höhe des Göttweiger Berges, durch welchen die Bahnfortsetzung wohl gedeckt wurde. Der Beobachter meinte jedoch das Meteor vor demselben gesehen zu haben, was auf einer häufig vorkommenden Täuschung beruht. D: 20ˢ.

d) Herr Prof. Pitra, welcher nur das Ende sah, gibt für dieses einen Punkt in $A = 6°$, $h = 5°$. Hiemit stimmt auch die beiläufige Angabe des Herrn Prof. Wichner.

9. **Hirschstetten** (34° 7·8′; 48° 14′). Horizontal von E—W, endete über den Feldern gegen Stadlau (d. i. etwa SSW). *D*: 5—6^s (Herr J. Radde).

10. Wien (34° 1′; 48° 13′) 5^h 10^m, nach drei übereinstimmenden Angaben. Zahlreich sind die Mittheilungen, welche aus der Residenz bei der k. k. Sternwarte einliefen. Die wesentlichen werden hier nach der Reihe ihrer Wichtigkeit angeführt. Bei der grossen Entfernung der wirklichen Bahn genügt für die geographische Lage der einzelnen Beobachtungspunkte der oben gegebene Mittelwerth.

a) Fräulein E. Beranek hat das Meteor aus einem Hause der Richtergasse im VII. Bezirke beobachtet und dessen scheinbaren Lauf über den gegenüberliegenden Häusern der Mariahilferstrasse sehr genau geschildert. Herr Sternwarteassistent Dr. R. Spitaler war so freundlich, später die ihm von der Beobachterin bezeichneten Punkte mit einem Boussolentheodoliten einzumessen. Dabei ergaben sich folgende Resultate: Anfang: $A = 300°$ (*m*), $h = 8·5°$, Mitte: $A = 330°$ (*m*), $h = 6°$, Ende: $A = 14°$ (*m*), $h = 4°$. Die Beobachterin gab ferner an, dass sich vor dem Verschwinden „ein grösserer und mehrere kleinere Splitter vom Hauptkörper ablösten“. Die Dauer schätzte sie nach Pulsschlägen auf ungefähr 4—5^s.

b) Herrn J. Trauter's Beobachtung um 5^h 10^m gibt durch Eintragung in den Stadtplan die Azimuthe $A = 339°$ und $A = 351°$ für Anfang und Ende. Ng.: 17° (gezeichnet). „Die Bahnstrecke von etwa 20° wurde in 7^s durchlaufen.“

c) Herr B. Eisner befand sich am oberen Theile der Rampe nächst dem Dominikanerkloster und sah um 5^h 10^m das Meteor in der Richtung über dem Eislaufplatze (*A*: etwa 297°, aber sehr unsicher, wegen der Nähe und Grösse dieses Platzes) erscheinen, ungefähr in Zweidrittel der Höhe, welche der Mond am 4. Februar gegen 7^h Abends hatte (beiläufig $h = 14°$) und zwischen den Häusern der Wollzeile und Zedlitzgasse (ungefähr *A*: 20°) ohne Hinterlassung einer Spur verschwinden. Es schien dem halben Mond an Grösse gleich und „dauerte eine Minute“.

d) Herr Ministerialrath Dr. Th. Haberer sah beim Stubenring, in der Nähe der Radetzky-Brücke, das Meteor ebenfalls zuerst über dem Eislaufplatze (ungefähr *A*: 320·5°) aufleuchten.

„Es machte den Eindruck, als würde eine der elektrischen Bogenlampen in erhöhtem Glanze und etwas höher als sonst in Thätigkeit treten", bewegte sich gegen den Stadtpark, erlosch aber auf halbem Wege (etwa in $A = 4°$) unter Funkensprühen wie eine grosse Rakete. *D*: 3—4^s.

e) Von der Einmündung der Zedlitzgasse in den Parkring beobachtete Herr G. Ramsauer um 5^h 17^m das Meteor in der Richtung NE—SW, parallel zum Erdboden über den Stadtpark und „scheinbar 1 *m* hoch über den Cursalon" ziehen. *D*: 3—4^s. „Von dem Punkte, wo das Meteor zuletzt zu sehen war, ging ein dunkler Streifen, ungefähr die Flugbahn nachzeichnend, aus, der circa 1^s lang sichtbar blieb. Aus diesem Streifen fiel ein nussgrosser Funke, der nach $^1/_2{}^s$ erlosch."

f) Herr H. Schöne beobachtete um 5^h 10^m von seinem Standpunkte im Volksgarten, beim Bassin vor dem Grillparzermonumente, wie die Feuerkugel über dem östlichen Flügel des Neubaues der Hofburg erschien (*A*: 300° unsicher) und hinter der Kuppel des naturhistorischen Museums verschwand. „Sie bewegte sich in sanft absteigender Linie und hinterliess eine Spur wie von leicht gekräuseltem Rauche." *D*: 3^s.

g) Ähnlich, hinsichtlich der Bahnlage, lauten die Angaben des Fräuleins Lina Minckwitz, welche sich zwischen den beiden Monumenten auf dem äusseren Burgplatze befand, als sie um etwa 5^h 11^m das Meteor in wagrechter Linie über den ganzen Neubau der Hofburg hinwegziehen und hinter den Häusern an der Ecke der Babenbergerstrasse (im Berichte heisst es, offenbar aus Versehen, „Bellariastrasse", welche die Beobachterin nicht gemeint haben kann) verschwinden sah. Der Verlauf der Erscheinung ist recht anschaulich geschildert. „Im ersten Momente dachte ich an eine Sternschnuppe; doch plötzlich entwickelte es sich wie eine Rakete, zog mit glänzendem Strahlenschweife am Himmel hin und erweiterte sich zu einer Feuerkugel, die im grünlichweissen Lichte mit gelbrothem Rande erschien."

h) Mehrere andere Berichte enthalten nur Angaben über die Farbe, welche ich am betreffenden Orte berücksichtigen werde, dann über die Grösse und Dauer. Frau Pflugmacher und Herr J. Brunner geben Vollmondsgrösse an, letzterer bezeichnet die Längsaxe viermal so lang als die Queraxe. Die Dauer

wird von der genannten Beobachterin zu 2—3^s geschätzt, ebenso von einem anderen Beobachter, Herrn Bürgerschullehrer C. Walter. Herr A. Künzl gibt 4—5^s an, endlich Herr P. Zimmermann 10—15^s. Da man diesen Beobachtungen jedoch nicht entnehmen kann, wie lange die gesehenen Bahnstücke waren, so liegt kein eigentlicher Widerspruch in diesen verschiedenen Angaben, sie können vielmehr alle nahezu richtig sein.

Aus den Mittheilungen *a)* bis *g)* geht hervor, dass die meisten Wiener Beobachter, welche einigermassen bestimmtere Angaben lieferten, die Feuerkugel ungefähr in ESE auftauchen, dann ziemlich tief und in geringer Neigung gegen den Horizont bis etwas westlich von S ziehen sahen, wo sie sehr niedrig erlosch. Die folgende Wahrnehmung will ich nun noch besonders hervorheben, weil sie ganz und gar mit den übrigen Angaben im Widerspruche steht.

i) O. Manuel, Schüler der 2. Gymnasialclasse, beobachtete mit seiner Mutter das Meteor von einem Punkte in der Nähe der k. k. Sternwarte „zwischen 5 und $^1/_4$6 Uhr“. Beide berichteten übereinstimmend mündlich darüber Herrn Director Prof. Dr Weiss Folgendes: Zuerst erschien das Meteor als feurig-gelber Streifen, aus dem eine grüne Kugel von Vollmondgrösse herausflog, welche in anfänglich nahezu horizontaler, zuletzt stark abwärts biegender Bahn gegen W zog und nach 6—7^s erlosch. Herr Assistent Dr. Spitaler nahm hierauf mit den beiden Genannten an Ort und Stelle die Festlegung der Bahnpunkte vor, wobei sich für den Anfang $A = 0°\,(m)$, $h = 20°$, für das Ende $A = 91°\,(m)$, $h = 5—7°$ ergab. Zugleich wurde die Dauer mit Rücksicht auf den Weg, welchen die Beobachter während des Betrachtens zurückgelegt hatten, nach der Uhr nun auf 18^s geschätzt. Alle Angaben machten den Eindruck grosser Verlässlichkeit.

Gegenüber den übrigen Beobachtungen erscheint diese Bahn fast um einen ganzen Quadranten im Azimuth verschoben, man müsste also grosse Erinnerungsfehler oder die Nichtidentität der Erscheinungen annehmen, trotz der übrigen, ziemlich übereinstimmenden Umstände. Es ist nun, wie später gezeigt werden wird, allerdings gewiss, dass beiläufig um diese Zeit, oder eigentlich wohl ein wenig früher, ein anderes Meteor weit nördlich von

Wien über Böhmen nach Westen hinzog, und es ist auch wahrscheinlich, dass ein drittes etwas später wieder weit im Osten sich bewegte. Offenbar kann sich jedoch auf eine dieser beiden Erscheinungen diese Beobachtung nicht beziehen. Ob hienach noch eine vierte anzunehmen wäre, mag vorläufig dahingestellt bleiben.

11. Rodaun (33° 55·5′; 48° 7·8′) $5^h 12^m$. Rchtg.: ENE—WSW. Bahn fast horizontal; Dauer wenige Secunden (Herr Prof. Dr. A. Kornhuber).

12. Baden (33° 54′; 48° 0·5′) $5^h 13^m$. Das in SE aufleuchtende Meteor verschwand hinter einer ziemlich genau in S gelegenen Baumgruppe. Ng.: 10° (gezeichnet), *D*: 3—4^s (Herr Stabsarzt Dr. B. Deutsch).

13. Vöslau (33° 52·5′; 47° 58′) $5^h 10^m$. Das Meteor erglänzte am südöstlichen Himmel und nahm seinen Weg „mit horizontalem Fluge" gegen SW. Die sichtbare Bahn war etwas über 20° lang. In der Nähe des „Viergestirnes des Walfisches" theilte es sich in drei gleiche Theile, welche eine Weile die gleiche horizontale Lage behielten, sich aber bald in eine Unzahl Funken auflösten und erloschen. *D*: 8^s (Presse). Die genannten Sterne standen zur Zeit wenig östlich von S. Nach einer brieflichen Mittheilung des Herrn Beobachters kann angenommen werden, dass das Erlöschen gerade südlich, aber unter den Walfischsternen erfolgte. Die Bahnrichtung schien so, als ob das Meteor aus dem Eridanus etwa aus $\alpha = 57°$, $\delta = -12°$ gekommen wäre.

14. Hof (34° 15′; 47° 57′) $5^h 15^m$. Rchtg.: ENE—WSW. *D*: 2^s (Herr P. Zulić).

15. Neunkirchen (33° 45′; 47° 34′) $5^h 15^m$. Ende in $A = 12°$ (*m*), 5° hoch, anscheinend am Dachfirst oder dahinter. Ein anderer Bahnpunkt lag in $A = 3°$ (*m*), 11—12° hoch. Bahnlänge ungefähr $22^1/_2$° in 2^s durchlaufen. Diese Daten sind nach den Angaben der Beobachterin Frau Landesgerichtsrath Frimmel auf mein Ersuchen von dem Herrn O. Reinhardt durch Messung mit Boussole und Gradbogen bestimmt und mir freundlichst mitgetheilt worden.

16. Schärding (31° 6′; 48° 26·5′). Die weiss leuchtende Feuerkugel schwebte wie ein kleiner Mond in der Richtung von E—W (Frau L. Mattaulech).

17. Taufkirchen (31° 25′; 48° 15′). Rchtg.: NE—SW. Bahn in SE sehr niedrig. Aussehen „wie ein Komet mit Kopf und langem Schweif" (Herr Pfarrer E. Klinger).

18. Ardagger (32° 30′; 48° 11′). Das Meteor erschien in jenem Azimuthe, welches die Sonne am 20. Februar um 9^h 8^m Prager Z. hat, nicht ganz Zweifünftel so hoch als diese (A: 312°, h: 7·5°), und zog in schiefer Bahn gegen S, verschwand aber hinter vorliegenden Höhen. D: 3^s (Herr Pfarrer F. Veigl).

49. Kremsmünster (31° 48′; 48° 4′) 5^h 5^m. Laut einer freundlichen Mittheilung des hochwürdigen Herrn Sternwartedirectors P. Col. Wagner wurden mit dem Meteoroskop gemessen: Anfang $A = 308·4°$, $h = 6°$, Ende $A = 330·2°$, $h = 5·8°$. Der hochwürdige Herr P. Ruppert, welcher die Erscheinung beobachtet hatte, gibt an, dass das Licht zuerst gelblich, dann grün, dann abermals gelb, zuletzt wieder grün war und dass mit jeder Farbenänderung eine kleine Explosion verbunden war. D: 6—7^s.

20. Kürnberg (32° 12·5′; 48° 0·7′) 5^h. Rchtg.: N—S. Ende circa in SSE, etwa in der Linie, wo die Sonne zwischen 11^h und $^1/_2 12^h$ steht, ($A = 345°$), 1·5° hoch (gemessen). Das Meteor bildete zuerst eine Scheibe „wie die Sonne, doch grösser", nahm dann eine mehr längliche Form an, dass es das Aussehen eines Drachen mit langem Schweife erhielt und zerplatzte schliesslich in fünf gleiche Theile, die, wie es schien, in einem Walde des gegen Süd vorliegenden Spatenberges „niederfielen". Der „Wieserbauer", welcher einige Schritte vor seinem Hause stand, erzählte: Das Meteor ging sehr niedrig, bis es endlich ganz sanft den (in südöstlicher Richtung von seinem Standpunkte gelegenen) höchsten Punkt der Wieserhöhe streifte. Da platzte es mit einem sehr starken Knalle auseinander und die Flammen breiteten sich auf dem Felde aus in einem Umkreise von 2 m^2. Hierauf erlosch es sogleich (Herr J. Lintemer).

Ich habe diese absonderliche Mittheilung des Wieserbauers wiedergegeben, damit man sie allenfalls mit der unter 10. *i)* angeführten Beobachtung des Gymnasiasten Mannel vergleichen könne, welche sich, wenn sie auch nur annähernd den Thatsachen entspricht, auf das sonst allgemein beobachtete, beiläufig über den bosnisch-kroatischen Grenzgebieten erloschene Meteor offenbar

nicht bezieht. In Kürnberg könnten aber von dorther auch keine Detonationen vernommen worden sein. Die Richtung, in welcher Manuel sein Meteor erlöschen sah, geht gegen Steyr zu, wo Kürnberg liegt; also könnte man vermuthen, dass der Wieserbauer sich in der Nähe des Fallortes dieses Meteors befunden habe, weil, abgesehen von den angeführten Schallwahrnehmungen, bei welchen übrigens nicht selten die Phantasie nachhilft, auch die Lichtentwicklung besonders hervorgehoben ist. Allein die ausdrückliche Bemerkung, dass die scheinbare Bahn auch in Kürnberg ganz niedrig erschien, wie in Wien, erweist sofort, dass diese Combination unannehmbar ist. Es liegt auch sonst aus der ganzen Gegend keine bestätigende Mittheilung vor.

(Steiermark und Kärnten.)

21. Mariazell (32° 58′; 47° 47′) 5^h. Meteor horizontal von E nach S; blaues Licht (Herr Ingenieur Pinder im meteorologischen Beobachtungsregister).

22. Altenberg (33° 19′; 47° 41′) 5^h 7^m. Meteor zwischen Raxalpe und Mürzzuschlag, d. i. ungefähr zwischen E und 10° östlich von S (Herr Bergmeister Hampel, wie oben).

23. St. Peter (32° 42′; 47° 17·2′). Um 5^h Abends zog ein hellglänzendes, weissleuchtendes, birnförmiges Meteor von E—W über unser Thal (durch Herrn Prof. C. Prohaska in Graz, dem ich auch die folgende Notiz verdanke).

24. Weiz (33° 16′; 47° 12′). „Wenige Minuten nach 5^h sah ich am Himmel einen von SE gerichteten, fast horizontalen Lichtstreifen, dem eine feurige Meteorkugel vorausschwebte. Der Lichtstreifen löste sich los, verschwand, um einem neuen Platz zu machen. Die Erscheinung wiederholte sich einigemal mit Intervallen von einer Secunde“.

25. Fladnitz bei Passail (33° 8·7′; 47° 17·2′) 5^h. Weissglühendes, grosses Meteor, welches aus nordöstlicher Richtung zog und über dem Schöckl (beiläufig $A = 5°$) verschwand (Grazer „Tagespost“).

26. Gaal (32° 20·2′; 47° 16·4′) 5^h. Prachtvolles Meteor, in schnurgerader Richtung von NE—SE, verschwand oberhalb Rattenberg unseren Blicken (Gr. „Tagespost“).

27. St. Margarethen bei Knittelfeld (32° 34′; 47° 14′) 5^h. Buntfarbiges Meteor, Rchtg.: NE—SW durch 3^s. Die Bahn desselben blieb durch einen hellleuchtenden Streifen für kurze Zeit gekennzeichnet (wie oben).

28. Neumarkt (32° 5′; 47° 4·5′). Anfang: $A = 293·5°$, Ende: $A = 340·5°$ (in die Karte eingezeichnet), Ng.: 11° (skizzirt). D: 20^s (Herr Thierarzt Jessernigg).

29. Friesach (32° 4·4′; 46° 57·3′) 5^h $2·5^m$. Die zahlreichen Beobachtungen von hier und aus Hirt (30) verdanke ich der Güte des Herrn Gustav Freiherrn v. Schreiner, k. und k. Viceconsuls i. z. R., welcher aus eigenem Antriebe und mit lebhaftem Interesse den Gegenstand verfolgt, mit Boussole und Höhenbogen viele Messungen vorgenommen hat und auch anderweitige Erhebungen sich angelegen sein liess.

a) Fräulein Marie v. Schreiner sah nur ein kurzes, durch die Fensterumrahmung begrenztes Bahnstück, welches nach den sorgfältigen Messungen des Herrn Barons durch die Punkte $A = 316°$, $h = 9·6°$ und $A = 324°$, $h = 9·0°$ bestimmt ist.

b) Herr Kanzlist R. Bittner beobachtete ebenfalls einen in ähnlicher Weise begrenzten Bahntheil zwischen den nach der Sonne ermittelten Azimuthen $A = 308°$ und $A = 329°$. Die zugehörigen Höhen wurden vom Beobachter am Gradbogen zu $h = 10·5°$ und $h = 7°$ bestimmt.

c) Bureaudiener Spitzer machte seine Beobachtung am Fenster mit Herrn Bittner, so dass annähernd dieselben Azimuthe anzunehmen wären. Den Gradbogen stellte er auf die Höhen $h = 14°$ und $h = 12°$ ein. D: 2—3^s.

d) Sägebesitzer Herr Paulitsch aus Grafendorf befand sich um diese Zeit in der Gemeinde Perchau, etwa 5—6 *km* NE von Neumarkt (28). Er sah die Feuerkugel langsam über die „Zirbitzalm“ (ESE), anfangs horizontal streichen, dann sich senken in der Richtung auf Neumarkt. Sie schien „etwas kleiner als die Sonne“.

e) Dessen Gattin Frau A. Paulitsch sass knapp am Fenster (SE) ihres Hauses in Grafendorf bei Friesach und sah das Meteor bis zum Erlöschen, welches nach ihrer Angabe in $A = 30°$ (m), $h = 5°$ erfolgte. Die erste Auffassung war in $A = 350 (m)$, $h = 16°$. Ihre Tochter, welche neben ihr stand, gibt für den Anfang

dagegen $A = 328°$ (m), $h = 14°$ an, während sie das Ende nicht mehr sicher zu bezeichnen vermochte. Ohne Zweifel sind die ersteren Positionen erheblich zu weit nach West gerückt.

f) und *g)* Von den Fräuleins Unger und Rosenwald, welche ebenfalls in der Nähe eines Fensters sassen, werden die Azimuthe für Anfang und Ende übereinstimmend $A = 325°$ (m) und $A = 30°$ (m) angegeben, dagegen die Höhen von der ersteren zu 16° und 7°, von der letzteren zu 15·5° und 8°. Die Bahn ist von beiden offenbar ebenfalls zu weit westlich verlängert, wahrscheinlich, wie dies oft geschieht, bis zum Einschnitte mit dem Erdboden. Für die Dauer geben sie 2 Minuten an, wobei es unentschieden bleibt, ob sich diese nur auf den eigentlichen Lauf des Meteors bezieht.

h) Die Herren Bauer und Knaus, welche sich 2 *km* NW von Friesach auf der Metnitzerstrasse befanden, sahen nach ihrer ersten Aussage die Feuerkugel vom Minachberge (beiläufig $A = 284°$) über das Thal bis zum „vulgo Köck“ ziehen, und zwar wenigstens während 10^s. Bei der später erfolgten Aufnahme wurde die Bahn jedoch viel kürzer angegeben, nämlich von $A = 324°$ (m), $h = 8°$ zu $A = 0°$ (m), $h = 7°$.

g) Herr J. Löhrer sah nur das Ende und gab dafür $A = 355°$ (m), die Höhe wurde auf 22° geschätzt, also gewiss zu gross.

30. Hirt (32° 7'; 46° 55'). *a)* Max Wandelnig stand auf der nördlichen Fussung der Eisbahn und sah das Meteor vom „Hirter Steinofen“, einer charakteristischen kahlen Felspartie, ausgehen. Er machte seine Angaben mit grosser Sicherheit. Anfang: $A = 318°$ (m), $h = 16°$. Ende: $A = 348°$ (m), $h = 8°$. Herr Baron Schreiner controlirte den Anfangspunkt auch nach der Sonne, welche am 31. Jänner vom Standpunkte aus um 8^h 40^m hinter dem Steinofen hervorkam. Es ergab sich hieraus für das astronomische Azimuth 309° in guter Übereinstimmung, weil das früher gegebene magnetische (318°) um 10° zu vermindern ist, um auf den astronomischen Meridian reducirt zu werden. Die Höhe ergab sich dabei jedoch nur zu 12·8°. Diese Beobachtung dürfte wohl eine der sichersten sein.

b) Merkwürdig genug ist noch die Mittheilung des Bahnbediensteten Sager, weil derselbe, wenn sich die Umstände

auch nur annähernd so verhielten, wie er angibt, gewiss ein ganz besonders langes Bahnstück gesehen hat, für welches seine Dauerschätzung von 30^s vielleicht nicht viel zu gross ist. Nach seinen Angaben wurde gemessen: Anfang: $A = 245°$ (m), $h = 16\cdot5°$, Ende: $A = 30°$ (m), $h = 7°$. Die Bahn ist jedenfalls nach beiden Seiten verlängert. Die Grösse schien dem halben Monde zu entsprechen.

Die folgenden, unter Nr. 31 bis 33 mitgetheilten Beobachtungen verdanke ich zunächst der besonderen Gefälligkeit des Herrn Bergrathes F. Seeland. Sie sind übrigens, abgesehen von einigen späteren Ergänzungen, auch in der „Carinthia", 1890, 2, etwas ausführlicher abgedruckt.

31. Meiselding (32° 4′; 46° 51′) 5^h 10^m. Rchtg.: N—S, in fast horizontaler Bahn. Erschienen ober der Kirche (nahezu E). D: 3^s (Herr Schulleiter Bohrer).

32. Klagenfurt (31° 58′; 46° 37′) 5^h 3^m. Gymnasiast Oscar Seeland sah die Feuerkugel hinter dem Hochobir aufleuchten und im Zuge gegen W hinter einem Hause verschwinden. Später wurden für diese beiden Punkte folgende Daten gemessen: $A = 291°$, $h = 8\cdot5°$ und $A = 355°$, $h = 14\cdot5°$. D: 4^s. Dass die scheinbare Bahn eine aufsteigende war, wie aus diesen Resultaten geschlossen werden müsste, wurde nicht hervorgehoben.[1] Herr Bergdirector Pichler in Klagenfurt gibt eine absteigende Bahn mit 2—4° Neigung an. Die von ihm abgeschätzte Höhe von 25° ist, wie gewöhnlich, viel zu gross.

Nach einem Berichte des Herrn Prof. J. Reiner tauchte das Meteor „in E bei St. Peter" auf und zog in einer flachen Parabel nahezu westlich, D: 3—4^s.

33. Sonnegg (32° 19′; 46° 34′) 5^h 5^m. Das Meteor kam von der Hemmacapelle und zog gegen die Oistra. Senkungswinkel kaum 7—8°. Der Beobachter, Herr Forstverwalter J. Hey, war so freundlich, mir folgende, mit Boussole und Gradbogen erhaltenen Daten mitzutheilen. Anfang: $A = 315°$ (m); Ende $A = 336°$ (m), $h = 8\cdot5°$.

---

[1] Es hat den Anschein, als ob die Höhenzahlen beider Punkte aus Versehen vertauscht worden wären, doch erscheint es misslich, nachträglich eine Änderung vorzunehmen.

34. Zwischen Zauchen und Wernberg (31° 35′; 46° 37·5′) 5^h 10^m. Es erschien plötzlich ein Meteor auf dem noch taghellen Horizonte, das sich fast horizontal bewegte, als wäre aus Schloss Wernberg eine farbige Rakete gegen St. Ulrich hin abgeschossen worden. Scheinbar ober der westlichen Eisenbahnbrücke nächst St. Ulrich angekommen, löste es sich in eine Reihe in allen Farben (besonders roth) leuchtender Kugeln auf. Der Lichtstreif war noch kurze Zeit nach dem Verschwinden sichtbar (Villacher Zeitung).

35. Villach (31° 30·9′; 46° 36·8′). *a)* 5^h 10^m. Eine hellgrüne Feuerkugel zog langsam und horizontal. In der Richtung gegen den Mittagskogel ($A = 325°$) löste sie sich in lauter kleine, rothe Kügelchen auf, und ein rothbrauner Streif war noch später zu erblicken. *D*: 1^s (Herr J. Muhn).

b) 5^h 8^m. Rchtg.: NE—SW. Vor dem Erlöschen sprühte die flaschenförmige Feuerkugel ein röthliches Licht (Herr L. Haller).

36. Marburg (33° 17′; 46° 34′) 5^h 10^m. Anfang: $A = 280°$ (m), $h = 8°$. Die Angabe für das Ende, $A = 30°$ (m), $h = 24°$, beruht wohl auf einem Versehen, da die Bewegungsrichtung NE—SW bezeichnet ist. *D*: $5-6^s$. Bewegung scheinbar ruckweise (Herr Schulrath G. Kaas).

(Krain, Küstenland und Dalmatien.)

37 Laibach (32° 10′; 46° 3′) 5^h. Für ein durch die Fensteröffnung begrenztes Bahnstück wurde gemessen: $A = 293·5°$ (m), $h = 23·5°$ und $A = 313·5°$ (m), $h = 19·5°$. Nach der die Beschreibung begleitenden Skizze beziehen sich die Höhenwinkel auf Marken am Fenster, genommen aus der Tischhöhe. Auf die Augenhöhe des Beobachters, welcher dort sass, reducirt, würden sie ungefähr 13·3° und 9·5° betragen haben. Rchtg.: NNE—SSW. Die angegebene Dauer von 7^s ist auf eine längere Strecke bezogen, bis zum Verschwinden hinter Bäumen, worüber jedoch keine Feststellung vorliegt (Herr A. Mayer).

38. Hotič (32° 29′; 46° 6′). „Das Meteor kam ungefähr von ENE und zog in südwestlicher Richtung als eine riesige, intensiv feuerroth leuchtende Garbe, welche an beiden Enden zugespitzt, in der Mitte etwas erhaben schien. Vor dem Erlöschen erfolgte noch ein starkes Aufleuchten, und es verwandelte sich

das Licht ins Grüne und augenblicklich ins Violette. An der Stelle des Verschwindens, beiläufig dort, wo die Sonne etwa um $10^{1}/_{2}{}^{h}$ Vorm. im Jänner steht (beiläufig A: 339·5°), bemerkte man noch einige Augenblicke einen glühenden Punkt. Die Bahn war mehr horizontal als schief" (Herr Pfarrprovisor M. Absec).

39. Opčina (31° 25′; 45° 41′). Kurz nach 5^{h}. Rchtg.: NE—SW, sehr niedrig durch einige Secunden. Das Meteor liess einen Rauchstreifen mit einigen Funken hinter sich. Jener verschwand sehr langsam (Herr A. Valentić).

40. Basovizza (31° 30′; 45° 38′) $5^{h}\,10^{m}$. Grosses, schönes, flaschenförmiges Meteor: schoss in der Richtung von Gropada gegen den Kokus-Berg, d. i. von NE gegen S, während des Laufes 3—4mal wechselnd (Herr Schulleiter Pertota).

41. Pola (31° 31′; 44° 52′) $4^{h}\,59\cdot7^{m}$. *a)* Herr Med. Dr. Linhart, k. und k. Marinestabsarzt, schreibt: In südöstlicher Richtung tauchte bei eben hereinbrechender Dämmerung ein länglich rundes, in herrlichem blauweissen Lichte strahlendes Meteor auf, zog in westlicher Richtung eine Strecke weit fort unter geringer Neigung der Bahn gegen den Horizont und zerstob dann in eine Menge Fragmente, welche in gelbem und gelbrothem Lichte erglänzten, nachdem einen Augenblick vorher sich am hinteren Rande des Meteors in der Richtung der Flugbahn ein gelbroth leuchtender Schwanz gezeigt hatte. D: etwa $^{1}/_{2}$ Minute. Herr Linienschiffsfähnrich v. Arbesser war so gefällig, im Beisein des Herrn Beobachters die Festlegung folgender Daten vorzunehmen. Anfang: $A = 271\cdot5°$, $h = 8°$; Ende: $A = 300°$, $h = 8°$. Herr Dr. Linhart, welcher die Höhe früher bedeutend grösser abgeschätzt hatte, fügte bei, er vermuthe, dass er, im Gegensatze hiezu, bei der Messung zu tief gekommen sei.

Die beiden folgenden Mittheilungen, sowie jene unter Nr. 42, verdanke ich der Güte des Herrn k. und k. Corvettencapitäns und Leiters der Marinesternwarte, Fr. Laschober.

b) Herr Sternwartedirector R. Müller gibt an: Anfang: $A = 261°$, $h = 12°$, Ende: $A = 265°$, $h = 13°$ (mit Meteoroskop). D: kaum $2-3^{s}$. Die oben angegebene genaue Uhrzeit entstammt dieser Beobachtung. Das Meteor bildete einen gleichmässig hellen, etwa 5′ breiten Streifen von fast Blitzhelle, der jedoch an zwei

Stellen völlig unterbrochen war. Nirgends blieb eine Spur des durchlaufenen Weges, auch kein Geräusch war vernehmbar.

c) Herr Linienschiffslieutenant Ritter v. Jedina gibt folgende Schilderung: Um 5^h und etwa 5^m sah ich eine Feuerkugel von weisslich-gelbgrüner Färbung in der wahren Richtung E zu $S^3/_4S$ (also etwa 289·5° Azimuth) platzen und verschwinden. Ich hatte dieselbe etwa 5^s lang beobachtet und schätzte die Höhe ungefähr auf 18—20°. Die Flugrichtung schätzte ich beiläufig NW zu N gegen SE zu S. Während der 5^s legte die Feuerkugel ziemlich genau geschätzt einen Weg von 18° zurück.

42. Auf S. M. Schiff „Lussin" in 33° 3′; 43° 53′ wurde am 17. Jänner 5^h *p.* ein hellleuchtendes Meteor mit der Bewegungsrichtung E—W durch circa 5^s beobachtet. Die Höhe dürfte 30—40° gewesen sein. Es erschien bedeutend grösser als ein Stern 1. Grösse und kleinere Partikel waren um dasselbe zu bemerken (Herr k. und k. Linienschiffsfähnrich Ritter v. Benigni).

43. Lissa (33° 54′; 43° 5′) 5^h 10^m. Meteor in ENE, mit Richtung nach W durch 5^s. Zersprang schliesslich in viele Stücke (Semaphorstation).

44. Ragusa (35° 47′; 42° 38′) 5^h 10^m. Die Erscheinung wurde ungefähr in WNW beobachtet und dauerte $1·5^s$. Bahnlänge 20°, Ng.: 35° (Herr Director L. Klaić).

45. Cattaro (36° 26′; 42° 25′) 5^h 15^m. In der Gegend von NE zeigte sich am Himmel eine Feuerkugel, welche sich während 10^s nach NW bewegte und ohne Hinterlassung einer Spur verschwand.

(Ungarn mit Croatien, Bosnien und Hercegovina.)

46. Kalocsa (36° 40′; 46° 32′). Der Director des Haynald-Observatoriums, Herr P. Julius Fényi, S. J., berichtete an den Herrn Sternwartedirector Dr. E. Weiss in Wien über die hier gemachten Beobachtungen. Diese sind so wichtig, dass sie vollständig angeführt werden müssen.

„Ein Schüler der 2. Classe, Moda, sah den ganzen Verlauf der Erscheinung. Nach seinen Angaben hätte das Meteor in fast südlicher Richtung und gegen 33° hoch aufgeleuchtet. Nachdem es ungefähr Dreifünftel seines Weges gemacht hatte, sprühte es Funken und blieb stehen — so bemerkte der Knabe bestimmt

und ausdrücklich, ich halte dies indess für Täuschung — sodann setzte es seinen Lauf weiter fort, bis dieser durch das Dach des Gymnasiums abgeschnitten wurde. Die Neigung der Bahn hätte, so wie er sie zeigte, ungefähr 45° gegen Süden betragen; damit stimmte auch die Aussage zweier Studenten der 8. Classe überein. Die Farbe war weiss. Geräusch wurde nicht vernommen. Nach der Beobachtung des Allaga, Studenten der 8. Classe, welcher auf die Uhr gesehen, war der Rauchstreifen $^1/_4$ Stunde lang sichtbar. Der Streifen krümmte sich allmälig und zerriss; endlich schien er sich aufzulösen.

Das Ende dieser Erscheinung wurde auch von einem Professor gesehen, und zwar einige Grade über dem Horizonte. Die Bahnneigung gegen letztere gibt dieser zu 60° an. Viel zuverlässiger sind wohl folgende Daten, welche nachträglich durch Theodolitmessung nach den Angaben der Beobachter an Ort und Stelle erhalten wurden.

Der Student der 8. Classe, Brandtner, sah zwar das Meteor selbst nicht mehr, aber sogleich darauf den Rauchstreifen und bemerkte, wo derselbe vom Dache abgeschnitten wurde. Ich liess durch den Sternwarteassistenten Herrn P. J. Schreiber vom Beobachtungsorte aus Azimuth und Höhe dieses Punktes am Dache messen. Ich konnte so einen Punkt der Bahn sicher und genau bestimmen. Die Messung ergab für denselben $A = 48° 34'$, $h = 7° 20'$. Minder genau und zuverlässig ist die Bestimmung folgender Punkte, welche zwar auch mit dem Theodoliten geschah, aber auf unsicheren Angaben beruht. Man zeigte einen Rauchfang, über welchem das Meteor nach den obigen und anderen Aussagen aufleuchtete und gab an, dass dieses fünfmal so hoch darüber stattfand, als die scheinbare Breite des darunter befindlichen Daches beträgt. Nach diesen Angaben erhielt ich für diesen Punkt $A = 32° 4'$, $h = 16° 30'$.

Moda gab für seine Beobachtung die Dauer $4-5^s$ an, wobei ich ihm die Secundenuhr vorhielt. Wenn man für die Stelle, wo er das Funkensprühen des Meteors angibt, Zweifünftel vom Ende des gesehenen Bahntheiles zurückzählt, so würde sich für dieselbe etwa $A = 43 \cdot 6°$, $h = 11°$ ergeben."

47. Warasdin (33° 59'; 46° 20'). Um $5^h 21^m$ (Budap. Zeit?) bemerkte man SE von Warasdin ein apfelgrosses Meteor. Rchtg.:

E—W. Es hinterliess einen hellen Streifen, welcher später an den Enden dicker wurde und in der Mitte schwand. Zuletzt nahm er die Gestalt eines Kürbis an. Die ganze Erscheinung dauerte 8 Minuten (Herr Prof. Jurinac in den „Narodne novine").

48. Sissek (34° 2′; 45° 29′) 5^h 20^m Budap. Z. Fräulein Frieda Friedrich gibt in einem Berichte an die Wiener Sternwarte folgende Schilderung: Von dem gegen W gelegenen Balkon aus sahen wir hoch am Himmelsgewölbe, beinahe senkrecht über unseren Köpfen, eine glänzende Lichtkugel in scheinbarer Grösse der halben Mondscheibe erscheinen und in südwestlicher Richtung herabfahren. Der ganze Weg, den sie aus der Höhe durchlaufen hatte, war durch einen noch nach etwa 8 Minuten vollkommen sichtbaren Streifen — gleich einem Bleistiftstriche, den man über ein sehr lichtes Bild machen würde — gezeichnet, und an jener Stelle, an welcher das Meteor erschien, waren zwei kleine weisse Wölkchen noch nach 15 Minuten sichtbar. Es wurde kein Geräusch gehört. In einer späteren Mittheilung zeichnete die Beobachterin den geraden Streifen 64° gegen den Horizont geneigt, fügte ergänzend bei, dass derselbe oben mindestens doppelt so breit war als unten und gab an, dass der Endpunkt nach der „Compassrichtung SW" lag.

49. Greda (Comitat Agram, 34° 14′; 45° 23′) 5^h 25^m Budap. Z. Flugbahn von NE—SW gerichtet, beinahe durch das Zenith. Nachdem die Feuerkugel — mit Schweif, von Gestalt einer Stecknadel — in eine Menge Funken zerstoben war, blieb eine weisse Rauchwolke noch 10—13 Minuten sichtbar („Nar. novine").

50. Neugradiska (35° 1′; 45° 16′) 5^h 20^m Budap. Z. Der Ausgangspunkt war etwas südlich vom Zenith. Das Meteor näherte sich nahezu senkrecht der Erde. Das untere Ende war blitzartig gebrochen. Der Streifen, den es hinterliess, blieb noch 10 Minuten lang sichtbar. An zwei Stellen war er breit, wie eine helle, bläulichgrüne Rauchwolke. Es wurde kein Geräusch gehört („Nar. novine").

51. Mittrowitz (37° 18′; 44° 57′) $5^1/_2{}^h$. Meteor von seltener Pracht. Senkrecht ober dem Scheitel sah man eine feuerrothe Kugel, welche sich in einem langen Bogen über den ganzen Horizont gegen W bewegte, einen riesigen Lichtstreifen zurücklassend, welcher beiläufig noch 30^s sichtbar blieb. Das Meteor

verschwand in der Abendröthe, an welcher Stelle sofort ein wolkenartiges Gebilde, die Form eines lateinischen S annehmend, aufstieg und während $^1/_2$ Stunde am klaren Firmamente sichtbar war, nach welcher Zeit es sich langsam verzogen hat („Neue freie Presse").

52. Mercyfalva bei Temesvár (38° 50′; 45° 55′). Um 5^h Abends wurde unweit jener Stelle, wo eben die Sonne untergegangen war, ein herrliches Phänomen beobachtet. Ein Meteor platzte in geringer Höhe und zerfiel, einer Rakete gleich, in einen Haufen glänzender Körper. Von jener Stelle, wo die Feuerkugel explodirte, reichte bis in die Wolken hinauf ein hellglänzender Streifen, der sich später fadenförmig krümmte, mit abnehmender Helle an Breite zunahm und erst nach längerer Zeit gänzlich verschwand (N. fr. Presse).

53. Aus Banovac meldet das Petriniaer Localblatt vom 25. Jänner: Das Meteor vom 17. Jänner fiel unweit Žirovac (33° 49′; 45° 9′) in einem Walde an der bosnischen Grenze. Ein Augenzeuge behauptet, dass der Fall mit einer Detonation, Donner und einem unterirdischen Rollen verbunden gewesen sei.

54. Gospić (33° 2·4′; 44° 32·8′). Herr Prof. M. Jerković bemerkte um 5^h 15^m in etwa 35° vom Zenith ein hellleuchtendes, kugelförmiges, röthliches Meteor, dessen Flugbahn NW—SE gerichtet war. Es hinterliess einen während 10 Minuten sichtbaren gelblichen Streifen, welcher an den Enden dicker wurde und in der Mitte nach und nach verschwand. Der Beobachter fügte bei: „Eine Detonation habe ich, da ich im Zimmer war, nicht gehört" (durch Herrn Prof. M. Marek).

55. Gračac (Comitat Lika-Krbava, 33° 30′; 44° 17′) 5^h 15^m. Flugbahn E—NW. 4 Minuten nach dem Zerplatzen hörte man starken Donner. Ein intensiv weisser Streifen blieb zurück (wie oben).

56. Bihać (33° 32·2′; 44° 49′). Das Meteor, aus NE über die Stadt ziehend, explodirte mit einer starken Detonation und ein glänzendes Stück fiel blitzschnell oberhalb des Dorfes Žegar (33° 31·3′; 44° 48′, kaum 2 *km* SSW von Bihać) zu Boden. Der Streifen, den das Meteor hinterliess, war in der Mitte dünn, an den Enden dick, mattblau und 8 Minuten sichtbar („Nar. novine").

57. Ključ (34° 27′; 44° 31·5′). Wie ein von der Telegraphendirection in Serajevo an die k. k. meteorologische Centralanstalt gerichtetes Telegramm meldete, wurde in Ključ ein donnerähnlicher Knall, verbunden mit einer Erderschütterung wahrgenommen. Bestimmtere Angaben habe ich jedoch nicht erhalten können. Herr J. Cimburek, Amtsleiter der k. und k. Militärpost- und Telegraphenstation in Ključ, an den ich mich wendete, erwiderte, dass die Detonationen allerdings von den im Freien befindlichen Personen gehört wurden. Er selbst konnte nur über die zurückgebliebenen „Rauchwolken", die er selbst gesehen, Auskunft geben. „Dieselben zeigten sich unmittelbar nach Explosion des Meteors, aber nicht senkrecht über dem Scheitel, sondern in nordöstlicher oder etwas dem O näheren Richtung beginnend, also noch vor Ključ. Das untere Ende des Streifens, welcher eine zickzackförmige Linie darstellte, war direct in W." Er hatte zuerst röthliche, dann graugelbe und zuletzt bläuliche Farbe.

58. Varcar Vakuf (34° 42′; 44° 30′). Herr Amtsleiter Ráz schrieb mir: „Soviel mir bekannt, wurde hier keine Detonation vernommen, indessen soll sie von den Bergarbeitern des nahe gelegenen Werkes Sinjako gehört worden sein". Berichterstatter hat nicht das Meteor selbst, wohl aber die am Himmel zurückgebliebenen Spuren gesehen. Sie waren schlangenförmig, anfangs hellleuchtend, später violett, dann blassblau werdend und lösten sich endlich in hürdenartige Wölkchen auf.

Aus dem nahen Sinjako wurde mir durch den Herrn Bergmeister Syrovatka freundlichst mitgetheilt, dass „circa 6^s nach dem Zerplatzen eine Detonation gleich einem in der Ferne abgefeuerten Geschütze erfolgte". Das Meteor tauchte um $5^h\,20^m$ beiläufig im Zenith auf und nahm die Richtung gegen SW „in einer gegen den Horizont mehr geneigten als ebenen Bahn" (also keineswegs senkrecht). *D*: 5^s. „Am Ende des Laufes theilte es sich in viele kleinere Funken, die nach allen Seiten herabflogen und alsbald erloschen. Zuletzt blieb eine spiralig gewundene, bläuliche Wolke noch etwa 2 Minuten lang sichtbar. Die zurückgelegte Bahn mochte 25° lang gewesen sein und war unter einem Winkel von 30° gegen NW sichtbar". Der Bericht ist das Resultat mehrfacher Nachfragen, bezieht sich also kaum auf eine einzelne Beobachtung.

59. Jajce (34° 53′; 44° 20′) liegt noch weiter östlich und daher auch weiter vom Hemmungspunkte entfernt, als die beiden vorgenannten Orte. Zur Beurtheilung, ob dort Detonationen verbürgt anzunehmen seien, möge folgende Mittheilung des k. und k. Militär-Postamtsleiters Herrn J. Gerlich dienen: „Ein Soldat und ein Gendarm, welche eben aus dem Postamte kamen, sind auf die Erscheinung aufmerksam geworden, indem in der Luft ein Zischen hörbar wurde,[1] und als sie aufsahen, bemerkten sie, als ob sich der Himmel, welcher ganz wolkenlos war, geöffnet hätte und eine feurige Masse wie ein Blitz herausgekommen wäre. Als das Feuer verschwand, soll es einen Knall gegeben haben, und ist der Rauch zurückgeblieben. Als ich herauskam, war nur mehr der Rauch, dessen Form ich skizzirt habe, aber wohl über 15—20 Minuten lang zu sehen“. Dieses mir vorliegende Bild zeigt die langgezogene Rauchwolke mehrfach gewunden, aber nicht eben spiralig, am oberen, nordöstlichen Ende vielmal breiter als am unteren westlichen. Die in das Compasskreuz eingezeichnete Hauptrichtung des Streifens lässt schliessen, dass derselbe sehr merklich im Norden vom Zenith abstand und etwa von ENE—WSW gerichtet war.

In allen nun weiter folgenden Berichten ist von Detonationen nicht mehr die Rede.

60. Travnik (35° 18′; 44° 13′). Der hochwürdige Herr Gymnasialprofessor P. Fr. Hammerl, S. J., berichtete an die Wiener k. k. Sternwarte: Das Meteor durchzog in grossem Bogen, Rchtg.: NE—SW, während einiger Secunden die Atmosphäre und löste sich nach Art einer Rakete in eine grüne Lichterscheinung auf. Ein feiner, grünlicher Wolkenstreif bezeichnete noch mehrere Minuten lang die Bahn. Auf mein Ersuchen hatte der Herr Beobachter die Güte, noch folgende Ergänzungen zu liefern. Die Bahn wurde gezeichnet mit 51·5° Neigung gegen die Verticale des Endpunktes. Letzterer hatte $A = 115°$ (m). Die ganze von hier aus gesehene Bahn lag so ziemlich in NW.

---

[1] Oder vielmehr durch den Lichtblitz. Dieses, hier, wie auch sonst in Berichten so häufig vorkommende „Zischen“ beruht sicher auf Einbildung. Die Entfernung war jedenfalls so gross, dass ein mit der Meteorerscheinung auf irgend eine Art zusammanhängendes Zischen erst lange hernach hätte gehört werden können.

61. Serajevo (36° 6′; 43° 56′). *a)* Herr Gymnasiallehrer W. Marášek sagt in einem Berichte an die k. k. meteorologische Centralanstalt: Um $5^h\ 21\cdot5^m$ sah ich in der Gegend des Polarsternes ein grosses Meteor von beiläufig ein Zehntel Monddurchmesser, welches ich in seiner Bahn bis zum Westpunkte durch etwa 5^s beobachtete. Es erglänzte in wunderbar schönem, grünlichen Lichte und hinterliess unter lebhaftem Funkensprühen einen silberweissen Streifen, der sich nach etwa 3 Minuten zu weissen Rauchwolken ballte, die man durch weitere 4 Minuten beobachten konnte.

Durch die k. k. Sternwarte erhielt ich noch folgende bestimmtere Beobachtung des Herrn Postamtspraktikanten E. Rothe, welcher sich früher auch an Sternschnuppenbeobachtungen betheiligt hatte: *b)* $5^h\ 19^m$. „Imposante Erscheinung, weil noch Tageshelle.“ Nach einer gegen den Meridian orientirten Skizze wurde das Meteor zuerst in $A = 177\cdot5$, $h = 40°$ erblickt. Bis $A = 142\cdot5°$ erschien es schweiflos, erst hier entwickelte sich „nach einer Explosion“ der Lichtschweif. Bei $A = 115\cdot5°$, $h = 12°$ ist es leider hinter die Kuppel des Bazars getreten, so, dass das eigentliche Ende nicht gesehen wurde. *D*: 4^s. Kugel bläulichweiss, am Rande goldfarbig und wie ausgezackt. Schweif etwa viermal so lang als die Kugel, zuletzt durch einen kleinen, aber deutlichen Zwischenraum von dieser getrennt und nach rückwärts keulenartig verbreitert. Der Herr Beobachter hat auch eine in Farben ausgeführte Skizze beigefügt.

62. Ulok-Obrnje bei Nevesinje (35° 57′; 43° 24′). Herr Med. Dr. C. Cron, k. und k. Regimentsarzt, schrieb hierüber an die Sternwarte: Bei einer Tageshelle, welche noch das Lesen des Zeitungsdruckes gestattete, sah ich eine hellglänzende Scheibe etwa von ein Viertel scheinbarer Grösse des Vollmondes, welche wohl schon früher sichtbar gewesen sein mochte, mit blendend weissem sonnenähnlichen Lichte, an Intensität das Mondlicht vielfach übertreffend, langsam über das Firmament in einem flachen Bogen beiläufig mit der Richtung NE—SW ziehen. Die Scheibe schleppte einen langen, glitzernden, bogenförmigen Schweif hinter sich, der an Leuchtkraft stets zu wechseln schien und dessen Ende sich auf Augenblicke zu einer den Schwanzflossen der Fische ähnlichen, herrlich grünen Figur ausbreitete.

Kurz vor dem Verschwinden schien die Kugel besonders hell aufzuleuchten.

Nachträglich hat der Herr Beobachter auch Messungen mit Compass und Höhenbogen vorgenommen. Es ergab sich für den Anfang: $A = 198°$, $h = 18°$, für das Ende: $A = 130°$, $h = 15°$. Ein zweiter Beobachter erhielt in diesen beiden Azimuthen die Höhen $h = 20°$ und $h = 9°$. *D*: 5^s.

Schon eine beiläufige Vergleichung der wesentlichsten Beobachtungen dieser Meteoriten genügt, um zu erkennen, dass sie ungefähr über dem Dreieck Bihać, Gospić, Gračac das Ende ihres planetarischen Laufes gefunden haben mochten. Es ist zwar nicht unmöglich, obgleich nicht sehr wahrscheinlich, dass die Feuerkugel noch weiter westlich bis an die Meeresküste vorgedrungen sei, dagegen ist es noch viel unwahrscheinlicher, dass der Hemmungspunkt wesentlich mehr östlich jenseits der bosnischen Grenze gelegen war. Diese vorläufige Betrachtung gilt der Beurtheilung der Frage, ob die nachfolgende sorgfältige, von einem Freunde der Astronomie angestellte Beobachtung sich auf die geschilderte Erscheinung beziehen könne.

Aus **Nákófalva** bei **Gross-Kikinda** (38° 14′; 45° 53′) theilte der hochwürdige Herr Dechant F. **Löschardt** der k. k. Sternwarte mit, dass er am bezeichneten Abende ein „helles Meteor" bemerkt habe, jedoch nicht kurz nach 5^h, sondern beiläufig um 6^h (der Längenunterschied beträgt nicht ganz 17 Minuten). „Ich war", schreibt der Herr Beobachter, „soeben an mein Äquatoreale getreten, wobei ich mit dem Gesichte gegen W gerichtet stand. Plötzlich traf von der Seite her ein heller Lichtschein mein Auge, welches ich alsbald dahin wendete. Ich sah noch den bläulichweissen Kern das letzte Drittel seiner Bahn gegen β Ceti hin nehmen und dann plötzlich verschwinden, während seine ganze sichtbar gewordene Bahn noch $3-5^s$ als schwacher, schnell erblassender Lichtstreifen vom dunklen Himmel sich abhob." In einer dem Berichte beigefügten Skizze ist das gesehene Bahnstück durch das Sternviereck im Cetus, zwischen Mira und β Ceti, eingetragen, ungefähr von $\alpha = 26°$, $\delta = -10°$ zu $\alpha = 15°$, $\delta = -15°$. Ferner ist beigefügt: Die Richtung war NE—SW, und es muss das Meteor während des

Aufleuchtens den Meridian passirt haben. Die Thurmuhr, nach welcher die Zeit angegeben wurde, ist nicht sehr verlässlich, so dass der Herr Dechant geneigt war, dem Unterschiede der Epochen kein grosses Gewicht beizulegen und die Identität für wahrscheinlich zu halten.

Die Bahnlage am Himmel ist mit den sichersten Beobachtungen bezüglich des Radiationspunktes in solcher Übereinstimmung, wie sie in derartigen Fällen nur verlangt werden darf, aber in Bezug auf die Erde widerspricht sie ihnen ganz und gar. Nach den früheren Bemerkungen hätte der Endpunkt der Bahn aus Nákófalva durchaus nicht südlich, sondern weit westlich, ungefähr in 72° Azimuth und sehr tief erscheinen müssen, während β Ceti, wohin das Meteor von Osten her selbst nicht einmal gelangt ist, zur Zeit südlich, in $A = 10°$, $h = 25°$, stand. Es blieben noch zwei Möglichkeiten zu erörtern, nämlich, dass die Orientirung nach den Sternen erst geraume Zeit nach der Beobachtung stattgefunden hatte, da dieselben schon weit gegen Westen hinabgerückt waren, oder dass die Feuerkugel in der Nähe von β Ceti nicht erloschen ist, sondern durch ein Hinderniss gedeckt wurde. In der hierüber gepflogenen Correspondenz suchte ich mir desshalb hauptsächlich darüber Klarheit zu verschaffen. Auf die Frage, ob zur Beobachtungszeit die Walfischsterne schon sichtbar waren und wann die Feststellung erfolgte, erhielt ich die Aufklärung: „Zur Beobachtungszeit war nur β Ceti sichtbar. In der Absicht, die Bahn sofort zu fixiren, hielt ich mich an diesen. Bis ich meine Sternkarte mit dem Himmel verglichen hatte, mag etwa eine Viertelstunde vergangen sein. Die Erscheinung spielte sich für mich durchaus ganz südlich ab, nur die Bewegungsrichtung war gegen SW. Selbst in Anbetracht der etwas späteren Fixirung kann die Feuerkugel, welche ganz bestimmt vor meinen Augen erloschen ist, nicht einmal über 20° Azimuth hinausgegangen, geschweige denn auf 70° gekommen sein. Die Höhe kann etwas, aber gewiss nicht erheblich, geringer gewesen sein, als angegeben.“ Das Endazimuth aus Kalocsa (46), welches ich dem Herrn Beobachter u. A. mittheilte, hielt er für gänzlich unvereinbar mit seiner Wahrnehmung, da das von ihm gesehene Meteor aus Kalocsa nicht in SW, sondern östlich von S erloschen sein musste.

Es sind daher unlösbare Widersprüche vorhanden, und somit erlangt denn auch der Unterschied der Epochen, welcher immerhin über $^1/_2$ Stunde beträgt, einiges Gewicht. Das in Nákófalva beobachtete Meteor kann unmöglich mit demjenigen identificirt werden, auf welches sich die früher mitgetheilten zahlreichen Berichte beziehen. Nur die Zugehörigkeit zum selben Radiationspunkte bleibt in der That sehr wahrscheinlich.

Aus 30 Zeitangaben erhält man im Mittel für die Epoche des Falles: 1890, Jänner 17, 5^h 11^m mittlerer Wiener Zeit.

Hemmungspunkt.

Zur Bestimmung der Lage des Hemmungspunktes konnten die Azimuthe aus 20 Beobachtungsorten benützt werden, und zwar die unter Nr. 6, 15, 19, 20, 25, 28, 30*a*, 33, 35, 38, 48, 57, 60 und 62 im Vorhergehenden schon angeführten Werthe.

In Nr. 15 ist zwar das Ende am Dachfirste bezeichnet, doch musste mit Rücksicht auf die Höhenangabe das Erlöschen sicher unweit davon stattgefunden haben. Für Vöslau (13) wurde das Ende in S ($A = 0°$) genommen. Für Wien (10) ist das Mittel aus den vier Angaben *a—d*, d. i. rund $A = 5°$, nahe übereinstimmend mit dem Messungsresultate unter *a)*, beibehalten worden, für Krems (8) das Mittel aus *a*, *b* und *d*, da *c* allzustark abweicht. Hinsichtlich der Beobachtung *b)* gilt auch das oben bei Nr. 15 Bemerkte. Für Hirt (30) konnte kein Mittel genommen werden, da die die Endazimuthe in *a)* und *b)* sich fast um einen halben Quadranten unterscheiden. Es konnte nur die eine oder die andere Angabe beibehalten werden, und zwar mit Rücksicht auf die Nebenumstände offenbar nur *a)*. Aus demselben Grunde sind die im nahen Friesach (29) gegebenen Azimuthe für das Ende nicht annehmbar. Aus Pola (41) liegen drei in dieser Hinsicht auch sehr stark von einander abweichende Angaben vor, von welchen jene unter *b)* vielleicht auf einem Schreibfehler oder anderweitigen Versehen beruht. Ich habe jedoch in Ermanglung hinlänglicher Anhaltspunkte zur Ausscheidung doch das Mittel aus allen dreien, d. i. $A = 285°$, in Rechnung gezogen. In Kalocsa

(46) und Serajevo (61, b) ist eigentlich der Endpunkt selbst nicht gesehen worden; man bemerkt jedoch leicht, dass die betreffenden Positionen schon nahe an demselben liegen. Um diese offenbar sehr sorgfältigen Beobachtungen, welche auch der Lage nach sehr wichtig sind, verwerthen zu können, wurde nach einer vorläufigen Ermittlung des Hemmungspunktes die scheinbare Höhe desselben für beide Orte bestimmt, in welcher wegen der beträchtlichen Entfernung keine grosse Unsicherheit entstehen konnte, und dann in der Verlängerung der betreffenden beiden scheinbaren Bahnen jenes Azimuth in Rechnung gezogen, welches zur berechneten Höhe gehört, nämlich für 46 $A = 50°$, für 61 $A = 113°$.

Einige Richtungsangaben für den Endpunkt mussten ausgeschlossen werden, weil sie leicht ersichtliche Abweichungen von solcher Grösse zeigten, die den erfahrungsgemässen mittleren Fehler mehrfach übersteigt. Dieselben sind fast durchwegs in — theilweise wohl unbewussten — Bahnverlängerungen begründet, welche aus der allgemein verbreiteten Meinung entspringen, dass die meteorischen Massen auch nach dem Erlöschen ihren Weg in der ursprünglichen Richtung bis zur Erdoberfläche verfolgen. Bei schwach geneigten scheinbaren Bahnen können sehr beträchtliche, und zwar einseitig wirkende Fehler entstehen, wenn die Beobachter, statt unbefangen den Punkt des Erlöschens aufzufassen und zu bezeichnen, denjenigen angeben, welchen sie infolge einer fehlerhaften Gedankenoperation als die Niederfallstelle ansehen.

Von den benützten 20 Richtungen haben diejenigen, welche sich als Mittelwerthe mehrerer brauchbaren Angaben darstellen, die entsprechenden Gewichte erhalten, nämlich Wien (10): 4, Krems (8) und Pola (41) je 3. Die Azimuthe aus Vöslau (13) und Sissek (48), welche nur beiläufig zu nehmen und wohl doppelt so unsicher als Messungen sein mögen, erhielten die Gewichte $^1/_4$, alle übrigen wurden mit der Gewichtseinheit in Rechnung gezogen.

Die Verwerthung der einzelnen Beobachtungen zum Schlussresultate ist so erfolgt, dass die Summe der Producte $p\,(\cos h \triangle A)^2$ ein Minimum wird, wo $\triangle A$ die Verbesserung des Azimuthes, h die scheinbare Höhe des Endpunktes und p das betreffende

Gewicht bezeichnet. Folgendes Resultat ergab sich für die geographische Lage des Hemmungspunktes:

Östl. Länge: 33° 25·3′±5·9′ (7·7 *km*) mittlerem Fehler
Nördl. Breite: 44° 32·8′±3·0′ (5·5 *km*) „ „

Dieser Punkt befindet sich in der Krbava-Niederung, nordwestlich von dem kroatischen Dörfchen Udbina, SSW von Bihač, östlich von Gospić. Selbstverständlich kommt eigentlich für die wahrscheinliche Fallstelle, schon wegen der oben bezeichneten unvermeidlichen Unsicherheit, eine ziemlich ausgedehnte Fläche in Frage. Da sowohl östlich als westlich der Krbava schwach bewohntes Gebirgsland liegt, so ist der Mangel an Nachrichten aus dieser Gegend wohl erklärlich.

Der mittlere Fehler einer Beobachtung von der Gewichtseinheit ergab sich zu ±6·0°.[1]

Eine ausführliche Zusammenstellung der einzelnen Azimuthverbesserungen findet man im Anhange.

Würde es gelungen sein, bestimmtere Angaben, wenigstens aus den grösseren nächstliegenden Orten, wie Bihač, Gospic und Gračac, zu erhalten, so wäre die Ermittlung wohl noch sicherer geworden.

Für die Bestimmung der linearen Höhe des Hemmungspunktes liegen nur aus 13 Orten brauchbare Beobachtungen, jedoch aus einzelnen mehrfache, im Ganzen 23 vor. Es gereicht aber der Sicherheit des Resultates zum grossen Vortheile, dass dieselben mit Ausnahme einer einzigen (41, *c*) auf directen Messungen mit dem Gradbogen und nicht auf Schätzungen beruhen. Benützt wurde je eine Messung aus 1, 10, 15, 19, 20, 33, 46, 61, wogegen aus 8 und 29 je vier, aus 41 drei, aus 30 und 62 je zwei Angaben zur Verwerthung gelangten. Für Kalocsa (46) und

---

[1] Unter der Voraussetzung, dass die Mittel aus den mehrfachen Beobachtungen aus je einem Orte, wie z. B. in Wien, als einzelne Beobachtungen mit dem entsprechenden Gewichte angesehen werden. Löst man dagegen diese Mittel auf und gibt die Verbesserungen der thatsächlichen Beobachtungen an, wie dies im Anhange geschehen ist, so stellt sich der mittlere Fehler höher, nämlich zu ±8.7°, d. h. mit anderen Worten, jene Mittel haben das ihnen von vornherein beigelegte Gewicht eigentlich nicht ganz verdient.

Serajevo (61) sind jene scheinbaren Höhen in Rechnung gezogen worden, welche in dem nunmehr definitiv bekannten Endazimuthe der angegebenen scheinbaren Bahn entsprechen.

Der wahrscheinlichste Werth für die Höhe des Hemmungspunktes über der Erdoberfläche folgt hieraus zu 39·7 *km* ± 1·9 *km* mittlerem Fehler, d. i. etwas über 5·3 geogr. Meilen.

Die Verbesserungen der benützten scheinbaren Höhen sind mit jenen der Azimuthe im Anhange gegeben. Ihr mittlerer Fehler ist nur ± 2·6°, diesmal also vergleichsweise gering. Nach unserer Ermittlung lag der Hemmungspunkt 30 *km* östlich von Gospic. Er müsste dort also über 53° hoch gesehen worden sein, was mit dem unter Nr. 54 angegebenen Zenithabstande von 35°, wenn man diesen für den Endpunkt gelten lässt, gut genug übereinstimmt.

Radiationspunkt und Bahnlage gegen die Erde.

Aus der oben gefundenen Lage und Höhe des Hemmungspunktes ist für alle jene Beobachtungsorte, welche brauchbare scheinbare Bahnbogen lieferten, die scheinbare Position des Endpunktes berechnet und statt der beobachteten in der nachfolgenden Übersicht unter II angeführt worden. Ausser jenen Beobachtungen, welche den unter I angesetzten Ort der — subjectiven — ersten Wahrnehmung bezeichnen, sind auch solche benützt worden, welche nur die scheinbare Neigung der Bahn angeben, und zwar ist dies in derselben Weise geschehen, wie ich es bei ähnlichen Anlässen schon wiederholt erörtert habe.[1] Für solche scheinbare Bahnen (sie sind mit einem * bezeichnet) ist unter I der eine Knoten am Äquator angesetzt.

Bahnen, welche auf Messungen oder Beurtheilung nach Gestirnen beruhen, haben das Gewicht 1 erhalten, die übrigen das Gewicht $^1/_4$. Wo die benützte scheinbare Bahn durch Vereinigung mehrerer, aus einem Orte vorliegenden Beobachtungen

---

[1] Neuerlich hat auch Herr Dr. F. Koerber in Berlin in seiner interessanten Untersuchung über das Meteor vom 15. October 1889 von der Einführung der scheinbaren Neigungen mit sehr günstigem Erfolge Gebrauch gemacht. Annalen des k. k. naturhist. Hofmuseums, V, S. 463 ff.

entstanden ist, wurde auch das Gewicht dementsprechend bemessen.

Da die meisten zur Verwendung gelangten Daten in dem vorausgegangenen Berichte über die einzelnen Beobachtungen ohnehin angeführt sind, so bedürfen nur noch einzelne Fälle einer besonderen Begründung. Für Krems (8) sind die Beobachtungen *a)* und *c)* auf eine mittlere Bahn reducirt worden, ebenso für Wien (10) die drei *a)*—*c)*, die beiden letzteren jedoch nur mit je $^1/_4$ Gewicht. Aus Friesach (29) konnten sieben Bahnen benützt werden, welche eine gute Übereinstimmung in der Lage zeigen, nämlich *a)*—*e)*, dann *f)*—*h)*. In Hirt (30) sind die Bogen *a)* und *b)* der Lage nach vereinigt worden. Dadurch ist der weit gegen NE hinausgerückte Anfangspunkt in *b)* unschädlich gemacht. Ähnlich wurden für Klagenfurt (32) die Angaben von Seeland und Pichler verbunden und in Pola (41) alle drei, *a)*—*c)*, letztere nur mit $^1/_4$ Gewicht vereinigt. Aus Kalocsa (46) liegen nebst einer Positionsangabe noch zwei Neigungsschätzungen vor, welche mit je $^1/_4$ Gewicht einbezogen worden sind. Die Angabe von Neugradiska (50) „fast senkrecht“ war erst ziffermässig zu deuten. Ich habe 10° Zenithabstand für den Bahnbogen genommen, weil eine solche Neigung gegen die Verticale dem Laien eben schon auffallend wird. Für Serajevo (61) wurden *a)* und *b)* mit je $^1/_4$ Gewicht benützt, weil die Höhenangaben nur auf Schätzungen beruhen. Für Ulok (62) ist die mittlere Bahn ebenfalls aus beiden Beobachtungen geschlossen worden. Endlich habe ich auch die Wahrnehmung auf Schiff „Lussin“ mit der allerdings nur beiläufigen Bestimmung der Horizontknoten E—W benützt, weil der Beobachtungsort dem Endpunkte relativ nahe lag und eine etwas grössere Unsicherheit in der Angabe der Bewegungsrichtung nicht sehr schädlich werden konnte.

Unbenützt blieben die Neigungsschätzungen aus Grafenberg (5) und Sissek (48), weil sie offenbar namhaft zu grosse Werthe geben. Der Angabe aus Mittrowitz (51), „senkrecht ober dem Scheitel“, fehlte die nothwendige Ergänzung, dass die Bahn senkrecht schien. Die Erfahrung lehrt, dass noch ziemlich grosse Zenithdistanzen als scheitelrecht gelten.

Die scheinbaren Bahnen, welche zur Ableitung des Radiationspunktes benützt wurden, sind folgende:

	I		II		
	α	δ	α	δ	Gewicht
1. *Hradisch (1).........	71°2	0°	357°0	—36°7	1
2. Waidhofen (4).......	63·3	—13°0	19·4	—37·8	1/4
3. *Mistelbach (6).......	96·4	0	4·8	—37·4	1/4
4. *Nied.-Kreuzstetten (7).	94·0	0	5·5	—37·4	1/4
5. Krems (8)...........	74·1	—17·7	16·0	—37·9	2
6. Wien (10)...........	82·6	— 4·7	6·6	—36·3	3/2
7. *Baden (12)..........	87·5	0	7·7	—37·1	1/4
8. Neunkirchen (15).....	21·7	—30·7	9·0	—36·6	1
9. Ardagger (18).......	58·3	—20·3	24·9	—27·7	1/4
10. Kremsmünster (19)...	68·4	—19·6	35·2	—35·3	1
11. *Neumarkt (28).......	84·0	0	37·7	—33·3	1/4
12. Friesach (29)........	60·8	—17·2	39·1	—32·7	7
13. Hirt (30)............	65·4	—14·4	38·6	—32·6	2
14. *Klagenfurt (32)......	92·0	0	43·8	—30·4	1
15. *Sonnegg (33)...	87·0	0	38·0	—31·6	1/4
16. Marburg (36)........	98·6	+ 5·8	17·4	—33·9	1
17. Laibach (37).........	83·8	+ 0·1	47·0	—26·4	1
18. Pola (41)............	96·4	+12·6	83·8	+ 1·1	2 1/4
19. *Schiff „Lussin“ (42)...	103·8	0	143·8	+64·7	1/4
20. *Kalocsa (46).........	28·0	0	322·3	—21·4	3/2
21. *Neugradiska (50).....	346·0	0	320·5	—12·0	1/4
22. *Travnik (60).........	93·8	0	286·0	+20·2	1/4
23. Serajevo (61)........	223·4	+85·7	279·9	+20·0	1/2
24. Ulok (62)............	159·2	+61·3	268·7	+29·5	2

Hieraus wurde die Lage des scheinbaren Radianten wie in früheren Fällen berechnet, und es ergab sich für denselben:

Rectascension $= 113 \cdot 6° \pm 2 \cdot 6°$ mittl. Fehler

Declination $= +21 \cdot 7° \pm 2 \cdot 0°$ „ „

im östlichen Theile der „Zwillinge“.

Für den mittleren Fehler einer Beobachtung von der Gewichtseinheit ergab sich $\pm 4 \cdot 8°$. Im Anhange sind die einzelnen Verbesserungen sowohl für die beobachteten Positionen, als auch für die Neigungen angeführt.

Nach dem obigen Resultate hatte die in der Atmosphäre beobachtete Bahn gegen die Erde am Endpunkte folgende Lage:

Azimuth der Bahn........... 248·7°

Neigung „ „ .... 9·3°.

Die Feuerkugel kam daher ziemlich genau aus ENE, und ihr Lauf hatte nur eine geringe Neigung gegen den Horizont, was sich in den Mittheilungen aus den nördlich entfernter gelegenen Beobachtungsorten auch deutlich ausprägt. Die Bahn ging über die Orte Torda, Offenbánya, etwas südlich von Lippa, dann über Hatzfeld, nur wenig südlich am Zenith von Nákófalva vorbei, über Szt. Tamás, Bács, Brod, Kamengrad (Bosnien) zum Endpunkte in Kroatien.

In Wien (10) wurde nach den Angaben *a)* und *c)* das Aufleuchten ungefähr 157 *km* oder 21·2 g. M. über der Gegend von Offenbánya beobachtet. Nur wenig später fallen die Wahrnehmungen aus Krems (8, *c*) und Marburg (36). In Hirt (30, *b*) ist sicher das Meteor schon viel früher, und da es noch höher war, gesehen worden, doch lässt sich die Beobachtung nicht weiter verwerthen, weil die Bahn sogar über den Radianten hinaus verlängert erscheint. Auch die Angabe aus Cattaro (45) deutet darauf hin, dass das Meteor dort schon in grosser Höhe wahrgenommen worden ist.

An den meisten Orten, nämlich in etwa 70% aller jener, aus welchen Mittheilungen über die erste Wahrnehmung vorliegen, ist die Feuerkugel erst viel später, aber auch nicht gleichzeitig aufgefasst worden, im Mittel ungefähr in dem Momente, da sie 77 *km* oder circa 10 g. M. über der Gegend von Brod die bosnische Grenze kreuzte.

Grösse und Lichtentwicklung der Feuerkugel, Residuen, Schallwahrnehmungen.

Der Hauptsache nach ist das Meteor, wie gewöhnlich, fast überall als birnförmig bezeichnet worden. Zur Abschätzung der Grössenverhältnisse eignen sich nur die Vergleichungen mit dem Monde oder mit der Sonne. Wird der scheinbare Monddurchmesser als Einheit genommen, so geben die Beobachtungen Wien (10) *c)*: 0·5 (dagegen drei andere von dort: 1), Krems (8): 0·17, Kürnberg (20): 1, Hirt (30) und Sissek (48): 0·5, Serajevo (61): 0·1, Ulok (62): 0·25, Pola (41): 0·16.

In Anbetracht der Angaben aus den näher gelegenen Orten Sissek, Pola und Serajevo müssen jene Vergleichungen aus Wien, welche Mondgrösse angeben, sowie auch die aus Kürnberg, als

beträchtliche Überschätzungen wohl ausser Betracht bleiben. Aus den übrigen sieben ergibt sich, wenn die Grössenschätzung auf den Endpunkt bezogen wird, im Mittel der Querdurchmesser der leuchtenden Meteorsphäre zu 490 *m* ± 100 *m* oder etwa 20% m. F. Die mittlere Unsicherheit einer Abschätzung im Vergleiche mit dem Monde stellt sich bezüglich der sieben benützten Angaben auf ± 5·3′ oder ungefähr 17% des scheinbaren Monddurchmessers, abgesehen von einseitig wirkenden Fehlerquellen. Die Vergleichung konnte nur nach dem Gedächtnisse erfolgen, da der Mond nicht am Himmel stand. Wie schon erwähnt, erschien das Meteor verlängert, und zwar in der Flugrichtung. Einige Beobachtungen geben hierüber Verhältnisszahlen an. In Karlstein (3) erschien es zweimal so lang, in Wien (10, *h*) viermal, in Neumarkt (28) fünfmal so lang als breit. Die Längsaxe dürfte also wohl 2 *km* betragen haben.

Angaben über die Farbe des Lichtes der Feuerkugel haben fast alle Beobachter geliefert. Überwiegend, nämlich 31mal unter 55 Angaben, d. s. 56%, wird dieselbe als grün in verschiedenen Abstufungen (grün schlechtweg 14mal, grünlich und gelbgrün 9mal, bläulichgrün 8mal) bezeichnet. Weiss kommt 12mal oder bei 22% der Beobachtungen, blau 5mal, gelb und goldfarbig 4mal, feuerroth oder röthlich 3mal vor. In der Beschreibung Wien (10, *g*) wird ausdrücklich hervorgehoben, dass der Kern grünlichweiss, der Rand gelbroth war. Analog ist das Farbenbild, welches Herr Rothe in Serajevo entworfen hat, nur ist der Kern mehr bläulich. Den Beobachterinnen Ungar und Rosenwald in Friesach (29, *f*) schien es, dass sich um die compacte Kugel ein „goldener Schein“ gebildet habe. Einige Beobachter berichten über Farbenänderungen zumeist in dem Sinne, dass das Licht kurz vor der Hemmung röthlich oder roth wurde, so: (1), (10, *b*), (35).

Jene Beobachter, welche das Meteor sehr früh bemerkt haben, bezeichnen es als sternartig und schildern dann die Bildung des Schweifes. So heisst es in der oben erwähnten Beobachtung (29, *f*), dass sich aus dem „goldenen Schein“ im weiteren Verlaufe ein Schweif gebildet habe. Wandelnig in Hirt (30) sagte: Anfangs war kein Schweif zu sehen, erst später bildete sich ein lichter Streifen aus Funken. Herrn Pfarrer Mayerhofer in

Grafenberg (5) schien das Lichtbild zuerst ziemlich rund und weiss, dann von rötlichgelber Farbe, sich verlängernd und einen Schweif bildend, und Herr Dr. Linhart in Pola (41, *a*) bemerkte, dass sich kurz vor dem Zerstieben am hinteren Ende des länglichen, bläulichweiss leuchtenden Meteors ein kurzer gelbrother Schweif gebildet hatte. In Pola mussten nach der Bahnlage die Dimensionen mehr verkürzt erscheinen.

Die Länge dieses Schweifes wird übrigens sehr verschieden angegeben, auch dort, wo nicht perspectivische Verkürzungen in Betracht kommen. Zum Theile rührt dies wohl auch davon her, dass einige Beobachter darunter nur die Verlängerung der Meteoraxe selbst, andere wieder den ganzen langen Streifen verstanden hatten, welcher den Lauf des Meteors bezeichnete und auch nach dem Verschwinden desselben noch einige Zeit sichtbar blieb. Mehrere Beobachter unterschieden jedoch genau den Schweif vom länglichen Meteorkern, wie eben z. B. jener in Pola. Herr Rothe in Serajevo (61) zeichnet den Schweif nur viermal so lang, als die Längsaxe des Kernes und — er fasste das Bild im letzten Theile der Bahn auf — durch einen kleinen Zwischenraum von diesem getrennt. Dagegen melden Meiselding (31): Kugel von Kindskopfgrösse, Schweif 2 *m* lang, Marburg (36): Kugel wie ein Menschenkopf gross, Schweif von Manneslänge, Greda: Schweif 18—20mal so lang als die Kugel. Im Mittel könnte man hieraus auf eine Schweiflänge von 15—20 *km* wohl schliessen.

Die Angaben über die Farbe des Schweifes lauten zwar ebenfalls sehr verschieden, allein in den sorgfältigsten Beobachtungen wird, wie in der des Herrn Stabsarztes Dr. Linhart, der Contrast zwischen der grünlichen oder bläulichen Farbe der „Kugel“ und dem röthlichen, gold- oder feuerfarbigen Lichte des Schweifes hervorgehoben, so in Hradisch (1), Baden (12), Klagenfurt (32, Pichler und Reiner), Sonnegg (33) etc. Die Beobachter in Mistelbach (6), Waidhofen (4) und, wie schon oben erwähnt, jener in Hirt (30) empfingen den Eindruck, als ob der Schweif, den das Meteor, wie sie sagen, mit sich schleppte, aus Funken gebildet gewesen wäre.

Was nun die Auflösung der Feuerkugel betrifft, so erwähnen einige Mittheilungen ausdrücklich die Wahrnehmung, dass sich

kurz vor der Hemmung mehrere Stücke absonderten, oder auch, dass sich der Kern überhaupt theilte in drei, fünf oder mehrere Stücke. Die betreffenden Bemerkungen findet man unter Wien (10, *a*), Vöslau (13), Kürnberg (20) und Lussin (42) ausführlich wiedergegeben.

Nicht ganz auf dieselbe Erscheinung, sondern vielmehr, wie mir scheint, auf Vorgänge in einem früheren Momente beziehen sich einige andere sehr bemerkenswerthe, in einer gewissen Übereinstimmung befindliche Wahrnehmungen. Herr Director Müller in Pola (41, *b*) bezeichnete das Meteor überhaupt als einen wenige Grade langen Streifen, der an zwei Stellen vollkommen deutlich unterbrochen war. Der Herr Beobachter legte Gewicht auf diese Thatsache, indem er sie an einer beigefügten Skizze besonders erläuterte. Ähnliches finden wir auch in anderen Berichten; so meldet Weiz (24): „Der Lichtstreifen löste sich los, verschwand, um einem neuen Platz zu machen". Dies wiederholte sich einigemale. Aus Czeitsch (2) wird berichtet, dass das Meteor zuletzt wie „zerrissen" war. Auch die Mittheilung aus Krems (8, *a*), dass das Meteor „zeitweise" Streifen hinterliess, klingt ähnlich. Vielleicht gehören hieher auch die Wahrnehmung in Marburg (36), dass die Bewegung „wie ruckweise" war, und dass in Kalocsa (46) das Meteor einen Augenblick stehen zu bleiben schien und eine besondere Explosion machte. Besondere momentane Änderungen der Lichtintensität, welche von „Funkensprühen" begleitet waren, meldet auch Kremsmünster (19). Einen ähnlichen Bericht aus Hof (14) will ich hier anführen, weil er vorne weggeblieben ist: In der Flugbahn fanden „zwei schwache Explosionen statt, die von Funkenregen begleitet waren". Dasselbe wurde in Taufkirchen (17) wahrgenommen. Aus Basovizza (40) findet sich ebenfalls eine Andeutung über mehrmaligen Lichtwechsel.

Man kann solche stark hervortretende Ungleichheiten, helleres Aufleuchten, anderseits auch starke Abschwächungen in der Lichtentwicklung, wie mir scheint, recht wohl daraus erklären, dass stossweise von den feineren Partien immer jene gleichzeitig zur Hemmung gelangten, welche ungefähr von gleicher Grössenordnung waren. In Kalocsa (46) wurde der Punkt, wo das Meteor in seiner Bahn einmal besonders explodirte und, wie der Knabe

Moda sagte, „stehen blieb“, was wohl auf Täuschung beruhte, fixirt, so dass nachträglich dessen Position ($A = 43\cdot6°$, $h = 11°$) gemessen werden konnte. Hieraus würde sich die wirkliche Lage dieses Punktes 90 *km* vor dem Ende, 55 *km* über der Gegend zwischen Banjaluka und Priedor ungefähr ergeben.

Auch der schliesslichen Hemmung des bis an den Endpunkt gelangten Schwarmes ging unmittelbar ein besonders helles Aufleuchten voraus [siehe Hotič (38) und Ulok (62)], und dann erfolgte die Auflösung in zahlreiche Partikel, welche den aufmerksamen Beobachtern einen Regen rother oder röthlicher Funken darstellten [siehe Wien (10), Neumarkt (28), Villach (35), Pola (41), Lissa (43), Greda (49), Sinjako (58) etc.].

Nach dem Verschwinden der Feuerkugel bezeichnete der zurückgelassene Streifen einen Theil ihrer Bahn, welcher, nach mehreren übereinstimmenden Angaben noch einige Secunden leuchtend, dann aber silberweiss, bläulich, bräunlich und rauchartig erschien, später breiter wurde und gleichfalls eine verschiedenartig gekrümmte Rauchsäule darstellte, die sich erst nach längerer Zeit in Gewölk auflöste. Nicht alle Phasen dieser Entwicklung sind allgemein beobachtet worden, wohl desshalb, weil sie in den entlegeneren Gegenden nicht auffallend genug erschienen sind oder vielleicht überhaupt nicht mehr gesehen werden konnten. Würde der Zusammenhang der zahlreichen Beobachtungen in diesem Falle nicht so gewiss sein und würden ihrer nur einzelne wenige vorliegen, so könnten aus den auffallenden Unterschieden der Wahrnehmung wohl Zweifel an der Identität erwachsen. Eben desshalb halte ich es mit Rücksicht auf künftige Fälle für wichtig, diese Umstände besonders hervorzuheben.

Abgesehen davon, dass aus einigen Orten ausdrücklich gemeldet wird, das Meteor sei ohne Zurücklassung irgend einer Spur verschwunden [Wien (10, *c*), Marburg (36), Cattaro (45)], ist bei einer grossen Anzahl der Beobachtungen von einer Spur wenigstens nicht die Rede und bei der Mehrzahl nicht von einer bleibenden Spur. Es wäre ermüdend, hierüber alle Einzelheiten anzuführen, und ich will nur einige Beispiele erwähnen. Von den weiter entfernten Orten bietet Wien (10) die meisten Beobachtungen. Die Angabe *c)* ist, wie schon erwähnt, ausgesprochen

negativ. Unerwähnt bleibt irgend eine Spur, ferner bei *a)* (sonst so sorgfältig!), *d)*, *g)* und mehreren anderen, nicht besonders hervorgehobenen Mittheilungen. Herr Trauter und Herr Zimmermann sprechen von einem feurigen Streifen, welcher die durchlaufene Bahn bezeichnete, der aber nach 2ˢ oder nach „kurzer Zeit" verschwand. In der Beobachtung *e)* heisst es, dass ein dunkler Streifen nur 1ˢ lang sichtbar blieb und endlich in *f)*, dass eine Spur wie von leicht gekräuseltem Rauche zurückblieb, was als eine sichere Beobachtung kaum zu deuten ist. Ganz ähnlich lauten die Berichte aus den übrigen entfernteren Orten bis nach Kärnten, und erst aus der Gegend von Klagenfurt kommen, aber auch noch vereinzelt, Nachrichten, dass „ein in vielen Farben leuchtender Schweif noch lange nach dem Verschwinden des Meteors sichtbar war". Ich sage vereinzelt, weil z. B. selbst aus Laibach (37), Hotić (38), Pola (41, drei Beobachtungen!) nicht die geringste Andeutung über die zurückgebliebene Spur vorliegt. In Opčina (39) bei Triest wurde jedoch der andauernde Streifen mit Bestimmtheit beobachtet, und Sissek (48) liefert schon eine genaue Beschreibung, die man vorne findet. Weiter im Osten ist an ferneren Orten, wie in Warasdin (47), Kalocsa (46), Mittrowitz (51), dann bei Temesvár (52) der Streifen durch lange Zeit sehr gut gesehen und auch beschrieben worden. Die zahlreichsten Nachrichten besitzen wir selbstverständlich aus Kroatien und Bosnien, während wieder weiter südlich [Ragusa (44), Ulok (62)] nichts derart Auffallendes bemerkt worden ist. Man wird leicht erkennen und auch erklärlich finden, dass es sich hier nicht so sehr um die Entfernung vom Endpunkte, als von der durchlaufenen Bahn handelt.

Kalocsa lag dem Endpunkte nicht viel näher als Wien, und Temesvár sogar weit ferner, und doch war dort und hier die Rauchsäule sehr ausgeprägt sichtbar. Beide Orte lagen aber der Bahn weit näher als Wien. Im gegenwärtigen Falle ist aus keinem Orte, welcher weiter als 280 *km* von der Bahn des Meteors entfernt lag, eine bestimmte verlässliche Nachricht über die zurückgebliebene Rauchspur eingelangt, ja, die allgemeine — nämlich allerorten sich aufdrängende — Wahrnehmung erscheint auf noch engere Grenzen eingeschränkt, auf etwa 170 *km*, während die Feuerkugel selbst bis gegen 600 *km* weit gesehen worden ist.

Es können also zwei verschiedene Beobachtungen sich allerdings auf dieselbe Erscheinung beziehen, wenn auch der einen das so charakteristische Kennzeichen, wie es die Rauchspur darzustellen scheint, mangelt.

Messungen der Lage beider Streifenenden liegen nicht vor. Nach der Gesammtheit der Schilderungen zu schliessen, befand sich das untere oder westliche Ende keinesfalls weit von der Hemmungsstelle entfernt, wenn auch durch die hin und wieder angedeutete schliessliche Lostrennung des Meteorkernes der Fall nicht ausgeschlossen erscheint, dass, wie bei den Meteoriten von Mocs, der Streifen nicht völlig bis an das Ende der durchlaufenen Bahn gereicht habe. Über die Lage des oberen, östlichen Endes gewähren die Mittheilungen aus Ključ und Jaice einige Anhaltspunkte. Im ersteren Orte wurde das obere Ende in NE, „aber mehr E näher", am anderen etwas östlich von NNE gesehen. Es ist daher ziemlich wahrscheinlich, dass es sich etwa 77 *km* oder beiläufig 10 g. M. über der Gegend von Türkisch-Brod befunden hat, also ungefähr dort, wo, wie früher hervorgehoben, die Feuerkugel von den meisten Beobachtungen im Mittel zuerst wahrgenommen worden ist. Die Länge der Rauchsäule von hier bis in die Nähe des Endpunktes betrug kaum weniger als 190 *km* oder 25·6 g. M.[1]

Auch der Streifen zeigte Ungleichheiten, welche vielleicht den früher hervorgehobenen Veränderungen der Lichtintensität entsprechen. So meldeten: Gospić (54), dass der Streifen an den beiden Enden dicker war und in der Mitte nach und nach ver-

[1] Alle diese Verhältnisse sind ganz ähnlich wie bei dem grossen Meteor vom 17. Juni 1873, welches von mir selbst genau beobachtet und bei Gelegenheit der Bahnbestimmung in den Astron. Nachr. 1955—1956 sowie im 12. Bande der Verh. des naturf. Ver. in Brünn eingehend geschildert worden ist. Dort begann der 20 Meilen lange Streifen 9 Meilen hoch, eben auch an jenem Punkte, wo die meisten Beobachter das erste Aufblitzen angaben, obgleich von einigen die Feuerkugel auch schon viel früher gesehen worden war. Ich kann daher auch hier kurz an diejenige Bemerkung erinnern, welche ich damals dieser Feststellung beigefügt habe: „Dies scheint mir nicht zufällig zu sein, sondern vielmehr eine sprungweise Erhöhung der Lichtintensität anzudeuten, und zwar scheint eine besondere Steigerung in jenem Punkte stattgefunden zu haben, wo hernach die Bildung der Rauchsäule begann".

schwand, Neugradiska (50): „An zwei Stellen war er breit, wie eine helle, bläulichgrüne Rauchwolke“, Warasdin (47): „An den Enden wurde der Streifen dicker, in der Mitte schwand er“, Bihać (56): Der Streifen war in der Mitte dünn, an den Enden dick. In Sissek (48) wurde nur bemerkt, dass der Streifen oben viel breiter war als unten. Nach der aus Jaice (59) vorliegenden Skizze war die Rauchsäule am östlichen Ende mindestens viermal so breit (obwohl es in Luftlinie vom Beobachter weiter entfernt gewesen sein musste) als in der Mitte, und weiter gegen Westen befand sich wieder eine schwache Verdickung.

Die Sichtbarkeitsdauer dieser Residuen, welche in einer über alle Vorstellung gehenden Verdünnung sich schwebend in Höhen erhalten haben, die man vor nicht langer Zeit noch als die Grenzen der Erdatmosphäre betrachtet hat, war eben auch nach den örtlichen Umständen nicht gleich. Von der längsten Dauer angefangen, sind die Angaben in Minuten folgende: Mittrowitz: 30, Jaice: 15—20, Kalocsa: 15, Sissek: der Streifen 8, einzelne Wölkchen 15, Greda: 10—15, Gospić und Neugradiska: 10, Bihać: 8, Serajevo: 7, Sinjako: beiläufig 2.

Während dieser Zeit erlitt der Streifen verschiedene Formveränderungen. Dass er anfangs, soweit solches nachweisbar war, gerade der Bahn entlang lief, dürfte ausser Zweifel stehen. Später traten Krümmungen und Windungen ein. Ob diese schraubenförmig waren, wie in manchen anderen Fällen, lässt sich nach den vorliegenden Beobachtungen nicht entscheiden, wiewohl einige darauf hindeuten. Sehr ausgeprägt war diese Form jedenfalls nicht. Als „schlangenförmig“ und „spiralwindend“ bezeichnen ihn die Beobachter in „Varcar Vakuf“ und „Sinjako“. „Die Form eines lateinischen S annehmend“ [Mittrowitz (51)]. In der Beobachtung aus Ključ (57) wird er „zickzackförmig“ genannt, und ähnlich lautet die Angabe aus Neugradiska (50). Der Bericht mit der Skizze aus Jaice (59) stellt die östliche Hälfte der Rauchsäule mehrfach unregelmässig gewunden, die westliche ganz gerade dar. Aus Kalocsa (46) heisst es nur, dass sich der Streifen „allmälig krümmte und zerriss“. In Sissek (48), welches ebenfalls die Ansicht von N her hatte, ist er ganz gerade gezeichnet und ist auch bei der Beschreibung der Auflösung von spiraligen Krümmungen nicht die Rede. Die Formveränderungen

solcher Residuen, bei welchen sehr verschiedene Ursachen zusammenwirken können, verdient, gestützt auf einigermassen genauere parallactische Bestimmungen, eine sorgfältigere Untersuchung, als ihr bisher wegen des mangelhaften Beobachtungsmateriales zu Theil wurde.

Detonationen werden mit einiger Bestimmtheit gemeldet aus Žirovac (53), Gračac (55): 4 Minuten nach dem Zerplatzen, Bihać (56), Ključ (57), wenigstens nach der ersten Anzeige der Telegraphendirection in Serajevo, welche auch aus Bravsko (34° 10·5′; 44° 31·5′), vier Stunden westlich vom letzteren Orte, Ähnliches meldet. Herr Cimburek in Ključ hat jedoch im Zimmer die Detonationen nicht vernommen. In Sinjako (58) waren sie „gleich einem in der Ferne abgefeuerten Geschütze“ vernehmbar, nicht mehr intensiv, und die Nachricht aus Jaice (59) kommt mir schon recht zweifelhaft vor. Alle diese Orte liegen östlich vom Hemmungspunkte, d. i. im Allgemeinen auf der Seite, über welche das Meteor hingezogen ist. Nicht eine einzige Nachricht kommt aus der Gegend westlich vom Hemmungspunkte, selbst aus Gospić nicht, welches ziemlich nahe gelegen war.

Es ist dies dieselbe Erscheinung, welche ich schon vielfach nachgewiesen habe und die regelmässig sehr auffallend bei Bahnen eintritt, deren Neigung gegen den Horizont nicht gross ist. Bihać und Gračac liegen in NNE und SSE, ziemlich gleichweit, über 30 *km* von der Projection des Hemmungspunktes und nahezu 50 *km* von diesem selbst entfernt. Ključ, wo die Detonationen wenigstens sicher von den im Freien befindlichen Personen gehört wurden, welche sogar Erderschütterungen verspürt haben wollen, liegt jedoch 80 *km* östlich und ist vom Hemmungspunkte in der Luftlinie fast 90 *km* oder mehr als 12 g. M. entfernt. Nicht viel näher liegt Žirovac in NE und noch weiter östlich Sinjako. Es drängt sich auch hier neuerdings die von mir schon wiederholt[1] hervorgehobene Annahme auf, dass in den so weit rückwärts gelegenen Orten nicht sowohl jene Detonationen vernommen worden sind, welche bei der schliesslichen Hemmung am Endpunkte entstanden sind, sondern solche aus einem früheren

[1] Vergl. u. A. diese Sitzungsberichte, Bd. 99, II., S. 290.

Theile der Bahn. Ključ liegt von den nächsten Punkten der in NW vorüberziehenden Bahn nur 58 *km* entfernt, demnach nicht viel weiter als Bihać und Gračac von den ihnen nächsten Bahntheilen. Ähnliches gilt von Sinjako. Žirovac liegt etwas weiter. Dass die schliessliche Hemmung möglicherweise weiter östlich, mehr im Bereiche der durch diese Orte bezeichneten Gegend stattgefunden haben könnte, ist nach den optischen Wahrnehmungen durchaus nicht annehmbar. Die vorliegenden Thatsachen müssen daher als weitere Bestätigung früherer Erfahrungen über die Vertheilung der Schallwahrnehmungen gelten.

Geocentrische Geschwindigkeit des Meteors.

Zur Abschätzung der Geschwindigkeit liegen 37 Angaben über die Dauer vor. Von diesen können 28 je auf ein zugehöriges, mehr oder weniger bestimmt bezeichnetes Bahnstück bezogen werden. Überdies kommen 9 Dauerschätzungen ohne Angabe der zugehörigen Bahnlänge vor. Einige andere, nach welchen die Dauer 1 oder gar 2 Minuten betragen hätte (Wien, *c*; Friesach, *f*), d. i. wohl zehnmal soviel und noch mehr, als andere Beobachter an denselben Orten angeben (z. B. Wien, *a)* bei sehr langer Bahn nur $4-5^s$), könnten nur dann benützt werden, wenn sie sich nachweisbar auf eine entsprechend längere Bahnstrecke beziehen würden. Letzteres ist zwar bei der Schätzung 30 *b*, bei welcher der bezeichnete Bahnbogen noch über den Radianten hinausgeht und die Angabe 30^s beträgt, der Fall, doch kann eben desshalb die zugehörige, ohne Frage sehr lange Strecke nicht ausgemittelt werden.

Die aus den einzelnen Schätzungen sich ergebenden Werthe der Geschwindigkeit, welche selbstverständlich grosse Unterschiede aufweisen, sind im Anhange aufgeführt. Da die Schlussresultate, welche bei früheren sorgfältigen Untersuchungen dieser Art fast immer auf hyperbolische Bahnen führten, hin und wieder, allerdings nur von jenen, welche dem Gegenstande nicht nähergetreten sind, angezweifelt werden, finde ich es nöthig, über die Benützung des betreffenden Beobachtungsmateriales auch diesmal Einiges zu bemerken.

Dass man durch Beobachtungen, wie sie uns vorliegen, nicht zur Kenntniss der w i r k l i c h e n Geschwindigkeit direct gelangen

könne, ist von mir schon wiederholt betont worden, weil die stets vorkommenden Überschätzungen der Dauer an und für sich schon zu kleine Werthe geben, und auch desshalb, weil die Meteore, wenn wir sie beobachten können, schon einen Theil ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit durch den Widerstand der Atmosphäre eingebüsst haben. Wenn aber selbst unter solchen Umständen die aus den Beobachtungen abgeleiteten Geschwindigkeiten fast immer so gross ausfallen, dass ihnen heliocentrisch nur stark hyperbolische Bahnen entsprechen, so wird man daraus nothwendig folgern müssen, dass ihre wahren Werthe eben noch grösser sein werden. Der umgekehrte Schluss erscheint mir unverständlich.[1]

Den einzig möglichen Gesichtspunkt, aus welchem die durch derartige Beobachtungen gewonnenen Geschwindigkeiswerthe als zu gross angefochten werden könnten, habe ich dagegen schon in früheren Fällen angedeutet; er ergibt sich aus der Annahme, dass die Beobachter möglicherweise durchschnittlich längere Bahnen angeben, als sie wirklich gesehen haben und dass diese Überschätzung relativ noch bedeutender sei als die

---

[1] Es ist offenbar ein Versehen, wenn Herr Th. Bredichin in seiner Abhandlung: „Sur l'origine des étoiles filantes" im Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou, 1889, Nr. 1, gerade umgekehrt schliesst. Er spricht zur Begründung seiner Meinung, dass die abgeleiteten Geschwindigkeiten wohl zu gross und die Bahnen solcher Meteore wohl auch Ellipsen sein mögen, nämlich Folgendes aus: „Quelquefois on a insisté sur la vitesse hyperbolique des météorites, en déduissant cette vitesse de la durée de l'apparition du météorite et de la longueur de son chemin dans l'air. Mais cette durée, comme aussi celle des bolides, observée toujours par des personnes non habituées aux observations astronomiques, paraît être généralement surestimée. En voyant un bolide, on commence à conter mentalement les secondes; mais par ma propre expérience je sais parfaitement bien, que la durée d'une seconde mentale même chez les personnes qui ont de l'instruction, est toujours plus petite que la durée du temps entre les deux battements d'un pendule à secondes". Die beiden hervorgehobenen Worte finden sich auch im Originaltexte ebenso behandelt.

Wie man sieht, bestätigt Herr Bredichin aus eigener Erfahrung die übrigens allbekannte Thatsache, dass die Dauer in der Regel überschätzt wird. Dass daher auch die auf Grund dieser Überschätzung ermittelte Geschwindigkeit zu gross ausfällt, kann er unmöglich wirklich glauben, denn es ist wohl überflüssig, zu beweisen, dass es sich damit gerade umgekehrt verhält.

der Dauer. Obwohl nun eine solche, für einzelne Fälle wohl begründete Voraussetzung im Allgemeinen durch die Erfahrung nicht oder doch nicht in der Weise wie für Dauerschätzungen bestätigt ist, und obgleich diesbezügliche Fehler viel leichter erkannt und vermieden werden können, als bei den Dauerschätzungen, habe ich gerade auf diesen Umstand bei der Discussion der Beobachtungen in dem Sinne Rücksicht genommen, dass die Einflüsse der Überschätzungen der Bahnlänge im Schlussresultate weit weniger vorwalten können, als jene der Dauer.

Der einfache Mittelwerth, welcher aus den vorliegenden Beobachtungen für die geocentrische Geschwindigkeit gezogen werden kann, ist 54·4 *km*. Bei der Schwierigkeit der Gewichtsbemessung halte ich denselben für das relativ beste Resultat, welches ohne willkürliche Deutungen erlangt werden kann. Ich habe jedoch auch, wie in früheren Fällen, noch einen anderen Weg eingeschlagen, indem Gewichtsverhältnisse festgesetzt wurden, durch welche gerade diejenigen Beobachtungen den grössten Einfluss erlangen, welche lange Dauer, also die kleinsten Geschwindigkeiten nachweisen. Wer den Versuch machen wollte, aus den vorliegenden brauchbaren Beobachtungen durch Wahl der Gewichte den kleinstmöglichsten Schlusswerth für die Geschwindigkeit abzuleiten, der könnte, wenn er nicht gänzlich willkürlich vorgehen wollte, kaum ein anderes Verfahren einschlagen. Die nähere Begründung ist im Anhange angedeutet, um den Zusammenhang hier nicht zu stören. Auf diesem Wege habe ich für die geocentrische Geschwindigkeit die Grösse 36·2 *km* abgeleitet. Dieselbe stellt jedoch ohne Zweifel weit mehr die untere, etwa noch annehmbare Grenze vor, als den wahrscheinlichsten Werth, und da auch diese noch namhaft über der parabolischen liegt, so kann man auch im gegenwärtigen Falle zu keinem anderen Schlusse gelangen, als dass die Bahn wieder eine Hyperbel war.

Kosmische Verhältnisse.

Legt man den bei gleichmässiger Berücksichtigung aller Beobachtungen ermittelten Durchschnittswerth für die geocentrische Geschwindigkeit, d. i. 54·4 *km*, zu Grunde, so bleiben nach Abzug der Störungen durch die Erde noch 53·2 *km*, und der von jenen

befreite Radiationspunkt ist dann in $\alpha = 113 \cdot 5°$, $\delta = +20 \cdot 9°$ oder in Länge und Breite $\lambda = 111 \cdot 9°$, $\beta = -0 \cdot 8°$. Wird die Geschwindigkeit der Erde zur Epoche mit 30·1 *km*, die Sonnenlänge mit 297·6° in Rechnung gebracht, so ergibt sich die heliocentrische Geschwindigkeit zu 63·7 *km* oder 8·6 g. M., d. i. 2·115 der Erdgeschwindigkeit, welche also einer ausgeprägten Hyperbel mit der Grossen Halbaxe $a = 0 \cdot 41$ entspricht. Für eine parabolische Bahn hätte die geocentrische Geschwindigkeit im vorliegenden Falle 27 *km* sein müssen, also noch viel weniger als jener Werth (36·2 *km*), welcher vorhin mit besonderer Berücksichtigung derjenigen Beobachtungen gefunden wurde, die eine längere Dauer geben. Unter sämmtlichen 28, auf bestimmte Bahnstücke bezüglichen Schätzungen befinden sich nur vier, für welche die zugehörige Geschwindigkeit den parabolischen Grenzwerth nicht überschreitet.

Mit der oben berechneten heliocentrischen Geschwindigkeit erhält man den kosmischen Ausgangspunkt in Länge und Breite $l = 78 \cdot 7°$, $b = -0 \cdot 7°$.

Die Radiationsbestimmung ist um soviel unsicher, dass die Breite eben sowohl nördlich als südlich sein könnte. Jedenfalls war diese sehr klein. Für südliche Breite wäre dann der aufsteigende Knoten in 117·6° Länge, die Bahnneigung gegen die Erdbahn 1·2° und die Bewegung direct.

Der Radiationspunkt, sowie der kosmische Ausgangsort dieses Meteors geben zu mehrfachen wichtigen Vergleichungen Anlass. Für den beobachteten Radiationspunkt haben wir früher gefunden: $\alpha = 113 \cdot 6°$, $\delta = +21 \cdot 7°$. Für ein am 24. December 1873 in Amerika beobachtetes, ebenfalls sehr glänzendes, detonirendes Meteor habe ich, wohl minder sicher, den Radianten in $\alpha = 109°$, $\delta = +26°$ ausgemittelt.[1] Für eine am 27. November 1862 in England beobachtete detonirende Feuerkugel fand ich nach den vielen (Report of the brit. associat. 1862) mitgetheilten Daten $\alpha = 100°$, $\delta = +28°$ und für alle beide ebenfalls sehr ausgeprägte hyperbolische Geschwindigkeiten. Die mit der Änderung der Knotenlänge nothwendig zusammenhängende Verschiebung des Radianten stimmt in Rectascension für alle drei Erscheinungen

---

[1] Diese Sitzungsber., 93. Bd., II., S. 210.

sehr gut überein mit der Hypothese einer Geschwindigkeit von $v = 2—2 \cdot 5$ (jene der Erde $= 1$); nur die Declination ist bei den letzteren zwei Positionen um einige Grade zu gross oder möglicherweise auch bei unserem Radianten etwas zu klein. Man wird hierüber nach der weiter unten gegebenen Vergleichung der Ausgangspunkte urtheilen können.

Die im November bis Jänner in den „Zwillingen" unweit der Ekliptik befindlichen Radianten entsprechen heliocentrischen Meteorbahnen, welche eine sehr geringe Neigung gegen die Erdbahn besitzen. Diese Bahnen liegen daher auch in ihrer weiteren Fortsetzung, dort wo nach dem Periheldurchgange der Radiusvector wieder ungefähr den Werth Eins erreicht, nicht weit von der Erdbahn. Die zweite Annäherung erfolgt für die oben bezeichneten stark hyperbolischen Geschwindigkeiten an der Stelle, wo die Erde sich im Mai und Juni befindet. Es wäre daher für Meteore dieser Ströme, selbst wenn diese keine grosse laterale Ausdehnung besitzen würden, auch ein zweites Mal Gelegenheit vorhanden, mit der Erde zusammenzutreffen, wobei ihre Radiationspunkte je nach der Knotenlänge sehr verschieden sein können. Auf zwei nachgewiesene derartige Fälle habe ich (a. a. O. S. 210) schon aufmerksam gemacht. Der eine betrifft den bekannten Meteoritenfall von Orgueil am 14. Mai 1864 (Radiationspunkt: $\alpha = 86 \cdot 5°$, $\delta = +24 \cdot 0°$), der andere das grosse Meteor am 11. Juni 1867 ($\alpha = 85 \cdot 4°$, $\delta = +43 \cdot 6°$). Man wird an der bezeichneten Stelle den Nachweis finden, dass trotz der namhaften Abweichungen der Radianten die kosmischen Ausgangspunkte für beide Erscheinungen nicht einmal um 2° von einander entfernt sind, was man auch aus der folgenden Zusammenstellung erkennen wird.

Ich möchte diesen Fällen noch jenen anfügen, welcher ein am 9. Juni 1888 in Preussisch-Schlesien bei Tageslicht beobachtetes detonirendes Meteors betrifft, für das ich nach den mir durch die Güte des Herrn Sternwartedirectors Prof. Dr. J. G. Galle zugekommenen und einigen selbstgesammelten Daten — allerdings nur aus drei scheinbaren Bahnen — den Radianten in $\alpha = 90°$, $\delta = +28°$ ausgemittelt habe.[1]

Die unverkennbare Annäherung der kosmischen Ausgangspunkte dieser hier erwähnten sechs Fälle möge aus folgender

[1] Verhandl. d. naturf. Vereines in Brünn, 27. Bd.

Vergleichung entnommen werden, bei welcher für die heliocentrische Geschwindigkeit, wie es ja sein muss, überall die gleiche Annahme, nämlich beispielsweise $v = 2 \cdot 5$, zu Grunde liegt. Weil für einige Epochen der Betrag der Präcession nicht mehr ganz verschwindend klein ist, so sind die Positionen alle auf das Äquinoctium 1890 reducirt.

	Kosmischer Ausgangspunkt für $v = 2 \cdot 5$	
	Länge	Breite
Meteor am 27. November 1862	84°3	+5°2
„ „ 24. December 1873	83·5	+3·7
„ „ 17. Jänner 1890	85·5	−0·2
„ „ 14. Mai 1864	83·9	+0·6
„ „ 9. Juni 1888	79·6	+0·2
„ „ 11. Juni 1867	82·0	+0.6

Ich will mich hier vorläufig mit diesem Hinweise begnügen, da sich für die weitere Discussion dieser Resultate noch Veranlassung bieten wird.

Kurze Zeit vor dem Erscheinen des grossen Meteors, welches uns hier beschäftigt hat, zog ein anderes aus demselben Radianten über Böhmen hin, worüber die folgenden Berichte Aufschluss geben.

1. Trautenau (33° 34′; 50° 33′). Herr H. Swoboda berichtete, angeregt durch die Aufforderung in den Tagesblättern, an die k. k. Wiener Sternwarte, dass das Meteor am 17. Jänner um $^3/_4 5^h$ in etwas südlicher Richtung von E nach W zog, in grünlichem Lichte erstrahlte und hinter sich einen langen, schmalen „Wolkenschleier“ liess. Da ich nun nähere Erkundigung einzog, war der Herr Beobachter so freundlich, mir Aufschlüsse zu geben, nach welchen von einer Identität mit dem anderen Meteor nicht mehr die Rede sein konnte. „Das Meteor erschien“, ergänzte Herr Swoboda, „fast senkrecht über mir, und der Ort des Aufleuchtens befand sich höchstens 10—20° südlich vom Zenith. Es erlosch in WSW, nach der Magnetnadel und beiläufig (nach Schätzung) 20° hoch.“ Der Beobachter vermuthete wohl mit Recht, dass die Erscheinung auch in Schlesien und Sachsen gesehen worden sein müsse. Leider wurde ich durch die übrigen

zahlreichen Erkundigungen von den Nachforschungen in dieser Richtung abgehalten. Eine wünschenswerthe Ergänzung fand sich aber doch aus

2. Brünn (34° 16′; 49° 12′). Herr J. Wytasek, k. k. Rechnungsrevident, theilte mir mit, dass er das Meteor am 17. Jänner ebenfalls beobachtet habe. Bei den mit ihm vorgenommenen Erhebungen zeigte sich nun, dass er von seinem Standpunkte den ganzen südlichen Himmel von Ost bis fast nach West nicht sehen und daher unmöglich auch nur das kleinste Bahnstück des anderen, weiter südlich allgemein beobachteten Meteors wahrgenommen haben konnte. In seiner Gegenwart bestimmte ich den Endpunkt in $A = 82°$, $h = 10°$. Er zeigte mir ferner auch die Bahn am Himmel ungefähr an, wobei sich herausstellte, dass die von ihm gesehene Feuerkugel nördlich vom Zenith vorüber gezogen sein musste. Das ungefähr 30° lange Bahnstück war gegen die Verticale des Endpunktes ungefähr 55° nach N hin geneigt. Der Herr Beobachter bemerkte ebenfalls, dass das Meteor einen sehr kurz andauernden, wolkenähnlichen Streifen zurückliess. Die Zeit konnte er nicht genau angeben, doch erinnerte er sich, dass es auf den Thurmuhren nach einiger Zeit 5^h geschlagen habe.

Diese beiden Beobachtungen gehören ohne Zweifel zusammen. Wahrscheinlich bezieht sich auch eine Beobachtungsnotiz aus Iglau in den hiesigen Blättern, über die ich nichts Näheres erfahren konnte, auf dieses Meteor. Für eine beiläufige Bahnbestimmung reichen die vorliegenden Angaben eben aus. Wird die Bezeichnung WSW aus Trautenau, mit Rücksicht auf den Compass, für etwa 59° astron. Azimuth genommen, so würde die Verbindung mit der Brünner Richtung (82°) den Endpunkt ungefähr über der Gegend etwas südlich von Ingolstadt in Baiern geben. Derselbe war dann von beiden Beobachtungsorten beiläufig gleich weit entfernt, so dass also auch die Höhen ungefähr gleich ausfallen sollten. Da nun jene in Trautenau nur geschätzt wurde, wobei fast immer beträchtlich zu hoch gegriffen wird, jene in Brünn aber nach guten Anhaltspunkten gemessen worden ist, so behalte ich nur letztere bei. Mit Rücksicht auf die namhafte Entfernung des Endpunktes (400 *km*) stellt sich die lineare Hemmungshöhe sehr gross heraus, nämlich 83 *km*. Eine so grosse

Höhe ist übrigens auch bei Boliden nicht ganz ausser aller Erfahrung, obwohl sie ungefähr doppelt so gross ist als die gewöhnliche. Allerdings kann dieses Resultat durch die zulässigen Fehler in der Richtungsparallaxe erheblich geändert werden. Wenn es damit aber seine Richtigkeit hätte, so wäre anzunehmen, dass in diesem Falle die meteorischen Massen nicht sehr bedeutend waren und desshalb nicht tiefer herabdringen konnten. Vielleicht hängt es damit zusammen, dass die Erscheinung bei der auch noch nicht weit vorgerückten Dämmerung nicht soviel Aufsehen erregte als jene, welche ihr bald folgte. Für die Abschätzung des Radiationspunktes kommen übrigens diese Umstände nicht wesentlich in Betracht. Die scheinbaren Bahnen sind der Richtung nach ungefähr gegeben.

Nimmt man für Trautenau den der Angabe nach noch zulässigen Grenzwerth 20° für den Zenithabstand der Bahn (mit Rücksicht auf die üblichen Überschätzungen), für Brünn die angegebene scheinbare Neigung, so sind die beiden scheinbaren Bahnen der Richtung nach bestimmt durch:

	I		II	
	α	δ	α	δ
*Trautenau......	130°5	0°	309°	—11°
*Brünn	110	0	291°5	+ 2°5

Der Schnitt dieser beiden Bogen gibt den Radianten in

Retasc.: 109°, Declination: +23°5.

Da wir für den Radianten unseres grossen Meteors vorhin $\alpha = 113 \cdot 6°$, $\delta = +21 \cdot 7°$ gefunden haben, so ist die Zusammengehörigkeit beider Meteore zum selben Strome kaum zu bezweifeln. Eine grössere Übereinstimmung konnte nicht erwartet werden. Die Epoche ist etwa $4^h\ 47^m$ mittl. Wiener Zeit, wenn die nur beiläufige Zeitangabe aus Trautenau beibehalten wird.

Die übrigen Umstände sind zwar wegen der Unsicherheit nicht von besonderem Interesse, doch mag noch erwähnt werden, dass das Azimuth der Bahn 243° und die Neigung 8° war. Das Meteor zog ungefähr in der Richtung von Pardubitz her über Böhmen. Eine Bahnlänge von 30° für Brünn würde den Anfang 121 *km* über der Gegend SE von Příbram ergeben. Wenn in

Trautenau die Feuerkugel wirklich schon südlich vom Zenith gesehen wurde, so müsste sie in diesem Momente etwa 143 *km* oder fast 20 g. M. über der Gegend von Pardubitz gewesen sein.

Wir vergleichen endlich nochmals die scheinbare Bahn des Meteors von Nakófálva mit unserem Radiationspunkte. Dieselbe geht, nach rückwärts verlängert, etwa 6° nördlich von der ausgemittelten Position vorbei. So gross und auch noch grösser sind die Abweichungen vieler der benützten Beobachtungen, deren Zugehörigkeit zweifellos ist. Es ist daher nicht unwahrscheinlich, dass ungefähr eine halbe Stunde nach der Epoche des grossen Meteors ein drittes aus dem gleichen Radiationspunkte etwas weiter südöstlich über Rumänien und Serbien hingezogen und im letzten Theile des Laufes in Nakófálva beobachtet worden ist.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bei Einleitung weitgehender Erkundigungen sich so oft Wahrnehmungen mehrerer, fast gleichzeitiger Erscheinungen dieser Art herausstellen. Was durch Zeitungsnotizen spontan bekannt wird, ist im Vergleiche mit den wirklichen Beobachtungen offenbar sehr wenig.

Anhang,

enthaltend einige besondere Nachweisungen und Bemerkungen.

1. Verbesserungen der auf den Endpunkt bezüglichen Beobachtungen: *R*—*B*.

	ΔA	Δh
(1) Hradisch	—	— 1°4
(6) Mistelbach	— 5·1	—
(8) Krems (*a*)	+ 0·1	+ 2·1
„ (*b*)	— 5·5	— 2·4
„ (*c*)	—	+ 1·6
„ (*d*)	— 7·5	— 1·4
(10) Wien (*a*)	+ 1·9	+ 0·2
„ (*b*)	+15·6	—
„ (*c*)	—13·4	—
„ (*d*)	+ 2·6	—
(13) Vöslau	+ 5·5	—
(15) Neunkirchen	+ 1·4	+ 0·7
(19) Kremsmünster	+11·7	— 1·6
(20) Kürnberg	+ 0·9	+ 3·0

	ΔA	Δh
(25) Fladnitz	— 9°0	—
(28) Neumarkt	+ 1·2	—
(29) Friesach (e)	—	+ 2°1
„ (f)	—	+ 0·1
„ (g)	—	— 0·9
„ (h)	—	+ 0·1
(30) Hirt (a)	0·0	— 0·8
„ (b)	—	+ 0·2
(33) Sonnegg	+12·7	+ 0·2
(35) Villach	+ 1·5	—
(38) Hotič	— 2·7	—
(41) Pola (a)	—17·5	+ 5·8
„ (b)	+17·5	+ 0·8
„ (c)	— 7·0	— 5·2
(46) Kalocsa	+ 0·1	— 0·4
(48) Sissek	—10·6	—
(57) Ključ	— 1·8	—
(60) Travnik	— 1·2	—
(61) Serajevo (b)	— 3·7	+ 1·9
(62) Ulok (a)	— 6·8	— 6·8
„ (b)	—	— 0·8

2. Verbesserungen am Punkte I.

Die Verbesserung $\Delta s = \sqrt{(\cos\delta\Delta\alpha)^2 + \Delta\delta^2}$ stellt den normalen Abstand der beobachteten Position I von dem verbesserten, d. i. dem durch den berechneten scheinbaren Radianten gehenden Bahnbogen dar.

	Δs
Waidhofen (4)	— 2°6
Krems (8)	+ 7·0
Wien (10)	+ 4·2
Neunkirchen (15)	— 2·5
Ardagger (18)	+ 8·3
Kremsmünster (19)	+ 2·6
Friesach (29)	— 2·6
Hirt (30)	— 2·2
Marburg (36)	+ 5·4
Laibach (37)	— 0·4
Pola (41)	— 1·5
Serajevo (61)	—13·2
Ulok (62)	+ 0·3

Durchschnittlich: 4°0·

Verbesserungen der angegebenen scheinbaren Neigungen:

	Δi
Hradisch (1)	— 6°5
Mistelbach (6)	+ 8·7
Niederkreuzstetten (7)	+ 6·8
Baden (12)	+ 2·8
Neumarkt (28)	— 1·7
Klagenfurt (32)	+ 3·1
Sonnegg (33)	+ 1·4
Schiff „Lussin" (42)	— 3·4
Kalocsa (46)	— 1·7
Neugradiska (50)	—17·1
Travnik (60)	— 6·6

Durchschnittlich: 6°0.

3. Übersicht der aus den einzelnen Dauerschätzungen hervorgehenden Werthe für die geocentrische Geschwindigkeit.

In der folgenden Zusammenstellung bezeichnet: L die der Beobachtung entsprechende lineare Bahnstrecke, t die zugehörige in Secunden abgeschätzte Dauer, v' die entsprechende Geschwindigkeit, p das Gewicht.

	L	t	v'	p
1. Hradisch (1)	270 *km*	5°5	49·1 *km*	0·6
2. Waidhofen (4)	364	8	45·5	0·7
3. Mistelbach (6)	113	10	11·3	2·3
4. Krems (8) (*a*)	365	6·5	56·1	0·5
5. „ (*b*)	474	20	23·7	3·2
6. Wien (10) (*a*)	570	4·5	126·7	0·1
7. „ (*b*)	180	7	25·7	1·4
8. „ (*c*)	226	3	75·4	0·2
9. „ (*d*)	180	3·5	51·4	0·4
10. „ (*h*)	120	2·5	48·0	0·1
11. Baden (12)	312	3·5	89·2	0·3
12. Vöslau (13)	127	8	15·9	2·0
13. Neunkirchen (15)	124	2	62·0	0·2
14. Ardagger (18)	263	3	87·8	0·1
15. Kremsmünster (19)	243	6·5	37·4	0·6
16. Neumarkt (28)	289	20	14·5	4·0
17. Friesach (29) (*c*)	113	2·5	45·2	0·1
18. „ (*g*)	375	10	37·5	0·5
19. Klagenfurt (32) S.	244	4	61·0	0·5
20. „ R.	244	3·5	70·0	0·3

	L	t	v'	p
21. Marburg (36)	528 *km*	5·5	96·0 *km*	0·1
22. Pola (41)	167	4	41·8	0·1
23. Ragusa (44)	102	1·5	68·2	0·1
24. Cattaro (45)	737	10	73·7	0·1
25. Kalocsa (46)	224	4·5	49·7	0·8
26. Serajevo (61) (*a*)	229	5	45·8	2·8
27. „ (*b*)	223	4	55·7	2·4
28. Ulok (62)	299	5	59·8	1·0
Hiezu kommen noch von Beobachtungen ohne Angabe der Bahnstrecke:				
29. Aus Wien vier Angaben: Ramsauer 3·5ˢ, Zimmermann 12·5ˢ, Künzl 4·5ˢ, Pflugmacher 2·5ˢ, im Mittel 5·75ˢ, bezogen auf das Bahnlängemittel aus Nr. 6—10	257	5·75	44·7	0·4
30. Aus Czeitsch 5ˢ, Hirschstetten 5·5ˢ, St. Margarethen 3ˢ, Meiselding 3ˢ, vom Schiff „Lussin" 5ˢ, im Mittel 4·3ˢ, bezogen auf das Bahnlängemittel von Nr. 1—28	279	4·3	64·9	0·5

Wenn die einzelnen Werthe von v' als gleichgewichtig angesehen und zum einfachen Mittel vereinigt werden, so erhält man aus Nr. 1—30 für die geocentrische Geschwindigkeit 54·4 *km* $\pm$5 *km*.

Ein zweites Resultat ist mit Berücksichtigung der oben beigesetzten Gewichte abgeleitet worden, für deren Wahl Folgendes bestimmend war.

Wenn $\pm dL$ und $\pm dt$ die mittleren Fehler der betreffenden Bahnstrecken und zugehörigen Dauer sind, so wird der Fehler in der Geschwindigkeit dv' dargestellt durch:

$$dv'^2 = \left(\frac{dL}{t}\right)^2 + \left(\frac{L\,dt}{t^2}\right)^2 \quad \text{und dann:} \quad p = \frac{k}{(dv')^2}\cdot$$

Uber dt oder die Unsicherheit der Dauerschätzung in den einzelnen Fällen besitzen wir so wenig Erfahrungen, dass das zweite Glied nicht einmal schätzungsweise angegeben werden kann. Die gewöhnlich vorkommende Überschätzung von t verursacht einseitige, systematische Fehler, welche jedoch auch nicht gut in Betracht gezogen werden können, weil ihr Gesetz

nur sehr unvollkommen bekannt ist. Das erste Glied kann abgeschätzt werden, aber auch nur mangelhaft. dL kann, wenn man einen mittleren Richtungsfehler zu Grunde legt, leicht berechnet werden, jedoch statt der unbekannten wirklichen Dauer t muss die beobachtete gesetzt werden. Dann erhalten selbstverständlich diejenigen Resultate, bei welchen t namhaft überschätzt ist, ein unverhältnissmässig grosses, ganz unverdientes Gewicht, wovon man sich aus der obigen Zusammenstellung (z. B. bei Nr. 5 und 16) leicht überzeugt. Dadurch wird das Schlussresultat unnatürlich herabgedrückt. Dennoch habe ich, aber nur um zu zeigen, dass auch bei derart einseitiger Behandlung immer noch für die Geschwindigkeit ein Schlusswerth resultirt, der einer ausgeprägten Hyperbel entspricht, in diesem Sinne die Gewichtsverhältnisse, welche oben angeführt sind, nach der Grösse $\left(\frac{t}{dL}\right)^2$ berechnet. Einige Dauerangaben, für welche eine bestimmte Strecke nicht bezeichnet ist (Nr. 29 und 30, oben), sind, um sie nicht gänzlich auszuscheiden, auf die mittlere Bahnlänge bezogen, aber nur mit dem geringsten vorkommenden Gewichte in Rechnung gebracht worden. Auf diese Weise ergab sich für die geocentrische Geschwindigkeit noch immer 36·2 *km*.

Das erste Glied kann auch in der Form $v'^2\left(\frac{dL}{L}\right)^2$ geschrieben werden. Weil es sich, wenn das zweite Glied nicht berechnet werden kann, nur um die Verhältnisse handelt, da v' constant ist, könnte der andere Factor bestimmt werden ohne Rücksicht auf die Dauer t. Da nun die einzelnen Bahnlängen L doch viel sicherer sind als die Dauerangaben, so wäre dieser Weg der Gewichtsschätzung — immer abgesehen von der Vernachlässigung des zweiten Gliedes — ohne Zweifel der richtigere. Wenn man jedoch auf diese Weise die Gewichte proportional den Grössen $\left(\frac{L}{dL}\right)^2$ nimmt, so erhalten wieder jene Einzelnresultate, wo die angegebenen Bahnlängen sehr gross sind, welche also in der Regel auch grosse Geschwindigkeiten geben, sehr bedeutende Gewichte. In unserem Falle würde auf diese Weise der Schlusswerth für die Geschwindigkeit noch grösser ausfallen als das einfache Mittel. Gegen dieses Verfahren könnte sich nun der

Einwurf wenden, dass auf solche Art diejenigen Beobachtungen, bei welchen Überschätzungen der Bahnlänge vorkommen, unverdient grosses Gewicht erhalten, wodurch das Endresultat willkürlich vergrössert wird. Ich habe daher diesen Weg, welcher mir, wie bemerkt, der richtigere zu sein scheint, wenn man unter derartigen Umständen überhaupt eine Gewichtsschätzung vornehmen will, vermieden.

Übrigens dürfte man es nach dem Gesagten begründet finden, dass ich im Texte das einfache Mittel beibehalten habe.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen vom Jahre 1888 (Band XCVII) an in folgenden **vier** gesonderten **Abtheilungen,** welche auch einzeln bezogen werden können:

Abtheilung I. Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Krystallographie, Botanik, Physiologie der Pflanzen, Zoologie, Paläontologie, Geologie, Physischen Geographie und Reisen.

Abtheilung II. a. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Astronomie, Physik, Meteorologie und Mechanik.

Abtheilung II. b. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Chemie.

Abtheilung III. Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Anatomie und Physiologie des Menschen und der Thiere, sowie aus jenem der theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Manuscripte voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung F. Tempsky (Wien, I., Tuchlauben 10) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden auch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, acht Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr. oder 3 Mark.





